Г. Д. Ким, Л. В. Крицков

АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Теоремы и задачи

Том I

Под редакцией академика РАН В. А. Ильина

планета знаний

МОСКВА

2007

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Г. Д. Ким, Л. В. Крицков

АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

теоремы и задачи

Том I

Под общей редакцией
академика РАН **В. А. Ильина**

планета знаний

ПЛАНЕТА ЗНАНИЙ
Москва
2007

ББК 22.147

Рекомендовано
Советом по прикладной математике и информатике
УМО по классическому университетскому образованию
для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по специальности 010200
"Прикладная математика и информатика" и направлению 510200
"Прикладная математика и информатика"

Ким Г.Д., Крицков Л.В.
Алгебра и аналитическая геометрия: Теоремы и задачи. Том I. М.: "Планета знаний", 2007. — 469 с.

ISBN 978-5-903242-01-6

Настоящая книга представляет собой второе, переработанное и дополненное, издание задачника по объединенному курсу алгебры и аналитической геометрии. Теоретической поддержкой книги является учебник Ильина В.А., Ким Г.Д. "Линейная алгебра и аналитическая геометрия", в котором авторы придерживаются современной тенденции объединения традиционно различных разделов математики в одну дисциплину, добиваясь наглядности алгебраических абстракций и лаконичности геометрических доказательств. Каждый раздел учебника содержит теоретическое введение, примеры решения типовых задач и большое число задач для семинарских занятий и самостоятельной работы студентов. Задачи снабжены ответами и указаниями.

Пособие предназначено для студентов физико-математических специальностей университетов.

Издание подготовлено в рамках образовательной программы "Формирование системы инновационного образования в МГУ".

ISBN 978-5-903242-01-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 5
Предисловие ко второму изданию 6
Список литературы 7
Глава I. **Матрицы** 9
§ 1. Операции над матрицами 10
§ 2. Матрицы специального вида 20
§ 3. Элементарные преобразования матриц 31
Глава II. **Определители** 38
§ 4. Перестановки 38
§ 5. Простейшие свойства определителя 41
§ 6. Миноры и алгебраические дополнения 49
§ 7. Вычисление определителя 56
§ 8. Смешанные задачи 78
§ 9. Обратная матрица 87
Глава III. **Множества и отображения** 103
§ 10. Операции над множествами 103
§ 11. Отображения 106
§ 12. Эквивалентность и алгебраические законы 111
Глава IV. **Введение в теорию линейных пространств** 117
§ 13. Геометрические векторы 117
§ 14. Вещественное линейное пространство 125
§ 15. Линейная зависимость 130
§ 16. Ранг матрицы 136
§ 17. Базис и координаты 145
§ 18. Линейное подпространство и линейное многообразие . . 156
Глава V. **Системы линейных алгебраических уравнений** 161
§ 19. Системы с квадратной невырожденной матрицей 162
§ 20. Системы общего вида 166
§ 21. Метод Гаусса исследования и решения систем 169
§ 22. Геометрические свойства решений системы 179
Глава VI. **Векторная алгебра** 189
§ 23. Аффинная система координат. Координаты точки 189
§ 24. Скалярное произведение 203
§ 25. Векторное и смешанное произведения 217

Глава VII. **Прямая на плоскости и плоскость в пространстве** ... 231
§ 26. Составление уравнений по различным заданиям ... 231
§ 27. Задачи взаимного расположения прямых на плоскости и плоскостей в пространстве ... 239
§ 28. Полуплоскости и полупространства ... 249
§ 29. Метрические задачи в прямоугольной декартовой системе координат ... 253
§ 30. Метрические задачи в аффинной системе координат ... 267

Глава VIII. **Прямая и плоскость в пространстве** ... 271
§ 31. Уравнения прямой в пространстве. Задачи взаимного расположения ... 271
§ 32. Метрические задачи в пространстве ... 279
§ 33. Векторные уравнения прямой и плоскости ... 286

Глава IX. **Алгебраические линии и поверхности второго порядка** ... 291
§ 34. Эллипс, гипербола и парабола ... 291
§ 35. Линии второго порядка, заданные общими уравнениями ... 307
§ 36. Эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды ... 316
§ 37. Конусы и цилиндры ... 329
§ 38. Поверхности второго порядка, заданные общими уравнениями ... 335

Глава X. **Элементы общей алгебры** ... 344
§ 39. Группа ... 344
§ 40. Кольцо и поле ... 362

Глава XI. **Поле комплексных чисел** ... 373
§ 41. Алгебраическая форма комплексного числа ... 373
§ 42. Комплексные числа в тригонометрической форме ... 377
§ 43. Корни из комплексного числа ... 383

Ответы и указания ... 389
Предметный указатель ... 460
Указатель обозначений ... 466

ПРЕДИСЛОВИЕ

"Задачи не придумывают, их коллекционируют," – это слова из беседы известного математика П.С.Моденова, автора знаменитого задачника по элементарной математике, с молодыми преподавателями МГУ.

Настоящее учебное пособие представляет собой сборник задач по объединенному курсу алгебры и аналитической геометрии. В основе сборника лежит замечательная коллекция задач наших учителей и коллег. В первую очередь – это "Сборник задач по линейной алгебре" И.В.Проскурякова [21], "Сборник задач по аналитической геометрии" С.В.Бахвалова, П.С.Моденова, А.С.Пархоменко [1] и "Задачник по линейной алгебре" Х.Д.Икрамова [8]. Авторы стремились пополнить классическую коллекцию новыми задачами и, если это им удалось, то во многом благодаря сотрудничеству с коллегами по факультету вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В.Ломоносова.

Пособие содержит в основном традиционный, но специальным образом подобранный материал, соответствующий курсу, в котором органически связаны дисциплины "Общая алгебра", "Линейная алгебра" и "Аналитическая геометрия". В сборнике представлено большое количество задач разной степени сложности, достаточное для обеспечения курса алгебры и аналитической геометрии. Вместе с тем сборник может быть полезен и для тех, кто осваивает смежные области: в книгу включены задачи матричного анализа, используемые в численных методах, теории функций, дифференциальных уравнениях, математической статистике. Задачи на конечные группы и поля могут заинтересовать и тех, кто изучает дискретную математику.

Несколько замечаний о структуре книги. Задачи сгруппированы в параграфы. Нумерация параграфов сквозная. В начале каждого параграфа приводятся определения и формулировки теорем, касающиеся рассматриваемых понятий, а также примеры решений типовых задач. Теоретической поддержкой задачника являются учебник В.В.Воеводина [3], в котором заложены методические основы объединения курсов алгебры и геометрии, и учебник В.А.Ильина, Г.Д.Ким [9]. Последовательность разделов, а также определения и обозначения соответствуют учебнику [9]. В конце задачника помещены ответы к задачам, к некоторым из них даются рекомендации.

Инициатива написания книги принадлежит деканату факультета ВМиК МГУ. Мы рады случаю выразить глубокую признательность декану факультета академику РАН Е.И.Моисееву.

Авторы считают своим приятным долгом отметить, что на их деятельность оказала решающее влияние система преподавания математики на факультете ВМиК, сложившаяся под руководством и при непосредственном участии академика РАН А.Н.Тихонова, профессора И.С.Березина, академика РАН В.В.Воеводина и академика РАН В.А.Ильина, стоявших у истоков организации факультета.

Г.Д.Ким, Л.В.Крицков

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

В настоящем издании исправлены опечатки и неточности, обнаруженные в тексте первого издания [12, том I]. В значительной степени это нам удалось благодаря нашим коллегам – А.Б.Будаку, И.В.Дмитриевой, Н.Б.Есиковой, Х.Д.Икрамову, М.В.Комарову, В.А.Морозовой, А.А.Полосину, Р.В.Разумейко, А.И.Фалину, А.С.Фурсову, а также многим студентам и аспирантам факультета ВМиК МГУ им. М.В.Ломоносова. Мы выражаем им свою глубокую и искреннюю признательность.

Во второе издание добавлено более 150 новых задач. При этом мы старались сохранить прежнюю нумерацию задач, снабжая новые задачи "тройными" номерами или располагая их в конце параграфов. Тем не менее, ряд разделов был подвергнут существенной переработке – это прежде всего относится к §§ 39, 40 и отчасти к §§ 19, 21 и 30, где порядок задач был изменен. Кроме того, в конце задачника появились предметный указатель и указатель обозначений.

Второе издание книги было подготовлено в рамках образовательной программы "Формирование системы инновационного образования в МГУ".

Г.Д.Ким, Л.В.Крицков
Декабрь 2006 года

Список литературы

1. Бахвалов С.В., Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии.– М.: Наука, 1964.

2. Беклемишева Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре.– М.: Физматлит, 2003.

3. Воеводин В.В. Линейная алгебра.– М.: Наука, 1974.

4. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.И. Матрицы и вычисления.– М.: Наука, 1984.

5. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц.– М.: Физматлит, 2004.

6. Глазман И.М., Любич Ю.И. Конечномерный линейный анализ.– М.: Наука, 1969.

7. Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия.– М.: Физматлит, 2004.

8. Икрамов Х.Д. Задачник по линейной алгебре.– М.: Наука, 1975.

9. Ильин В.А., Ким Г.Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия.– М.: Проспект, 2007.

10. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия.– М.: Физматлит, 2006.

11. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра.– М.: Физматлит, 2005.

12. Ким Г.Д., Крицков Л.В. Алгебра и аналитическая геометрия. Теоремы и задачи. Том I, том II(1), том II(2).– М.: Зерцало, 2003.

13. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Кн. 1: Основы алгебры. Кн. 2: Линейная алгебра. Кн. 3: Основные алгебраические структуры.– М.: Физматлит, 2004.

14. Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия.– М.: Лань, 2005.

15. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.– М.: Лань, 2005.

16. Маркус М., Минк Х. Обзор по теории матриц и матричных неравенств.– М.: УРСС, 2004.

17. Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии.– М.: Наука, 1976.

18. Полиа Г., Сегё Г. Задачи и теоремы из анализа (в 2-х частях).– М.: Наука, 1978.

19. Прасолов В.В. Задачи и теоремы линейной алгебры.– М.: Наука, 1996.

20. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии (в 2-х частях).– М.: Наука, 1991.

21. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре.– М.: Бином, 2005.

22. Сборник задач по алгебре / Под ред. Кострикина А. И. – М.: Физматлит, 2001.

23. Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Сборник задач по высшей алгебре.– М.: Лань, 2001.

24. Халмош П. Конечномерные векторные пространства.– Ижевск: НИЦ "Регуляная и хаотическая динамика 2002.

25. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ.– М.: Мир, 1989.

26. Цубербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии.– М.: Лань, 2005.

27. Шилов Г. Е. Математический анализ (конечномерные линейные пространства).– М.: Наука, 1969.

Глава I. **Матрицы**

Пусть $m, n \in \mathbb{N}$. *Матрицей размера* $m \times n$ называется совокупность mn чисел, записанных в виде прямоугольной таблицы из m строк и n столбцов. При этом сами числа называются *элементами* матрицы. Если элемент матрицы стоит на пересечении i-й строки и j-го столбца, то говорят, что он расположен *в позиции* (i, j).

В главах I–VIII рассматриваются лишь вещественные матрицы, т.е. матрицы с вещественными элементами.

Приняты следующие обозначения:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$ или $A = (a_{ij})$ – матрица A с элементами a_{ij} в позиции (i, j);

$\{A\}_{ij}$ – элемент матрицы A в позиции (i, j);

$A_{m \times n}$ – матрица A размера $m \times n$;

$\mathbb{R}^{m \times n}$ – множество всех вещественных матриц размера $m \times n$;

a_i' и a_j – i-я строка и j-й столбец матрицы A, тем самым матрица A может быть записана более компактно в виде

$$A = \begin{bmatrix} a_1' \\ a_2' \\ \vdots \\ a_m' \end{bmatrix} \qquad \text{или} \qquad A = [\, a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n \,] \,. \tag{0.1}$$

Элементы a_{ij}, где $i = j$, называются *диагональными*, а элементы a_{ij}, где $i \neq j$, – *внедиагональными*. Совокупность всех диагональных элементов $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{kk}$, где $k = \min(m, n)$, называется *главной диагональю* матрицы, а совокупность элементов a_{1n}, $a_{2,n-1}$, … – ее *побочной диагональю*.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* и обозначается символом O.

Матрица размера $n \times n$ называется *квадратной матрицей* n*-го порядка*. О б о з н а ч е н и е: A_n – квадратная матрица A порядка n. Квадратная матрица называется *диагональной*, если все ее внедиагональные элементы равны нулю. О б о з н а ч е н и е: $\mathrm{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$. Диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны между собой, называется *скалярной*. Скалярная матрица, у которой все диагональные элементы равны 1, называется *единичной (тождественной)* и обозначается символом I. Элементы единичной матрицы обозначаются символом δ_{ij} (символ Кронекера), так что $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$ и $I = (\delta_{ij})$. Столбец e_j и строка e_i' единичной матрицы называются j*-м единичным столбцом* и i*-й единичной строкой*.

Число $\mathrm{tr}\, A = a_{11} + \ldots + a_{nn}$ называется *следом* матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

Матрица размера $1 \times n$ называется *строчной матрицей*, или *матрицей-строкой*, или *вектор-строкой*. Матрица размера $m \times 1$ называется *столбцовой матрицей*, или *матрицей-столбцом*, или *вектор-столбцом*.

§1. Операции над матрицами

Две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового размера $m \times n$ называются *равными*, если $a_{ij} = b_{ij}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$. Обозначение: $A = B$.

Суммой матриц $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ называется матрица $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, элементы которой определены равенством

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Обозначение: $C = A + B$.

Матрица $-A = (-a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ называется *противоположной* к матрице $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Теорема 1.1. *Операция сложения матриц обладает следующими свойствами:* $\forall A, B, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *и* $O \in \mathbb{R}^{m\times n}$

1) $A + B = B + A$ *(сложение матриц коммутативно);*

2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ *(сложение матриц ассоциативно);*

3) $A + O = O + A = A$*;*

4) $A + (-A) = -A + A = O$.

Разностью матриц $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ называется матрица $X = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ такая, что $A = B + X$. Обозначение: $X = A - B$.

Произведением матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *на число* $\alpha \in \mathbb{R}$ называется матрица $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, элементы которой определены равенством

$$c_{ij} = \alpha a_{ij}, \quad i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Обозначение: $C = \alpha A$.

Матрица $\sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k A_k$ называется *линейной комбинацией матриц* $A_1, \ldots,$ A_m *с коэффициентами* $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.

Теорема 1.2. *Операция умножения матрицы на число обладает следующими свойствами:* $\forall A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1) $1 \cdot A = A$*;*

2) $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$*;*

3) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$ *(умножение матрицы на число дистрибутивно относительно сложения матриц);*

4) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$ *(умножение матрицы на число дистрибутивно относительно сложения чисел);*

5) $-A = (-1)A$.

Произведением матриц $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times k}$ называется матрица $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times k}$, элементы которой определены равенством

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj}, \quad i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,k}. \tag{1.1}$$

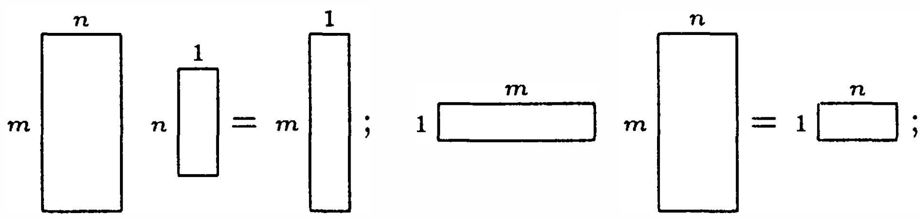
Обозначение: $C = AB$.

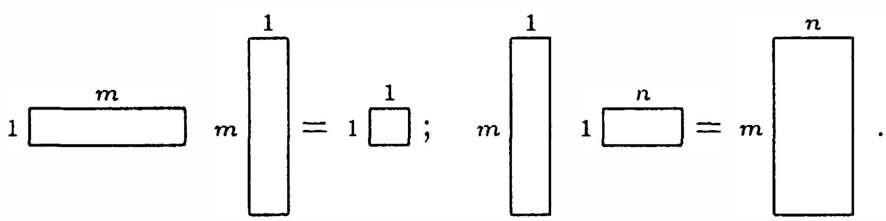
Произведение матриц зависит от порядка сомножителей; произведение AB определено лишь в том случае, когда размеры матриц A и B согласованы специальным образом: число столбцов левой матрицы должно совпадать с числом строк правой.

Соотношение (1.1) означает, что элемент матрицы AB, расположенный в i-й строке и j-м столбце, равен сумме произведений соответственных элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B. Например,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -1 & 3 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}}_{3\times 2} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1\cdot 2+(-6)\cdot 0 & 1\cdot 4+(-6)\cdot 5 \\ (-1)\cdot 2+3\cdot 0 & (-1)\cdot 4+3\cdot 5 \\ 6\cdot 2+(-3)\cdot 0 & 6\cdot 4+(-3)\cdot 5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -26 \\ -2 & 11 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}}_{3\times 2}.$$

Согласование размеров матриц-сомножителей и их произведения можно "увидеть" на примере умножения матрицы на вектор-столбец и на вектор-строку:





Заметим, что умножение матрицы слева на столбец и справа на строку не определено в общем случае.

Непосредственно из определения следует, что

$$Ae_i = a_i, \quad e_i'A = a_i'. \tag{1.2}$$

Равенства (1.2), по существу, означают, что для любой матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$

$$AI_n = I_mA = A,$$

где I_n и I_m – единичные матрицы порядков n и m соответственно.

Матрицы A и B, для которых $AB = BA$, называются *перестановочными* или *коммутирующими.*

Матрица $[A, B] = AB - BA$ называется *коммутатором* матриц A и B. Очевидно, что коммутатор матриц нулевой тогда и только тогда, когда матрицы перестановочны.

Теорема 1.3. *Операция умножения матриц обладает следующими свойствами:*

1) $(AB)C = A(BC)$ *(умножение ассоциативно),*

2) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)\,, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},$

3) $A(B+C) = AB + AC$, $(A+B)C = AC + BC$ *(умножение дистрибутивно относительно сложения матриц),*

выполненными для любых матриц A, B, C, *для которых левые части равенств имеют смысл.*

Пусть $p(t) = \sum_{k=0}^{m} a_k t^k$ – многочлен с вещественными коэффициентами от одной переменной t и A – квадратная матрица. Матрица $p(A) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_mA^m$ называется *многочленом от матрицы* A.

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Матрица $A^T = (a^t_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times m}$ называется *транспонированной* к матрице A, если

$$a^t_{ij} = a_{ji}, \quad i = \overline{1,n}, \ j = \overline{1,m}.$$

Переход от матрицы A к A^T называется *транспонированием матрицы* A. Заметим, что при транспонировании матрицы A ее строки становятся столбцами A^T с теми же номерами, а столбцы – строками.

Например,

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Теорема 1.4. *Операция транспонирования матриц обладает следующими свойствами:*

1) $(A+B)^T = A^T + B^T$,

2) $(\alpha A)^T = \alpha A^T, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$,

3) $(AB)^T = B^T A^T$,

4) $(A^T)^T = A$,

выполненными для всех матриц A, B, *для которых имеют смысл левые части равенств.*

Пример 1.1. Найти произведение $ABCD$ матриц

$$A = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \ D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Имеем $ABCD = A(BC)D = \{BC = 2\} = A \cdot 2D = 2(AD) = 2\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 5 & 10 & -5 \\ 7 & 14 & -7 \\ 9 & 18 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 20 & -10 \\ 14 & 28 & -14 \\ 18 & 36 & -18 \end{bmatrix}$. ■

Пример 1.2. Вычислить $p(A)$, если $p(t) = 5 - 2t + t^2$, A – квадратная матрица второго порядка, элементы которой определены условиями $a_{ij} = \max\{i,j\}$.

Решение. Восстановим матрицу A по заданному условию: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$. Тогда $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$ и $p(A) = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$. ■

Пример 1.3. Показать, что если $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, а $b' = [\alpha_1\, \alpha_2 \, \ldots \, \alpha_m]$ и $b = [\alpha_1\, \alpha_2 \, \ldots \, \alpha_n]^T$ – вектор-строка и вектор-столбец соответственно, то

$$Ab = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i, \qquad b'A = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a'_i. \tag{1.3}$$

Решение. Очевидно, что $b = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Тогда $Ab = A\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) = \{$из дистрибутивности умножения матриц$\}$ $= \sum\limits_{i=1}^{n} A(\alpha_i e_i)$ $=$ $\{$теорема 1.3$\}$ $=$ $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i A e_i = \{(1.2)\} = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i a_i$. Второе из равенств (1.3) следует из первого, так как в силу теоремы 1.4 $(b'A)^T = A^T(b')^T$, причем $(b')^T$ – это вектор-столбец. Поэтому $(b'A)^T$ является линейной комбинацией столбцов A^T, а $b'A$ – линейной комбинацией строк A с коэффициентами $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$. ■

Пример 1.4. Доказать, что столбцы произведения AB являются линейными комбинациями столбцов матрицы A, а строки AB – линейными комбинациями строк матрицы B.

Решение. Пусть в обозначениях (0.1) матрица B имеет вид $B = [b_1\, b_2\, \ldots\, b_k]$. Тогда, как следует из определения произведения матриц, $AB = [Ab_1\, Ab_2\, \ldots\, Ab_k]$. В силу (1.3) отсюда следует первая часть доказываемого утверждения. Вторая его часть может быть сведена к первой приемом, описанным в решении примера 1.3. ■

ЗАДАЧИ

1.1. Матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ и $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ определены условиями $a_{ij} = |i-j|$, $b_{ij} = \max\{i, j\}$. Найти:

а) произведения AB и BA;

б) линейную комбинацию матриц AA^T и AB с коэффициентами 1 и -1.

1.2. Найти произведение AB, где:

а) $A = \begin{bmatrix} 74 & -35 & 52 & 45 \\ 13 & 98 & -84 & -21 \\ 38 & -64 & 32 & 79 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$;

б) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 74 & -35 & 52 & 45 \\ 13 & 98 & -84 & -21 \\ 38 & -64 & 32 & 79 \end{bmatrix}$;

в) $A = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -2 & -7 \\ -4 & 2 & -3 & 5 \\ -3 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$;

г) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & 3 & -2 & -7 \\ -4 & 2 & -3 & 5 \\ -3 & -1 & 4 & 1 \\ 2 & -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$;

д) $A = \begin{bmatrix} 882 & 1223 & 0 & 0 \\ 988 & 1147 & 0 & 0 \\ 1113 & 1380 & 0 & 0 \\ 1478 & 879 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1755 & 1613 & 1712 & 716 \\ 1564 & 1725 & 151 & 44 \end{bmatrix}$.

1.3. Вычислить произведение ABC, где

$$A = \begin{bmatrix} 2002 & 2001 & 2000 \\ 1999 & 1998 & 1997 \\ 1996 & 1995 & 1994 \\ 1993 & 1992 & 1991 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 12 & 6 & -2 \\ 6 & 3 & -1 \\ 18 & 9 & -3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

1.4. Вычислить произведение A^2B^3C, где

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 23 & 47 \\ -5 & 31 & -6 \\ 35 & 51 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ -4 & 2 & 7 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

1.5. Вычислить произведение $(AB)^2C$, где

$$A = \begin{bmatrix} 141 & 121 & 161 \\ 262 & 232 & 292 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 2 & 0 & -8 \end{bmatrix}.$$

1.6. Вычислить произведение $(AB)^3$, где

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -4 \\ 11 & -4 \\ -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -5 & 7 & 11 & -3 \\ -3 & 11 & 27 & 5 \end{bmatrix}.$$

1.7. Вычислить произведение $ABCD$, где

$$A = \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 115 & 149 & 92 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

1.8. Вычислить произведение ABC, где

$$A = \begin{bmatrix} 21 & -32 \\ 11 & 17 \\ -9 & 121 \\ 52 & -24 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 12 & -7 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 6 & -8 \\ 4 & -2 \\ 10 & -8 \end{bmatrix}.$$

1.9. Вычислить произведение $(AB)^3(CD)^2$, где

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -9 & 21 \\ 21 & -49 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \ C = \begin{bmatrix} -3 & -8 \\ 4 & 12 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 14 & 0 & -35 \\ 6 & 0 & -15 \end{bmatrix}.$$

1.10. Известно, что $A\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ и $A\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$. Найти произведение $A\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$.

1.11. *Рядом Фибоначчи* называется последовательность чисел $\{x_n\}$, в которой

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1, \quad x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \quad \text{для} \quad n \geq 2.$$

Найти матрицу A такую, что

$$\begin{bmatrix} x_n \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1.12. Доказать, что если A и B – матрицы вида $\begin{bmatrix} x & y \\ 2y & x \end{bmatrix}$, где $x, y \in \mathbb{R}$, то

а) матрицы $A + B$ и AB имеют такой же вид;

б) $AB = BA$.

1.13. Найти $e_i' A e_j$, если $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, а e_i' и e_j – единичные строка и столбец подходящих размеров.

1.14. *Матричной единицей* E_{ij} размера $m \times n$ называется матрица, у которой элемент в позиции (i, j) равен единице, а все остальные элементы равны нулю. Для произвольной матрицы A и матричной единицы E_{ij} подходящего размера вычислить:

а) AE_{ij}; б) $E_{ij}A$.

1.15. Найти $f(A)$:

а) $f(x) = x^2 - 2x + 2, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$;

б) $f(x) = x^2 - 3x - 4, \quad A = \begin{bmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$.

1.16. Доказать, что каждая квадратная матрица второго порядка $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ удовлетворяет уравнению

$$x^2 - (a+d)x + (ad - bc) = 0.$$

1.17. Доказать, что если A – диагональная матрица, то матрица $f(A)$ также диагональная, каков бы ни был многочлен $f(x)$.

1.18. Вычислить:

а) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{13}$; б) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{7}$.

1.19. Вычислить:

а) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^{n}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{n}$; в) $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}^{n}$; г) $\begin{bmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{n}$;

д) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n}$, $n \geq 2$; е) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^{n}$.

1.20. Вычислить степени квадратных матриц n-го порядка:

а) $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}^{k}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}^{3}$;

в) $\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \dots & \lambda_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}^{k}$; г) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}^{k}$;

д) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}^{n-1}$; е) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}^{k}$.

1.21. Пусть $x, y \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ – вектор-столбцы. Доказать, что матрица $A = xy^T$ обладает следующим свойством: найдется число $\lambda \in \mathbb{R}$ такое, что $A^k = \lambda^{k-1}A$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

1.22. Найти коммутатор матриц A и B, если:

а) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -4 \\ 3 & -5 & 1 \end{bmatrix}$;

б) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1.23. Доказать, что каждое из следующих равенств выполнено в том и только в том случае, когда матрицы A и B перестановочны:

а) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$;

б) $A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$.

1.24. Доказать, что если матрицы A и B перестановочны, то:

а) $A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2)$;

б) $(A+B)^n = A^n + C_n^1 A^{n-1} B + C_n^2 A^{n-2} B^2 + \ldots + B^n$.

1.25. Найти n-ю степень матрицы A, если матрица A равна:

а) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} -5 & -5 \\ 10 & 10 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha-1 & \alpha-1 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$;

д) $\begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 10 & 11 \end{bmatrix}$; е) $\begin{bmatrix} \alpha+1 & \alpha \\ \alpha-1 & \alpha \end{bmatrix}$; ж) $\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ -10 & -9 \end{bmatrix}$.

1.26. Вычислить матрицу $I + A + A^2 + \ldots + A^{28}$, если матрица A равна:

а) $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$.

1.27. Найти все матрицы, перестановочные с матрицей A, если:

а) $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; б) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$; в) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$;

г) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; д) A – матричная единица $E_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$;

е) A – квадратная матрица n-го порядка, все элементы которой равны единице.

1.28. Доказать, что умножение матрицы A слева на диагональную матрицу $D = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ равносильно умножению строк A соответственно на $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, умножение же A на D справа равносильно аналогичному изменению столбцов.

1.29. Найти матрицу A, если:

$$\text{а) } \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 4 & 15 \\ 6 & 18 \end{bmatrix}; \quad \text{б) } A \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 10 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}.$$

1.30. Доказать, что если A – диагональная матрица и все элементы ее главной диагонали различны между собой, то любая матрица, перестановочная с A, также диагональна.

1.31. Доказать, что квадратная матрица A перестановочна со всеми диагональными матрицами тогда и только тогда, когда она сама является диагональной.

1.32. Доказать, что квадратная матрица A перестановочна со всеми квадратными матрицами того же порядка тогда и только тогда, когда она является скалярной.

1.33. Доказать, что если матрица A перестановочна с матрицей B, то она перестановочна и с матрицей B^2. Верно ли обратное?

1.34. Пусть A – квадратная матрица и $f(x)$ и $g(x)$ – произвольные многочлены. Показать, что матрицы $f(A)$ и $g(A)$ перестановочны.

1.35. Доказать, что след матрицы обладает следующими свойствами:

а) $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$;

б) $\operatorname{tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{tr} A$;

в) $\operatorname{tr}(A^T) = \operatorname{tr} A$;

г) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, если произведения AB, BA определены.

1.36. Доказать, что для любой матрицы величина $\operatorname{tr}(A^T A)$ неотрицательна, причем равна нулю тогда и только тогда, когда матрица A нулевая.

1.36.1. Существуют ли матрицы A и B, для которых равенство $AXB = X^T$ выполняется при любой матрице $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$?

1.36.2. Можно ли свести операцию транспонирования матрицы общего вида к операциям умножения ее слева и справа на какие-либо наперед заданные матрицы?

1.37. Доказать, что для любых квадратных матриц A и B одинакового размера их коммутатор $[A, B]$ имеет нулевой след.

1.38. Доказать, что равенство $[A, B] = I$ не выполнено ни для каких вещественных матриц A и B.

1.39. Для матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ величина $r_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}$ называется ее *i-й строчной суммой*, а величина $c_j = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}$ – ее *j-й столбцовой суммой.*

а) Показать, что

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_n \end{bmatrix}.$$

б) Пусть все строчные суммы в матрице A и в матрице B одинаковы и равны соответственно α и β. Считая, что произведение AB определено, доказать, что все строчные суммы в AB также одинаковы и равны $\alpha\beta$.

в) Сформулировать и доказать столбцовый вариант утверждения пункта "б".

1.40. Доказать, что если квадратные матрицы A и B порядка n таковы, что для любого вектор-столбца $\xi \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ выполнено соотношение $A\xi = B\xi$, то $A = B$.

1.41. Доказать, что если квадратные матрицы A и B порядка n таковы, что для любых вектор-столбцов $\xi, \eta \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ выполнено соотношение $\xi^T A\eta = \xi^T B\eta$, то $A = B$.

1.42. Найти коммутатор матричных единиц E_{ij} и E_{kl} и показать, что он нулевой тогда и только тогда, когда либо $i = j = k = l$, либо $(j-k)(i-l) \neq 0$.

1.43. Доказать, что диагональная матрица с нулевым следом является линейной комбинацией коммутаторов матричных единиц.

1.44. Показать, что коммутатор обладает следующими свойствами:

а) $[A, B] = -[B, A]$; б) $[\alpha A, B] = \alpha[A, B]$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$;

в) $[A + B, C] = [A, C] + [B, C]$; г) $[A, I] = O$;

д) $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$; е) $([A, B])^T = -[A^T, B^T]$;

ж) $[[A, B], C] + [[B, C], A] + [[C, A], B] = O$ (тождество Якоби),

выполненными для любых квадратных матриц A, B, C и единичной матрицы I одного порядка.

1.45. Доказать, что равенство
$$[[A,B],C]=[A,[B,C]]$$
выполнено тогда и только тогда, когда матрицы $[A,C]$ и B перестановочны.

1.46. Доказать, что для любых матриц A, B, C второго порядка выполнено соотношение
$$[([A,B])^2,C]=O.$$

1.47. Доказать, что любая матрица с нулевым следом является суммой коммутаторов матриц с нулевым следом.

1.48. Доказать, что для любой матрицы A с нулевой главной диагональю найдутся матрица X и диагональная матрица D такая, что $[X,D]=A$.

1.49. *Произведением Йордана* $A*B$ квадратных матриц A и B одного порядка называется матрица $\frac{1}{2}(AB+BA)$. Показать, что произведение Йордана обладает следующими свойствами:

а) $A*B=B*A$; б) $(\alpha A)*B=\alpha A*B$;

в) $(A+B)*C=A*C+B*C$; г) $A*A=A^2$;

д) $A*I=A$; е) $(A*B)^T=A^T*B^T$;

ж) $(A^2*B)*A=A^2*(B*A)$,

выполненными для любых квадратных матриц A, B, C и единичной матрицы I одного порядка.

1.50. Доказать, что $(A*B)*C=A*(B*C)$ тогда и только тогда, когда матрицы $[A,C]$ и B перестановочны.

1.51. Доказать, что каждое из следующих равенств выполнено в том и только в том случае, когда матрицы $[A,B]$ и $A-B$ перестановочны:

а) $(A+B)^3=A^3+3A^2*B+3A*B^2+B^3$;

б) $A^3+B^3=(A+B)*(A^2-A*B+B^2)$.

§2. Матрицы специального вида

Квадратная матрица $A=(a_{ij})\in\mathbb{R}^{n\times n}$ называется *верхней (правой) треугольной*, если $a_{ij}=0$ при $i>j$, и *нижней (левой) треугольной*, если $a_{ij}=0$ при $i<j$.

Например, матрицы
$$\begin{bmatrix}1&1&1\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

– верхние треугольные, а матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

– нижние треугольные.

Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ называется *верхней (правой) ступенчатой*, если она обладает следующими свойствами:

1) если i-я строка нулевая, то $(i+1)$-я строка также нулевая;

2) если первые ненулевые элементы i-й и $(i+1)$-й строк расположены в столбцах с номерами k_i и k_{i+1}, то $k_i < k_{i+1}$.

Если в определении верхней ступенчатой матрицы поменять ролями строки и столбцы, то получим определение *нижней (левой) ступенчатой* матрицы.

Например, матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

– верхние ступенчатые, а матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

– нижние ступенчатые.

Очевидно, не всякая треугольная матрица имеет ступенчатую форму. Например, треугольная матрица

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

не является ступенчатой.

Ступенчатая матрица, у которой $k_i = i$, называется *трапециевидной*.

Например, матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

– верхние трапециевидные, а матрицы

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

– нижние трапециевидные.

Матрица A называется

– *симметрической*, если $A^T = A$;

– *кососимметрической*, если $A^T = -A$;

– *ортогональной*, если $A^T A = A A^T = I$;

– *нормальной*, если $A^T A = A A^T$;

– *периодической*, если при некотором $k \in \mathbb{N}$ выполнено $A^k = I$ (число k называется *периодом* матрицы A);

– *нильпотентной*, если при некотором $k \in \mathbb{N}$ выполнено $A^k = O$ (наименьшее из таких чисел k называется *индексом* нильпотентности).

Будем говорить, что некоторый класс M матриц *замкнут относительно какой-либо операции*, если результат применения этой операции к произвольным матрицам из M снова принадлежит классу M.

Разобьем матрицу $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ системой горизонтальных и вертикальных линий на клетки (блоки). *Клеточной (блочной) матрицей* называется матрица, элементами которой служат эти клетки. Общий вид клеточной матрицы:

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1k} \\ \hline A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2k} \\ \hline \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline A_{s1} & A_{s2} & \dots & A_{sk} \end{array}\right],$$

где A_{ij} – клетка, расположенная в i-й клеточной строке и в j-м клеточном столбце. Квадратная клеточная матрица $A = (A_{ij})$ с квадратными клетками на главной диагонали называется *квазидиагональной*, если $A_{ij} = O$ при $i \neq j$, и *квазитреугольной*, если $A_{ij} = O$ при $i > j$ (или $i < j$).

Например, матрицы

$$A = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{array}\right], \quad B = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

– соответственно квазитреугольная и квазидиагональная матрицы второго порядка.

ЗАДАЧИ

2.1. Показать, что множество всех верхних (нижних) треугольных матриц порядка n замкнуто относительно операций сложения матриц, умножения матрицы на число и умножения матриц.

2.2. Найти количество операций умножения, необходимых для вычисления произведения двух треугольных матриц порядка n одного вида.

2.3. Пусть $A = (a_{ij})$ – треугольная матрица n-го порядка и $k \in \mathbb{N}$. Найти $\operatorname{tr} A^k$.

2.4. Доказать, что для любой треугольной матрицы A с положительными диагональными элементами найдется треугольная матрица B того же вида с положительными диагональными элементами такая, что $B^2 = A$.

2.5. Доказать, что вещественная треугольная матрица, перестановочная со своей транспонированной, является диагональной.

2.6. Квадратная матрица A порядка n называется *ленточной*, если для некоторого числа m (меньшего $n-1$) все элементы a_{ij} с индексами, удовлетворяющими условию $|i-j|>m$, равны нулю. Число $2m+1$ называется *шириной ленты*.

Найти ширину ленты произведения ленточных матриц, если для сомножителей эта ширина равна $2m_1+1$, $2m_2+1$ соответственно и $m_1+m_2\le n-2$.

2.7. Показать, что операции сложения, умножения на число и умножения блочных матриц совершаются по тем же правилам, что и умножение обычных числовых матриц:

а) если блочные матрицы $A=(A_{ij})$ и $B=(B_{ij})$ имеют одинаковый размер и одинаковым образом разбиты на клетки, то сумме матриц A и B отвечает блочная матрица $C=(C_{ij})$ с элементами $C_{ij}=A_{ij}+B_{ij}$;

б) произведению αA отвечает блочная матрица $C=(C_{ij})$ с элементами $C_{ij}=\alpha A_{ij}$;

в) если $A=(A_{ij})$ и $B=(B_{ij})$ – две блочные матрицы, для которых определено произведение AB, и

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{ps} \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1q} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B_{s1} & B_{s2} & \dots & B_{sq} \end{bmatrix}$$

причем число столбцов блока A_{it} равно числу строк блока B_{tj} при любых i,t,j, то произведению AB соответствует блочная матрица $C=(C_{ij})$ с элементами

$$C_{ij}=\sum_{t=1}^{s} A_{it}B_{tj}.$$

2.8. Применяя описанное в предыдущей задаче правило умножения блочных матриц, вычислить

а) $\left[\begin{array}{c|cc} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ \hline 4 & -2 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{array}\right]$; б) $\left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$;

в) $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 0 \end{array}\right]$; г) $\left[\begin{array}{c|cc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right]$.

2.9. Показать, что:

а) для выполнимости клеточного умножения двух блочных квадратных матриц достаточно, чтобы диагональные клетки были квадратными, причем порядки соответствующих диагональных клеток были равны между собой. Является ли это условие необходимым?

б) для выполнимости клеточного умножения блочной матрицы на себя необходимо и достаточно, чтобы все ее диагональные клетки были квадратными.

2.10. Доказать, что множество верхних (нижних) квазитреугольных матриц одинакового порядка и одинаковой клеточной структуры замкнуто относительно умножения.

2.11. Пусть A и B – квазидиагональные матрицы одного порядка и одинаковой клеточной структуры. Доказать, что:

а) произведение AB есть квазидиагональная матрица, диагональные клетки которой равны произведениям $A_{ii}B_{ii}$ одноименных диагональных клеток сомножителей;

б) матрицы A и B перестановочны тогда и только тогда, когда перестановочны их одноименные диагональные клетки.

2.12. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ – произвольные матрицы. Доказать тождество

$$\begin{bmatrix} AB & O \\ B & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_m & A \\ O & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_m & A \\ O & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & O \\ B & BA \end{bmatrix},$$

в котором I_m и I_n – единичные матрицы порядка m и n соответственно, а символом O обозначены нулевые матрицы подходящих размеров.

2.13. Пусть A – произвольная квадратная матрица. Доказать, что симметрическая матрица, перестановочная с матрицей A, перестановочна также с матрицей A^T. Верно ли обратное: если некоторая матрица перестановочна и с A, и с A^T, то она обязательно симметрическая?

2.14. Доказать, что квадратная матрица A порядка n кососимметрическая тогда и только тогда, когда соотношение $x^T Ax = 0$ выполнено для любого вектор-столбца $x \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

2.15. Пусть матрицы A и B симметрические. Доказать, что:

а) $A + B$ и αA для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ – симметрическая матрица;

б) A^k – симметрическая матрица при любом $k \in \mathbb{N}$;

в) матрица AB является симметрической тогда и только тогда, когда матрицы A и B перестановочны.

2.16. Доказать, что если A и B – симметрические квадратные матрицы одинакового порядка, то матрица $C = (AB)^n A$ является симметрической для любого $n \in \mathbb{N}$.

2.17. Показать, что для любой матрицы A матрица AA^T является симметрической.

2.18. Пусть матрицы A и B кососимметрические. Доказать, что:

а) $A + B$ и αA для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ – кососимметрическая матрица;

б) A^k – кососимметрическая матрица при нечетном k и симметричная матрица при четном k;

в) матрица AB является симметрической тогда и только тогда, когда матрицы A и B перестановочны.

г) Сформулировать и доказать необходимое и достаточное условие кососимметричности произведения AB.

2.19. Доказать, что произведение симметрической и кососимметрической матриц является кососимметрической матрицей тогда и только тогда, когда эти матрицы перестановочны.

2.20. а) Пусть A – произвольная симметрическая матрица. Доказать, что матрица $A+A^T$ симметрическая, а матрица $A-A^T$ кососимметрическая.

б) Доказать, что любую квадратную матрицу можно разложить в сумму симметрической и кососимметрической матриц. Единственно ли такое разложение?

2.21. Разложить матрицу A в сумму симметрической и кососимметрической матриц:

а) $A=\begin{bmatrix} -2 & -7 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$; б) $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$; в) $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

2.22. Доказать, что если матрицы A и B обе симметрические или кососимметрические, то

а) их коммутатор $[A, B]$ – кососимметрическая матрица,

б) их произведение Йордана $A * B$ – симметрическая матрица.

2.23. Доказать, что всякая кососимметрическая матрица является коммутатором диагональной и симметрической матрицы.

2.24. а) Пусть A – симметрическая матрица. Доказать, что величина $\operatorname{tr} A^2$ неотрицательна, причем равна нулю тогда и только тогда, когда матрица A нулевая.

б) Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для кососимметрических матриц.

2.25. Пусть A и B – симметрические матрицы одного порядка. Доказать, что выполнено неравенство

$$\operatorname{tr}(AB)^2 \leq \operatorname{tr}(A^2B^2),$$

которое переходит в равенство тогда и только тогда, когда матрицы A и B перестановочны.

2.26. Доказать, что если симметрическая матрица A нильпотентна с индексом нильпотентности, равным двум, то A – нулевая. Верно ли данное утверждение для кососимметрической матрицы A?

2.27. Найти:

а) все ортогональные матрицы второго порядка;

б) все симметрические ортогональные и кососимметрические ортогональные матрицы второго порядка.

2.28. Пусть вектор-столбец x удовлетворяет условию $x^T x = 1$. Доказать, что матрица $U = I - 2xx^T$ является одновременно симметрической и ортогональной.

2.29. Доказать, что множество ортогональных матриц одного порядка замкнуто относительно операции умножения матриц.

2.30. Показать, что матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ортогональна тогда и только тогда, когда для ее строк (столбцов) имеет место соотношение

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} = \delta_{ij} \quad \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = \delta_{ij}\right).$$

2.31. Доказать, что вещественная треугольная матрица ортогональна тогда и только тогда, когда она диагональна, причем элементы ее главной диагонали равны 1 или -1.

2.32. Доказать, что блочная матрица $\begin{bmatrix} I & A \\ A & -I \end{bmatrix}$, в которой матрица A и единичная матрица I – квадратные одного порядка, ортогональна в том и только в том случае, когда $A = O$.

2.33. Выяснить, являются ли следующие матрицы нильпотентными и, если да, то найти их индексы нильпотентности k:

а) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

д) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 8 & 4 & 8 \\ -6 & -3 & -6 \end{bmatrix}$; е) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -6 & -12 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; ж) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2.34. Доказать, что сумма и произведение двух перестановочных нильпотентных матриц является нильпотентной матрицей. Верно ли это утверждение, если матрицы не перестановочны?

2.35.[1] Найти все нильпотентные матрицы второго порядка с индексом нильпотентности 2.

2.36. Доказать, что треугольная матрица нильпотентна тогда и только тогда, когда ее главная диагональ нулевая.

2.37. Квадратная матрица A называется *строго верхней (нижней) треугольной*, если $a_{ij} = 0$ при $i \geq j$ $(i \leq j)$. Доказать, что:

а) для произведения B двух строго треугольных матриц одного вида выполнено условие $b_{ij} = 0$ при $i \geq j - 1$ $(i \leq j + 1)$;

б) строго треугольная матрица A нильпотентна, причем ее индекс нильпотентности не превосходит порядка этой матрицы.

2.38. Доказать, что коммутатор треугольных матриц одного вида является нильпотентной матрицей.

2.39. Показать, что квазитреугольная матрица нильпотентна тогда и только тогда, когда нильпотентны все ее клетки на главной клеточной диагонали.

2.40. Доказать, что блочная матрица $\begin{bmatrix} I & A \\ A & -I \end{bmatrix}$, в которой матрица A и единичная матрица I – квадратные одного порядка, нильпотентна в том и только в том случае, когда нильпотентна матрица $I + A^2$.

2.41.[2] Найти все периодические матрицы второго порядка с периодом, равным двум.

2.42. Доказать, что произведение двух перестановочных периодических матриц является периодической матрицей. Верно ли это утверждение, если матрицы не перестановочны?

2.43. Доказать, что если $A^m + A^{m-1} + \ldots + A + I = O$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$, то матрица A периодическая.

2.44. Доказать, что блочная матрица $\begin{bmatrix} I & A \\ A & -I \end{bmatrix}$, в которой

[1] См. также задачи 8.1, 16.56.

[2] См. также задачи 9.61, 16.57.

матрица A и единичная матрица I – квадратные одного порядка, периодическая в том и только в том случае, когда матрица $I+A^2$ является периодической.

2.45. *Экспонентой матрицы* A (по аналогии с экспонентой числа) называют сумму ряда

$$\exp A = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k. \tag{2.1}$$

Сходимость ряда в (2.1) понимается как сходимость рядов, получающихся при вычислении каждого элемента матрицы – суммы ряда в правой части.

а) Пользуясь признаком сравнения, доказать абсолютную сходимость ряда (2.1) для любой квадратной матрицы A.

б) Показать, что если $A = \alpha I$ – скалярная матрица, то $\exp A = e^{\alpha} I$.

в) Показать, что $(\exp A)^T = \exp(A^T)$.

2.46. Вычислить $\exp A$, если

а) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$; б) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2.47. Доказать, что если A – диагональная матрица, то $\exp A$ также диагональна, причем если $A = \mathrm{diag}\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, то

$$\exp A = \mathrm{diag}\{e^{\alpha_1}, \ldots, e^{\alpha_n}\}.$$

2.48. Доказать, что если $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, то для любого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\exp(\alpha A) = \cos\alpha \cdot I + \sin\alpha \cdot A.$$

2.49. Доказать, что если A – периодическая матрица с периодом 2, то для любого $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\exp(\alpha A) = \mathrm{ch}\,\alpha \cdot I + \mathrm{sh}\,\alpha \cdot A.$$

2.50. Доказать, что если матрицы A и B перестановочны, то

$$\exp(A+B) = \exp A \cdot \exp B.$$

2.51. Квадратная матрица A с неотрицательными элементами называется *стохастической*, если все ее строчные суммы равны 1. Если же при этом еще и каждая столбцовая сумма также равна 1, то матрица называется *дважды стохастической.* Доказать, что:

а) произведение стохастических матриц является стохастической матрицей;

б) произведение дважды стохастических матриц является дважды стохастической матрицей.

2.52. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $B \in \mathbb{R}^{k\times l}$ – произвольные матрицы. *Кронекеровым произведением* $A \otimes B$ матриц A и B называется матрица $C \in \mathbb{R}^{mk\times nl}$, имеющая следующий клеточный вид:

$$C = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix}.$$

Доказать, что кронекерово произведение обладает следующими свойствами:

а) $(\alpha A)\otimes B = A\otimes(\alpha B) = \alpha(A\otimes B)$;

б) $(A+B)\otimes C = A\otimes C + B\otimes C$; в) $(A\otimes B)\otimes C = A\otimes(B\otimes C)$;

г) $A\otimes(B+C) = A\otimes B + A\otimes C$; д) $(A\otimes B)^T = A^T\otimes B^T$;

е) $(AB)\otimes(CD) = (A\otimes C)(B\otimes D)$,

выполненными для любых матриц A, B, C (в последнем соотношении дополнительно предполагается, что произведения AB и CD определены).

2.53. Вычислить кронекерово произведение матриц:

а) $A\otimes B$ и $B\otimes A$, если $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$;

б) $A\otimes B$ и $B\otimes A$, если $A = [1\ \ 2\ \ 3]$, $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$;

в) $A\otimes B$ и $B\otimes A$, если $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

2.54. Доказать, что кронекерово произведение вектор-строки a на вектор-столбец b коммутативно и равно обычному произведению ba.

2.55. Доказать, что кронекерово произведение квадратных матриц A и B (быть может, разных порядков) является:

а) нулевой матрицей тогда и только тогда, когда одна из матриц A или B нулевая;

б) единичной матрицей I_{nm} тогда и только тогда, когда $A = \lambda I_n$ и $B = \lambda^{-1} I_m$ для некоторого $\lambda \neq 0$;

в) диагональной матрицей тогда и только тогда, когда A и B – диагональные;

г) треугольной матрицей тогда и только тогда, когда либо A и B – обе треугольные одного вида, либо A – строго треугольная матрица.

2.56. Доказать, что если A и B обе симметрические или кососимметрические матрицы, то их кронекерово произведение $A \otimes B$ – симметрическая матрица. Верно ли обратное?

2.57. Доказать, что если A и B ортогональны, то их кронекерово произведение $A \otimes B$ – также ортогональная матрица. Верно ли обратное?

2.58. Доказать, что если A и B – стохастические (дважды стохастические) матрицы, то их кронекерово произведение $A \otimes B$ также является стохастической (дважды стохастической) матрицей. Верно ли обратное?

2.59. Доказать, что кронекерово произведение $A \otimes B$ – нильпотентная матрица тогда и только тогда, когда одна из матриц A или B нильпотентна.

2.60. Доказать, что кронекерово произведение $A \otimes B$ – периодическая матрица тогда и только тогда, когда для некоторых $k \in \mathbb{N}$ и $\lambda \neq 0$ матрицы λA^k и $\lambda^{-1} B^k$ единичные.

2.61. Доказать, что след кронекерова произведения квадратных матриц равен произведению следов сомножителей.

2.62. Пусть $\mathcal{D}^{m\times n}$ – множество всех матриц $A = A(t) = (a_{ij}(t))$ размера $m \times n$, элементами $a_{ij}(t)$ которых являются дифференцируемые функции действительной переменной t. *Производной матрицы* $A = A(t)$ называется матрица $\dfrac{dA}{dt} = (a'_{ij}(t))$ размера $m \times n$. Доказать, что:

а) $\dfrac{d}{dt}(\alpha A) = \alpha \dfrac{dA}{dt}$; б) $\dfrac{d}{dt}(A + B) = \dfrac{dA}{dt} + \dfrac{dB}{dt}$;

в) $\dfrac{d}{dt}(AB) = \dfrac{dA}{dt}B + A\dfrac{dB}{dt}$; г) $\dfrac{d}{dt}(A^T) = \left(\dfrac{dA}{dt}\right)^T$;

д) $\dfrac{d}{dt}[A, B] = [\dfrac{dA}{dt}, B] + [A, \dfrac{dB}{dt}]$;

е) $\dfrac{d}{dt}(A \otimes B) = \dfrac{dA}{dt} \otimes B + A \otimes \dfrac{dB}{dt}$;

ж) $\dfrac{d}{dt}(A * B) = \dfrac{dA}{dt} * B + A * \dfrac{dB}{dt}$.

2.63. Доказать, что если матрица A не зависит от t, то

$$\frac{d}{dt}\exp(tA) = A\exp(tA).$$

2.64. Доказать, что равенство $\dfrac{d}{dt}(A^2) = 2A\dfrac{dA}{dt}$ выполнено тогда и только тогда, когда матрицы $\dfrac{dA}{dt}$ и A перестановочны.

2.65. Пусть $f(x)$ – многочлен, а матрицы A и $\dfrac{dA}{dt}$ перестановочны. Доказать, что $\dfrac{d}{dt}f(A) = f'(A)\dfrac{dA}{dt}$.

§3. Элементарные преобразования матриц

Приведение матрицы к ступенчатой форме. *Элементарными преобразованиями матрицы* называются преобразования следующих типов:

1) перестановка двух строк (столбцов) матрицы;

2) умножение строки (столбца) матрицы на число, отличное от нуля;

3) прибавление к одной строке (столбцу) матрицы другой ее строки (соответственно столбца), умноженной на любое число.

Теорема 3.1 (об основном процессе). *Произвольная ненулевая матрица конечным числом элементарных преобразований только строк первого и третьего типов может быть приведена к верхней ступенчатой форме.*

Доказательство ([9]) этой теоремы представляет собой описание процесса, приводящего ненулевую матрицу к искомому виду. Проиллюстрируем его на конкретном примере.

Пример 3.1. Приведем матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & -4 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 9 & -6 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

элементарными преобразованиями только строк к верхней ступенчатой форме.

Первый шаг. а) Первым ненулевым столбцом в матрице A является 1-й столбец. Поэтому ведущим элементом первого шага должен быть ненулевой элемент в позиции (1,1). В матрице A элемент $a_{11} = 0$ и он не может быть ведущим, поэтому поменяем местами первую и третью строки (можно было бы первую строку переставить со второй, однако, как будет видно в п. "б", выбор третьей строки упрощает ручные вычисления), при этом

$$A \longrightarrow A_1 = \begin{bmatrix} \boxed{3} & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 6 & -4 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

б) Аннулируем поддиагональные элементы первого столбца, для чего из второй и четвертой строк вычтем первую строку, умноженную соответственно на 2 и на 3 (отметим, что выбранный ведущий элемент является делителем аннулируемых элементов, и это освобождает преобразования от дробных вычислений), при этом

$$A_1 \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 & -10 & -2 \end{bmatrix}.$$

Второй шаг состоит в применении первого шага к матрице

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -12 & -10 & -2 \end{bmatrix}.$$

Так как первым ненулевым столбцом в матрице A_2 является второй столбец, то ведущий элемент следует искать во втором столбце и, хотя $a_{12} = -6 \neq 0$, удобней всего в качестве ведущего элемента выбрать элемент, равный 1 (ибо 1 является делителем любого числа), поэтому переставив местами 1-ю и 2-ю строки, получим

$$A_2 \longrightarrow A_3 = \begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & -12 & -10 & -2 \end{bmatrix}.$$

Вычитая из 3-й строки удвоенную 2-ю строку и прибавляя ко 2-й строке 1-ю строку, умноженную на 6, получим

$$A_3 \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Все использованные преобразования строк матрицы A_2 можно рассматривать как преобразования строк исходной матрицы, так что если опустить все комментарии, то цепочка преобразований матрицы A, приводящая ее к верхней ступенчатой форме, примет вид:

$$A \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 6 & -4 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 9 & -6 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -12 & -10 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & -12 & -10 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отметим, что в описанном процессе использовались элементарные преобразования *только строк* матрицы.

Процесс приведения матрицы к ступенчатой форме будем называть *основным процессом.*

1. Квадратная матрица с помощью основного процесса приводится к треугольной форме.

2. Если в основном процессе поменять ролями строки и столбцы, то матрица A приведется к нижней ступенчатой форме.

3. В ручных вычислениях во избежание больших чисел целесообразно в основном процессе использовать элементарные преобразования строк второго типа: сокращать все элементы на общий множитель.

4. Во избежание дробных чисел в ручных вычислениях удобно также в качестве ведущего элемента выбирать элемент, равный единице. Если такого элемента нет, то, как правило, его можно получить, используя элементарные преобразования строк и перестановки столбцов.

Теорема 3.2. *Произвольная ненулевая матрица конечным числом элементарных преобразований только строк (только столбцов) и пе-*

рестановками столбцов (строк) приводится к верхней (нижней) трапециевидной форме.

Для приведения матрицы к верхней трапециевидной форме нужно сначала привести ее к верхнему ступенчатому виду, а затем переставить столбцы так, чтобы ведущие элементы оказались на главной диагонали.

Пример 3.2. Приведем матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & -4 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 9 & -6 & 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

к верхней трапециевидной форме. Для этого приведем ее к верхней ступенчатой форме (см. пример 3.1):

$$A \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

и в получившейся матрице переставим местами столбцы так, чтобы 3-й столбец оказался на месте 2-го, а 4-й — на месте 3-го:

$$A \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 5 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Квадратные матрицы D_i, P_{ij}, L_{ij} следующего вида

$$\begin{array}{cc} D_i = \begin{bmatrix} 1 & & & \cdot & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \alpha & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & \cdot & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \quad\quad\quad\quad\quad i & \end{array} , \quad \alpha \neq 0,$$

$$\begin{array}{cc} P_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & \cdot & & \cdot & & & \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots & & & \\ & & 1 & \cdot & & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & & \cdot & 1 & & \\ & & & \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ & & & \cdot & & \cdot & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \quad\quad\quad\quad\quad i \quad\quad j & \end{array} ,$$

$$\begin{array}{cc} L_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & & & \cdot & & \cdot & & & \\ & \ddots & & \vdots & & \vdots & & & \\ & & 1 & \cdot & & \cdot & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \vdots & \ddots & \vdots & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \beta & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & & \cdot & 1 & & \\ & & & \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ & & & \cdot & & \cdot & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \quad\quad\quad\quad\quad i \quad\quad j & \end{array} , \quad \forall \beta \in \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

в которых все диагональные элементы, кроме указанных, равны единице, а все внедиагональные элементы, кроме указанных, равны нулю, называются *матрицами элементарных преобразований.*

Теорема 3.3. *Умножение матрицы A на матрицы элементарных преобразований P_{ij}, D_i, L_{ij} справа равносильно элементарным преобразованиям столбцов матрицы A первого, второго и третьего типов соответственно, а умножение слева на матрицы P_{ij}, D_i, L_{ij}^T – аналогичным элементарным преобразованиям строк.*

В свете этой теоремы можно по-иному сформулировать теорему 3.1: *для любой ненулевой матрицы A существуют матрицы элементарных преобразований $T_1, \ldots, T_k$ такие, что произведение $T_k \ldots T_1 A$ имеет верхнюю ступенчатую форму.*

ЗАДАЧИ

3.1. Привести матрицу к верхней ступенчатой форме, используя элементарные преобразования ее строк :

$$\text{а)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & -9 \\ 2 & 3 & 4 & -2 & -6 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & -1 & -14 \end{bmatrix}; \quad \text{б)} \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 & 5 & 10 \\ 2 & -2 & 3 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -6 & 4 & -6 \end{bmatrix};$$

$$\text{в)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & -1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{г)} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}; \quad \text{д)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -9 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3.2. Указать матрицу элементарного преобразования T такую, что матрица TA получается из матрицы A:

а) перестановкой двух первых строк A;

б) прибавлением 1-ой строки A к ее 3-ей строке;

в) вычитанием из 2-ой строки A ее удвоенной 1-ой строки.

3.3. Указать матрицу элементарного преобразования T такую, что матрица AT получается из матрицы A:

а) перестановкой первого и последнего столбцов A;

б) прибавлением к 1-ому столбцу A утроенного 3-его столбца;

в) удвоением 2-ого столбца A.

3.4. Пусть A и B таковы, что определено произведение AB. Доказать, что:

а) при перестановке двух строк матрицы A соответствующие строки в AB также переставляются;

б) если k-ю строку матрицы A умножить на число α, то k-я строка AB также умножится на α;

в) если к k-й строке матрицы A прибавить ее j-ю строку, умноженную на β, то с матрицей AB произойдет то же элементарное преобразование.

Сформулировать и доказать аналогичные утверждения для столбцов.

3.5. Матрица A_1 получена из A одним из следующих преобразований:

а) переставлены 1-ая и 2-ая строки;

б) утроена 2-ая строка;

в) от 1-ой строки отнята удвоенная 3-ья строка.

В каждом случае указать, как связаны между собой матрицы B и B_1, если имеет место равенство $BA_1 = B_1A$.

3.6. В матрице A выполнено одно из следующих преобразований:

а) переставлены 1-ый и 2-ой столбцы;

б) удвоен 1-ый столбец;

в) ко 2-ому столбцу прибавлен удвоенный 1-ый столбец.

В каждом случае указать, какое преобразование следует сделать с матрицей B так, чтобы произведение AB не изменилось.

3.7. Указать матрицу S такую, что матрица SA получается из A:

а) расположением строк A в обратном порядке;

б) прибавлением к первой строке A ее остальных строк;

в) последовательным вычитанием из каждой строки A, начиная со второй, предыдущей строки;

г) последовательным прибавлением к каждой строке A, начиная с предпоследней, всех последующих строк.

3.8. Указать матрицу S такую, что матрица AS получается из A:

а) прибавлением к каждому столбцу A, начиная со второго, первого столбца;

б) вычитанием из второго столбца A каждого столбца матрицы A, умноженного на его номер;

в) последовательным прибавлением к каждому столбцу A, начиная с предпоследнего, последующего столбца;

г) последовательным вычитанием из каждого столбца A, начиная со второго, удвоенного предыдущего.

3.8.1. Можно ли операцию транспонирования матрицы общего вида свести к элементарным преобразованиям ее строк и столбцов?

3.9. *Матрицей перестановки* P называется квадратная матрица, у которой в каждой строке и в каждом столбце ровно один элемент отличен от нуля и равен 1. Найти все матрицы перестановок третьего порядка.

3.10. Доказать, что множество матриц перестановок одного порядка замкнуто относительно операции умножения матриц.

3.11. Доказать, что всякая матрица перестановки является произведением матриц P_{ij} элементарных преобразований первого типа.

3.12. Доказать, что матрицы перестановок ортогональны.

3.13. Доказать, что стохастическая матрица является ортогональной тогда и только тогда, когда она является матрицей перестановки.

3.14. Доказать, что линейная комбинация матриц перестановок с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, удовлетворяющими условиям $\alpha_j \geq 0, \forall j = \overline{1, k}, \sum\limits_{j=1}^{k} \alpha_j = 1$, является дважды стохастической матрицей.

3.15. Доказать, что матрицы перестановок периодичны.

3.16. Доказать, что если один из столбцов матрицы A является линейной комбинацией других столбцов, то существует ненулевой вектор-столбец b такой, что $Ab = 0$. Сформулировать строчный вариант этой задачи.

3.17. Доказать, что если одна из строк матрицы A является линейной комбинацией других строк, то существует ненулевая матрица B такая, что $BA = O$. Сформулировать столбцовый вариант этой задачи.

3.18. Пусть L – одна из матриц элементарных преобразований. Какому преобразованию строк и столбцов матрицы A приводит умножение $L^T AL$?

3.19. Доказать, что:

а) перестановка двух строк (столбцов) матрицы может быть осуществлена последовательным выполнением элементарных преобразований строк (соответственно столбцов) второго и третьего типов;

б) каждая матрица P_{ij} элементарного преобразования первого типа может быть представлена в виде произведения матриц элементарных преобразований второго и третьего типов.

3.20. Используя свойства матриц элементарных преобразований, найти произведение:

$$\text{а)}\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{б)}\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix};$$

$$\text{в)}\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{г)}\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

3.21. При каком условии матрицы P_{ij} и P_{kl} элементарных преобразований первого типа перестановочны?

3.22. При каком условии матрицы L_{ij} и L_{kl} элементарных преобразований третьего типа с ненулевыми коэффициентами β' и β'' соответственно перестановочны?

3.23. По аналогии с элементарными преобразованиями строк и столбцов числовой матрицы можно ввести и элементарные преобразования блочной матрицы. Будем считать, что клетка A_{ij} блочной матрицы $A = (A_{ij})$, $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,s}$, имеет размер $m_i \times n_j$. *Элементарными преобразованиями* блочной матрицы A будем называть преобразования следующих типов:

1) перестановка двух блочных строк (столбцов) матрицы;

2) умножение всех клеток i-й строки слева на квадратную матрицу D порядка m_i или умножение всех клеток j-го столбца справа на квадратную матрицу D порядка n_j;

3) прибавление к каждой клетке i-й строки соответствующей клетки другой k-й строки, умноженной слева на матрицу B размера $m_i \times m_k$, или прибавление к каждой клетке j-го столбца соответствующей клетки другого l-го столбца, умноженной справа на матрицу B размера $n_l \times n_j$.

Доказать, что:

а) любое элементарное преобразование строк (столбцов) блочной матрицы равносильно ее умножению слева (соответственно справа) на некоторую квадратную матрицу;

б) элементарные преобразования блочной матрицы первого и третьего типов равносильны суперпозиции обычных элементарных преобразований.

Глава II. **Определители**

§4. Перестановки

Упорядоченная совокупность чисел α_1, α_2, ..., α_n, в которой

1) $\alpha_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\quad i = \overline{1, n}$; $\quad$ 2) $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$,

называется *перестановкой* из чисел $1, 2, \ldots, n$.

Перестановка $1, 2, \ldots, n$ называется *натуральной*.

Аналогично рассматриваются перестановки из n произвольных символов: достаточно перенумеровать эти символы и иметь дело с их номерами $1, 2, \ldots, n$.

Преобразование перестановки, при котором два ее числа α_i и α_j с номерами $i \neq j$ меняются местами, называется *транспозицией*.

Говорят, что два числа α_i и α_j в перестановке $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ образуют *инверсию (беспорядок)*, если большее из них предшествует меньшему, т.е. если $\alpha_i > \alpha_j$ при $i < j$, и *порядок* – в противном случае, т.е. если $\alpha_i < \alpha_j$ при $i < j$. Перестановка называется *четной*, если общее число инверсий в ней четно, и *нечетной*, если нечетно. Общее число инверсий в перестановке $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ обозначается символами $\sigma(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ или $\sigma(\alpha)$.

Пример 4.1. Найдем общее число инверсий в перестановке $4, 3, 5, 1, 2$.

Решение. Число 4 образует три инверсии с числами 3, 1 и 2; число 3 – две инверсии с числами 1 и 2 (пара (4,3) уже была рассмотрена); число 5 – две инверсии с числами 1 и 2; пара (1,2) не образует инверсию. Таким образом, $\sigma(4, 3, 5, 1, 2) = 3 + 2 + 2 = 7$.

Запишем количество инверсий, которые образует каждое число в перестановке с последующими, под этим числом:

$$\begin{array}{ccccc} 4, & 3, & 5, & 1, & 2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 3 & 2 & 2 & 0 & \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \sigma(4, 3, 5, 1, 2) = 3 + 2 + 2 + 0 = 7. \quad \blacksquare$$

Пример 4.2. Определим четность перестановки

$$3, 6, 9, \ldots, 3n, 2, 5, 8, \ldots, 3n - 1, 1, 4, 7, \ldots, 3n - 2.$$

Решение. Данная перестановка из $3n$ чисел разбивается на три последовательные группы из n чисел. Внутри каждой из групп инверсий нет. При этом

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 3, & 6, & 9, & \ldots, & 3n, & 2, & 5, & 8, & \ldots, & 3n-1, & 1, & 4, & 7, & \ldots, & 3n-2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ 2 & 4 & 6 & & 2n & 1 & 2 & 3 & & n & 0 & 0 & 0 & & \end{array}$$

$$\Longrightarrow \sigma(\alpha) = (2 + 4 + 6 + \ldots + 2n) + (1 + 2 + 3 + \ldots + n) = 3n(n + 1)/2.$$

Четность $3n(n + 1)/2$ определяется четностью числа $n(n + 1)/2$, которое четно при $n = 4k$ и $n = 4k + 2$, $k \in \mathbb{N}$, и нечетно при $n = 4k + 1$ и $n = 4k + 3$, $k \in \mathbb{N}$. Таким образом, данная перестановка четна для тех n, которые при делении на 4 дают четные остатки, и нечетна в противном случае. $\blacksquare$

Теорема 4.1. *Число всевозможных перестановок из n чисел равно $n!$.*

Теорема 4.2. *Каждая транспозиция меняет четность перестановки.*

Теорема 4.3. *Все $n!$ перестановок из n чисел могут быть упорядочены так, чтобы каждая последующая отличалась от предыдущей на одну транспозицию, причем начинать это упорядочение можно с любой перестановки.*

Следствие 1. *При $n \geq 2$ число четных перестановок равно числу нечетных.*

Следствие 2. *От каждой перестановки из n чисел можно перейти к любой другой перестановке из этих же чисел при помощи конечного числа транспозиций.*

Теорема 4.4. *Если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ – перестановка из первых n натуральных чисел с числом инверсий s, то после преобразования ее в натуральную перестановку индексные номера $1, 2, \ldots, n$ образуют новую перестановку с тем же числом инверсий s.*

Проиллюстрируем утверждение теоремы на примере перестановки $4, 3, 5, 1, 2$. В этой перестановке $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 5$, $\alpha_4 = 1$, $\alpha_5 = 2$. После преобразования перестановки в натуральную получим перестановку $1, 2, 3, 4, 5$, т.е. $\alpha_4, \alpha_5, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_3$, при этом перестановка из индексных номеров будет иметь вид $4, 5, 2, 1, 3$. Осталось проверить, что $\sigma(4, 3, 5, 1, 2) = 7$ и $\sigma(4, 5, 2, 1, 3) = 7$.

ЗАДАЧИ

4.1. Выписать транспозиции, посредством которых от натуральной перестановки можно перейти:

а) к перестановке $3, 5, 4, 1, 2$; б) к перестановке $5, 4, 3, 2, 1$.

4.2. Определить общее число инверсий в перестановках:

а) $3, 1, 4, 5, 2$; б) $3, 7, 4, 1, 5, 2, 6$;
в) $1, 6, 9, 4, 2, 5, 3, 8, 7$; г) $4, 7, 1, 3, 2, 6, 5$;
д) $1, 3, 5, \ldots, 2n-1, 2, 4, 6, \ldots, 2n$;
е) $2, 4, 6, \ldots, 2n, 1, 3, 5, \ldots, 2n-1$;
ж) $k, k+1, \ldots, n, 1, 2, \ldots, k-2, k-1$;
з) $k, k+1, \ldots, n, k-1, k-2, \ldots, 2, 1$.

4.3. Найти i и k, при которых указанная перестановка является четной:

а) $2, 4, 1, i, 6, 9, k, 7, 5$; б) $8, 1, 6, i, 3, 7, k, 4, 2$.

4.4. В перестановке $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ имеется p инверсий, причем известно, что первый и последний ее элементы образуют с остальными элементами суммарно s инверсий. Сколько инверсий станет в этой перестановке, если поменять местами первый и последний ее элементы?

4.5. В перестановке $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ имеется p инверсий. Сколько инверсий будет в перестановке $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_2, \alpha_1$?

4.6. Какая перестановка из первых n натуральных чисел имеет наибольшее число инверсий? Чему оно равно?

4.7. Сколько инверсий образует число 1, стоящее на k-м месте перестановки?

4.8. Сколько инверсий образует число n, стоящее на k-м месте в перестановке из первых n натуральных чисел?

4.8.1. Сколько инверсий образует число k $(1 \leq k \leq n)$, стоящее в перестановке из первых n натуральных чисел:

а) на первом месте; б) на последнем месте?

4.8.2. Указать количество всех перестановок n-го порядка, в которых первый и последний элементы образуют инверсию.

4.9. В указанных перестановках определить общее число инверсий и выяснить, при каких n эти перестановки нечетные:

а) $1, 4, 7, \ldots, 3n-2, 2, 5, 8, \ldots, 3n-1, 3, 6, 9, \ldots, 3n$;

б) $2, 5, 8, \ldots, 3n-1, 3, 6, 9, \ldots, 3n, 1, 4, 7, \ldots, 3n-2$;

в) $1, 5, \ldots, 4n-3, 2, 6, \ldots, 4n-2, 3, 7, \ldots, 4n-1, 4, 8, \ldots, 4n$;

г) $1, 5, \ldots, 4n-3, 3, 7, \ldots, 4n-1, 2, 6, \ldots, 4n-2, 4, 8, \ldots, 4n$;

д) $4n, 4n-4, \ldots, 8, 4, 4n-1, 4n-5, \ldots, 7, 3, 4n-2, 4n-6, \ldots, 6, 2, 4n-3, 4n-7, \ldots, 5, 1$.

4.10. Чему равна сумма числа инверсий и числа порядков в любой перестановке первых n натуральных чисел?

4.11. Для каких значений n четность числа инверсий и числа порядков во всех перестановках из первых n натуральных чисел одинакова и для каких противоположна?

4.12. Доказать, что для любого $k \in \mathbb{Z}$: $0 \leq k \leq n(n-1)/2$ существует перестановка из первых n натуральных чисел, число инверсий которой равно k.

4.12.1. Пусть в перестановке из первых n натуральных чисел имеется k инверсий. Доказать, что ее можно привести к натуральной, используя не более, чем k транспозиций.

4.13. Определить четность перестановки букв в слове *анкор*, если за исходное принять их расположение в словах:

1) *крона*; 2) *норка*; 3) *коран*.

§5. Простейшие свойства определителя

Определителем (*детерминантом*) квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ *n-го порядка* называется сумма всевозможных произведений $a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\dots a_{n\alpha_n}$ элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца, причем если сомножители в этом произведении упорядочены в порядке возрастания номеров строк, то оно берется со знаком $(-1)^{\sigma(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)}$.

Для обозначения определителя приняты символы $|A|$, $\det A$. Итак,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n)} (-1)^{\sigma(\alpha)} a_{1\alpha_1}a_{2\alpha_2}\dots a_{n\alpha_n}, \qquad (5.1)$$

где суммирование ведется по всевозможным перестановкам $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ из чисел $1, 2, \dots, n$.

Каждое произведение в сумме (5.1) называется *членом определителя*, а число $(-1)^{\sigma(\alpha)}$ – его *знаком*.

Из свойств перестановки следует, что число всевозможных членов определителя n-го порядка равно $n!$ и что при $n \geq 2$ число положительных членов равно числу отрицательных и равно $n!/2$.

Пример 5.1. Показать, что определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов.

Решение. Рассмотрим случай верхней треугольной матрицы

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Переберем все возможные нетривиальные члены $\det A$. Из 1-го столбца в такой член может войти только a_{11}, так как остальные элементы 1-го столбца равны нулю. Вместе с a_{11} в одно произведение с ним не может войти ни один другой элемент 1-й строки, поэтому из 2-го столбца вместе с a_{11} может быть взят только элемент a_{22}. Теперь уже вместе с $a_{11}a_{22}$ не может войти в одно произведение ни один другой элемент первых двух строк, так что из 3-го столбца вместе с $a_{11}a_{22}$ может быть взят только a_{33}, и т.д. Таким образом,

$$|A| = (-1)^{\sigma(1,2,\dots,n)} a_{11}a_{22}\dots a_{nn}, \quad \text{т.е. } |A| = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}. \quad \blacksquare$$

Пример 5.2. Найти i и k такие, что произведение $a_{32}a_{i3}a_{41}a_{14}a_{65}a_{k6}$ входит в определитель 6-го порядка со знаком плюс.

Решение. Возможны два случая: $i = 2, k = 5$ и $i = 5, k = 2$. В первом случае данное произведение после упорядочения сомножителей в порядка возрастания номеров строк совпадает с произведением $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}a_{56}a_{65}$, при этом $\sigma(4,3,2,1,6,5) = 3+2+1+1 = 7$. Во втором случае перестановка номеров столбцов будет четной, так как отличается от рассмотренной перестановки одной транспозицией. Следовательно, $i = 5, k = 2$. ■

Свойства определителя. **Свойство 1.** *Определитель квадратной матрицы не изменяется при ее транспонировании:* $|A| = |A^T|$, *т.е. в* *определении (5.1) определителя можно поменять ролями строки и столбцы:*

$$|A| = \sum_{\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_n)} (-1)^{\sigma(\beta)} a_{\beta_1 1} a_{\beta_2 2} \ldots a_{\beta_n n}.$$

Свойство 2. *Если одна из строк (столбцов) матрицы целиком состоит из нулей, то ее определитель равен нулю.*

Свойство 3. *При умножении строки (столбца) матрицы на число ее определитель умножается на это число.*

Свойство 4. *Если каждый элемент некоторой строки матрицы представлен в виде суммы двух слагаемых:*

$$a_{ik} = b_k + c_k, \quad k = \overline{1, n},$$

то определитель матрицы можно представить в виде суммы двух определителей:

$$\begin{vmatrix} a_1' \\ \vdots \\ b' + c' \\ \vdots \\ a_n' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1' \\ \vdots \\ b' \\ \vdots \\ a_n' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1' \\ \vdots \\ c' \\ \vdots \\ a_n' \end{vmatrix},$$

где $b' = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, $c' = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$.

Свойство 5. *При перестановке местами двух строк (столбцов) матрицы ее определитель меняет знак.*

Свойство 6. *Определитель матрицы, имеющей две одинаковые строки (столбца), равен нулю.*

Свойство 7. *Если одна строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией других ее строк (столбцов), то определитель матрицы равен нулю.*

Свойство 8. *Если к какой-либо строке (столбцу) матрицы прибавить линейную комбинацию других ее строк (столбцов), то ее определитель не изменится.*

Пример 5.3. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, тогда $|-A| = (-1)^n |A|$, так как матрица $-A$ может быть получена умножением каждой строки матрицы A на -1.

Пример 5.4. $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \sin^2\beta & \sin^2\gamma \\ \cos^2\alpha & \cos^2\beta & \cos^2\gamma \\ \cos 2\alpha & \cos 2\beta & \cos 2\gamma \end{vmatrix} = 0$, так как 3-я строка является линейной комбинацией первых двух строк.

Пример 5.5. Показать, что определитель кососимметрической матрицы нечетного порядка равен нулю.

Решение. Так как $A^T = -A$, то $|A^T| = |-A|$. Отсюда (см. свойство 1 и пример 5.3) следует, что $|A| = (-1)^n |A|$. Так как n – нечетно, то $|A| = -|A|$, т.е. $|A| = 0$. ■

Пример 5.6. Исследовать, как изменится определитель матрицы, если к его 1-й строке прибавить все строки.

Решение. Прибавление к 1-й строке всех строк, начиная по 2-й, не изменит определителя (свойство 8), а прибавление к ней 1-й строки равносильно умножению 1-й строки на 2. Согласно свойству 3 определитель удвоится. ■

ЗАДАЧИ

Вычислить определители второго порядка.

5.1. $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}$. **5.2.** $\begin{vmatrix} 2001 & 2002 \\ 2000 & 2001 \end{vmatrix}$. **5.3.** $\begin{vmatrix} 1935 & 1965 \\ 2035 & 2065 \end{vmatrix}$.

5.4. $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$. **5.5.** $\begin{vmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{vmatrix}$. **5.6.** $\begin{vmatrix} \log_a b & 1 \\ 1 & \log_b a \end{vmatrix}$.

5.7. $\begin{vmatrix} a^2+ab+b^2 & a^2-ab+b^2 \\ a+b & a-b \end{vmatrix}$. **5.8.** $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$.

5.9. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$. **5.10.** $\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ \sin\alpha & \sin\beta \end{vmatrix}$.

5.11. Доказать тождество

$$\begin{vmatrix} a & b \\ y & x \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x & -a \\ y & b \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a^2+b^2 & 0 \\ 0 & x^2+y^2 \end{vmatrix}.$$

Вычислить определители третьего порядка.

5.12. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$. **5.13.** $\begin{vmatrix} c & a & 0 \\ a & 0 & b \\ 0 & b & c \end{vmatrix}$. **5.14.** $\begin{vmatrix} 0 & a+1 & 1-a \\ 1-a & 0 & a+1 \\ a+1 & 1-a & 0 \end{vmatrix}$.

5.15. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$. **5.16.** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$. **5.17.** $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ p & r & q \\ 0 & b & 0 \end{vmatrix}$.

5.18. Доказать, что если все элементы квадратной матрицы 3-го порядка равны ± 1, то ее определитель является четным числом.

5.19. Найти наибольшее значение, которое может принимать определитель 3-го порядка, если все элементы его матрицы равны ± 1.

5.20. Найти наибольшее значение определителя 3-го порядка, если элементы его матрицы равны 1 и 0.

Пользуясь свойствами определителя, доказать, что следующие определители равны нулю.

5.21. $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & 1 & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & 1 & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & 1 & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$. **5.22.** $\begin{vmatrix} \sin^2\alpha & \cos 2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\beta & \cos 2\beta & \cos^2\beta \\ \sin^2\gamma & \cos 2\gamma & \cos^2\gamma \end{vmatrix}$.

5.23. $\begin{vmatrix} (a+b)^2 & a^2+b^2 & ab \\ (p+q)^2 & p^2+q^2 & pq \\ (x+y)^2 & x^2+y^2 & xy \end{vmatrix}$. **5.24.** $\begin{vmatrix} (a+b)^3 & a^3+b^3 & a+b \\ (a-b)^3 & a^3-b^3 & b-a \\ (1+ab)^3 & 1+a^3b^3 & 1+ab \end{vmatrix}$.

5.25. $\begin{vmatrix} a+b & c & 1 \\ b+c & a & 1 \\ c+a & b & 1 \end{vmatrix}$. **5.26.** $\begin{vmatrix} (a^x+a^{-x})^2 & (a^x-a^{-x})^2 & 1 \\ (b^y+b^{-y})^2 & (b^y-b^{-y})^2 & 1 \\ (c^z+c^{-z})^2 & (c^z-c^{-z})^2 & 1 \end{vmatrix}$.

5.27. $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \sin(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \sin(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \sin(\gamma+\delta) \end{vmatrix}$. **5.28.** $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & \cos(\alpha+\delta) \\ \sin\beta & \cos\beta & \cos(\beta+\delta) \\ \sin\gamma & \cos\gamma & \cos(\gamma+\delta) \end{vmatrix}$.

Пользуясь лишь свойствами определителя, обосновать тождества.

5.29. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x+b_1y+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x+b_2y+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x+b_3y+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

5.30. $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

5.31. $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

5.32. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

5.33. $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$.

5.34. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)$.

5.35. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+ac+bc)(b-a)(c-a)(c-b)$.

5.36. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^4 \\ 1 & b & b^4 \\ 1 & c & c^4 \end{vmatrix} = (a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc)(b-a)(c-a)(c-b)$.

5.37. $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$

5.38. $\begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = (ab+bc+ca)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$

5.39. Выяснить, какие из следующих произведений входят в определители соответствующих порядков, и если да, то с какими знаками:

а) $a_{35}a_{43}a_{12}a_{54}a_{21}$; б) $a_{13}a_{41}a_{24}a_{55}a_{23}$;
в) $a_{32}a_{43}a_{51}a_{14}a_{25}a_{66}$; г) $a_{23}a_{61}a_{36}a_{45}a_{12}a_{54}$;
д) $a_{36}a_{27}a_{74}a_{51}a_{25}a_{43}a_{62}$; е) $a_{34}a_{21}a_{46}a_{73}a_{17}a_{54}a_{62}$;
ж) $a_{16}a_{33}a_{72}a_{27}a_{61}a_{55}a_{44}$; з) $a_{12}a_{23}\ldots a_{n-1,n}a_{n1}$;
и) $a_{21}a_{32}\ldots a_{n,n-1}a_{1n}$; к) $a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}\ldots a_{2n-1,2n}a_{2n,2n-1}$.

5.40. С каким знаком входит в определитель n-го порядка произведение:

а) элементов главной диагонали;
б) элементов побочной диагонали?

5.41. Выписать все слагаемые, входящие в определитель 4-го порядка со знаком плюс и содержащие множителем a_{31}.

5.42. Подобрать i и j такие, что произведение

$$a_{33}a_{i4}a_{12}a_{41}a_{j5}$$

входит в определитель 5-го порядка со знаком минус.

5.43. Подобрать i, j и k такие, что произведение

$$a_{3j}a_{5k}a_{62}a_{i4}a_{41}a_{13}$$

входит в определитель 6-го порядка со знаком плюс.

5.44. Подобрать i и j такие, что произведение

$$a_{41}a_{2i}a_{64}a_{76}a_{5j}a_{33}a_{12}$$

входит в определитель 7-го порядка со знаком плюс.

5.45. Подобрать i, j, k и l такие, что произведение

$$a_{k6}a_{43}a_{7l}a_{12}a_{ij}a_{27}a_{64}$$

входит в определитель 7-го порядка со знаком минус.

5.46. Дополнить произведение элементов $a_{13}a_{25}a_{34}a_{47}a_{56}$ определителя 7-го порядка так, чтобы получить член этого определителя, входящий в него: а) со знаком плюс; б) со знаком минус.

5.47. Вычислить знак члена определителя

$$a_{\alpha_1\beta_1}a_{\alpha_2\beta_2}\ldots a_{\alpha_n\beta_n},$$

зная число инверсий в перестановках $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ и $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_n$.

Пользуясь только определением, вычислить определители.

5.48. $\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$. **5.49.** $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 2 & 4 & b & 0 \\ 3 & c & 0 & 5 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$. **5.50.** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

5.51. $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$. **5.52.** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$. **5.53.** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 3 \\ 8 & 6 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

5.54. $\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$. **5.55.** $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

5.56. $\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \dots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-2} & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}$.

5.57. $\begin{vmatrix} 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \\ a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$. **5.58.** $\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots & a_{n-2} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix}$.

5.59. Пользуясь только определением, вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & & & x_{1k} & & & \\ & \ddots & & \dots & & & \\ & & 1 & x_{k-1,k} & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & x_{k+1,k} & 1 & & \\ & & & \dots & & \ddots & \\ & & & x_{nk} & & & 1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{array}{cc} \left|\begin{array}{ccccccc} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \cos\varphi & \dots & -\sin\varphi & \dots & \dots \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & \sin\varphi & \dots & \cos\varphi & \dots & \dots \\ & & \cdot & & \cdot & \ddots & \\ & & \cdot & & \cdot & & 1 \end{array}\right| & \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} & \end{array}$

(в этих определителях все неуказанные внедиагональные элементы равны нулю, а диагональные – единице).

5.60. Показать, что если в квадратной матрице порядка n более чем n^2-n элементов равны нулю, то ее определитель равен нулю.

5.61. Доказать, что если в квадратной матрице порядка n на пересечении некоторых k строк и l столбцов стоят элементы, равные нулю, причем $k+l>n$, то ее определитель равен нулю.

Исходя только из определения, найти коэффициенты при x^3 и x^4 в определителях.

5.62. $\begin{vmatrix} x & 2x & 1 & -1 \\ 1 & x & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 2x & 1 \\ 2 & 1 & x & -x \end{vmatrix}$. **5.63.** $\begin{vmatrix} x & 1 & 3 & 2 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 2x & 2 & 1 & x \end{vmatrix}$.

5.64. Найти элемент квадратной матрицы порядка n, который

а) симметричен элементу a_{ik} относительно побочной диагонали;

б) симметричен элементу a_{ik} относительно “центра” матрицы.

5.65. Назовем место элемента a_{ik} четным (нечетным), если сумма $i+k$ четна (соответственно нечетна). Найти число элементов квадратной матрицы порядка n, стоящих на четных и на нечетных местах.

5.66. Доказать, что в каждый член определителя порядка n входит четное число элементов его матрицы, занимающих нечетное место, а элементов, занимающих четное место, входит четное число, если n четно, и нечетное число, если n нечетно.

5.66.1. Показать, что определитель кососимметрической матрицы нечетного порядка равен нулю.

5.67. Как изменится определитель порядка n, если первый столбец его матрицы переставить на последнее место, а остальные столбцы передвинуть влево, сохраняя их расположение?

5.68. Как изменится определитель порядка n, если строки его матрицы записать в обратном порядке?

5.69. Как изменится определитель порядка n, если каждый элемент его матрицы заменить элементом, симметричным данному относительно побочной диагонали?

5.70. Как изменится определитель порядка n, если каждый элемент его матрицы заменить элементом, симметричным данному относительно “центра” матрицы?

5.71. Как изменится определитель квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n, если каждый ее элемент a_{ij} умножить на c^{i-j}, где $c \neq 0$?

5.72. Доказать, что определитель порядка n не изменится, если изменить знак всех элементов его матрицы на нечетных местах; если же изменить знак всех элементов матрицы на четных местах, то ее определитель не изменится, если n четно, и изменит знак, если n нечетно.

5.73. Доказать, что определитель матрицы не изменится, если:

а) к каждой ее строке, кроме последней, прибавить последующую строку;

б) к каждому ее столбцу, начиная со второго, прибавить предыдущий столбец;

в) из каждой ее строки, кроме последней, вычесть все последующие строки;

г) к каждому ее столбцу, начиная со второго, прибавить все предыдущие столбцы.

5.74. Как изменится определитель матрицы, если из каждой ее строки, кроме последней, вычесть последующую строку, а из последней строки вычесть исходную первую строку?

5.75. Как изменится определитель матрицы, если к каждому ее столбцу, начиная со второго, прибавить предыдущий столбец и в то же время к первому прибавить исходный последний столбец?

5.76. Как изменится определитель порядка n, если его матрицу повернуть на $90°$ вокруг “центра”?

5.77. Чему равен определитель матрицы, у которой сумма строк с четными номерами равна сумме строк с нечетными номерами?

5.78. Найти сумму определителей всех матриц перестановок n-го порядка.

5.79. Найти сумму определителей порядка $n \geq 2$

$$\sum_{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)} \begin{vmatrix} a_{1\alpha_1} & a_{1\alpha_2} & \cdots & a_{1\alpha_n} \\ a_{2\alpha_1} & a_{2\alpha_2} & \cdots & a_{2\alpha_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n\alpha_1} & a_{n\alpha_2} & \cdots & a_{n\alpha_n} \end{vmatrix},$$

где сумма берется по всевозможным перестановкам $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ из первых n натуральных чисел.

5.80. Доказать, что если A и B – стохастические матрицы, то определитель их коммутатора $[A, B]$ равен нулю.

5.81. Числа 20677, 53291, 25783, 28451 и 1679 делятся на 23. Доказать, что определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 & 7 & 7 \\ 5 & 3 & 2 & 9 & 1 \\ 2 & 5 & 7 & 8 & 3 \\ 2 & 8 & 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

также делится на 23.

5.82. Вычислить, пользуясь лишь свойствами определителя:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ y & z & x & 1 \\ z & x & y & 1 \\ \dfrac{x+z}{2} & \dfrac{x+y}{2} & \dfrac{y+z}{2} & 1 \end{vmatrix}.$$

5.83. Доказать, что любой определитель равен полусумме двух определителей, один из которых получен из данного прибавлением ко всем элементам i-й строки его матрицы числа b, а другой – аналогичным образом прибавлением числа $-b$.

5.84. Пусть $A = A(t) \in \mathcal{D}^{n\times n}$. Доказать, что производная определителя $\det A$ может вычислена по формуле

$$\frac{d}{dt}\det A = \begin{vmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) & \dots & a'_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a'_{21}(t) & a'_{22}(t) & \dots & a'_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{n1}(t) & a'_{n2}(t) & \dots & a'_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

§6. Миноры и алгебраические дополнения

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $k \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le \min(m, n)$. Выберем в матрице A произвольные k строк и k столбцов с номерами $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ и $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$ соответственно. Элементы матрицы A, стоящие на пересечении выбранных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу k-го порядка. Определитель этой матрицы называется *минором* k-го порядка матрицы A, расположенным в строках с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и столбцах с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_k$. Для обозначения миноров приняты символы $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$, $M\binom{i_1 i_2 \ldots i_k}{j_1 j_2 \ldots j_k}$, M_k, M. Итак,

$$M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \ldots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \ldots & a_{i_2 j_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \ldots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}.$$

Пусть теперь $A = (a_{ij})$ – квадратная матрица n-го порядка и $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ – ее минор. Если вычеркнуть в матрице A строки и столбцы, в которых расположен заданный минор, то оставшиеся элементы матрицы A образуют квадратную матрицу $(n-k)$-го порядка. Определитель этой матрицы называется *дополнительным минором к минору* $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$. Дополнительный минор обозначается символами $\overline{M}^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$, $\overline{M}$, M^δ. Очевидно, что исходный минор является дополнительным к своему дополнительному минору. Дополнительный минор к минору $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$, взятый со знаком $(-1)^{s(M)}$, $s(M) = \sum_{p=1}^{k}(i_p + j_p)$, называется *алгебраическим дополнением* к минору $M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ и обозначается символом $A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}$. Итак,

$$A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k} = (-1)^{i_1+i_2+\ldots+i_k+j_1+j_2+\ldots+j_k}\overline{M}^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}.$$

Пример 6.1. В матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

минором 1-го порядка может быть любой элемент. Минором 2-го порядка является, например, минор $M^{1,3}_{2,4} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -12$, минором 3-го порядка – например, минор $M^{1,2,3}_{1,3,4} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8.$

Пример 6.2. В матрице

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 4 & 3 \\ 7 & 8 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

для минора $M^{1,2}_{2,4} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -13$ дополнительным минором будет минор

$$M^\delta = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = -23,$$

при этом

$$A^{1,2}_{2,4} = (-1)^{1+2+2+4}M^\delta = 23.$$

Теорема 6.1 (теорема Лапласа). *Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $k \in \mathbb{N}$, $1 \le k \le n-1$. Пусть в матрице A выбраны произвольные k строк (или столбцов). Тогда определитель матрицы A равен сумме всевозможных произведений миноров k-го порядка, расположенных в выбранных строках (соответственно столбцах), на их алгебраические дополнения.*

Таким образом, в строчном варианте теоремы Лапласа

$$\det A = \sum_{(j_1,j_2,\ldots,j_k)} M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k} A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}, \tag{6.1}$$

где суммирование ведется по всевозможным значениям $j_1, j_2, \ldots, j_k$, удовлетворяющим неравенствам $1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_k \le n$, или в столбцовом варианте

$$\det A = \sum_{(i_1,i_2,\ldots,i_k)} M^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k} A^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_k}, \tag{6.2}$$

где суммирование ведется по всевозможным значениям $i_1, i_2, \ldots, i_k$, удовлетворяющим неравенствам $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_k \le n$.

Пример 6.3. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

пользуясь теоремой Лапласа.

Решение. Заметим, что во 2-й и 4-й строках матрицы A находится лишь один ненулевой минор второго порядка $M^{2,4}_{1,4} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$. Поэтому разложение определителя по этим двум строкам (т.е. в теореме Лапласа $k = 2$, $i_1 = 2$, $i_2 = 4$) содержит только одно слагаемое, так что

$$|A| = M^{2,4}_{1,4} A^{2,4}_{1,4} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{2+4+1+4} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1) \cdot (-2) = 10. \ \blacksquare$$

Из теоремы Лапласа следует, что

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} \quad \text{или} \quad \det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}, \tag{6.3}$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение к элементу a_{ij}.

Представление определителя (6.3) называется *разложением определителя по i-й строке* (соответственно *по j-му столбцу*).

Пример 6.4. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & -5 \end{bmatrix},$$

пользуясь разложением по 1-й строке.

Решение. Согласно (6.3) имеем

$$|A| = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -4 + (-1)(-18) = 14. \ \blacksquare$$

Теорема 6.2. *Определитель квазитреугольной матрицы равен произведению определителей диагональных клеток.*

Теорема 6.3. *Определитель произведения квадратных матриц равен произведению определителей матриц-сомножителей.*

ЗАДАЧИ

6.1. *Сочетанием из n элементов по m* называется неупорядоченная выборка m элементов из совокупности n заданных элементов. Число всех сочетаний из n элементов по m обозначается символами C_n^m или $\binom{n}{m}$. Считая, что $C_n^0 = 1$ и $0! = 1$, доказать соотношения:

а) $C_n^m = \dfrac{n(n-1)\dots(n-m+1)}{m!}$; б) $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$;

в) $C_n^m = C_n^{n-m}$; г) $C_{n+1}^m = C_n^m + C_n^{m-1}$;

д) $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$;

е) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$;

ж) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$;

з) $C_{m+n}^k = \sum\limits_{l=0}^{k} C_m^l C_n^{k-l}$.

6.2. В квадратной матрице порядка n найти:

а) число миноров порядка k, расположенных в фиксированных k строках;

б) число всех миноров, расположенных в фиксированных k строках;

в) число всех миноров порядка k.

6.3. Пусть M – произвольный минор некоторой квадратной матрицы, M^δ – дополнительный к M минор, $(-1)^{s(M)}M^\delta$ – алгебраическое дополнение минора M (здесь $s(M)$ – сумма номеров строк и столбцов матрицы, в которых расположен минор M). Показать, что алгебраическое дополнение к минору M^δ равно $(-1)^{s(M)}M$.

6.4. Минор, стоящий на пересечении k строк и k столбцов квадратной матрицы, имеющих одинаковые номера, называется *главным минором* порядка k. Найти число главных миноров порядка k в матрице порядка n.

6.5. Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Доказать, что

$$\det(A - \lambda I) = (-\lambda)^n + \sum_{k=1}^{n} s_k(-\lambda)^{n-k},$$

где s_k – сумма всех главных миноров порядка k матрицы A.

6.6. Показать, что построенное в теореме Лапласа разложение определителя порядка n по любым k строкам (столбцам) совпадает с его разложением по остальным $n-k$ строкам (соответственно столбцам).

6.7. Доказать, что если в некоторой матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ все миноры порядка k ($k < \min(m, n)$) равны нулю, то равны нулю и все миноры порядка выше k.

Пользуясь теоремой Лапласа, вычислить определители.

6.8. $\begin{vmatrix} 13 & 37 & 23 & 4 \\ 0 & 11 & 9 & 0 \\ 11 & 41 & 73 & 3 \\ 0 & 9 & 11 & 0 \end{vmatrix}$. **6.9.** $\begin{vmatrix} 9 & 8 & 3 & 4 & 0 \\ 6 & 5 & 2 & 9 & 7 \\ 4 & 5 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. **6.10.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

6.11. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}$. **6.12.** $\begin{vmatrix} 7 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & 0 & 7 \\ 6 & 3 & 2 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. **6.13.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

6.14. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 & 7 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 8 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$. **6.15.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 7 & 3 \\ 2 & 7 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

6.16. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & 5 & 7 & 8 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & 6 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$. **6.17.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 9 & 4 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ 4 & 5 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 8 & 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

6.18. $\begin{vmatrix} 1 & 52 & 91 & 47 & 16 & 2 \\ 0 & 7 & 16 & 39 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 11 & 24 & 3 & 0 \\ 2 & 17 & 57 & 28 & 11 & 1 \end{vmatrix}$. **6.19.** $\begin{vmatrix} 13 & 24 & 3 & 4 & 57 & 23 \\ 71 & 7 & 0 & 0 & 8 & 17 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 27 & 8 & 0 & 0 & 7 & 31 \\ 83 & 61 & 4 & 5 & 51 & 43 \end{vmatrix}$.

6.20. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix}$. **6.21.** $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 5 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 8 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 8 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 5 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

6.22. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ y_1 & y_2 & \cos\beta & \sin\beta \\ z_1 & z_2 & \cos\gamma & \sin\gamma \end{vmatrix}$. **6.23.** $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y & 0 \\ 1 & 0 & 0 & z \end{vmatrix}$.

6.24. $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a_1 & 1 & 0 & 0 \\ b_1 & 0 & 1 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. **6.25.** $\begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 & c \end{vmatrix}$. **6.26.** $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ b & 0 & 0 & c \\ c & 0 & 0 & b \\ d & c & b & a \end{vmatrix}$.

6.27. Пусть A, B, C, D – миноры третьего порядка, получаемые из матрицы

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{bmatrix}$$

вычеркиванием соответственно первого, второго, третьего и четвертого столбцов. Доказать, что

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & 0 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = AD - BC.$$

Применяя теорему Лапласа, вычислить определители, предварительно преобразовав их.

6.28. $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 7 & 8 \\ 8 & 9 & 8 & 9 \\ -7 & -8 & 7 & 8 \\ -8 & -9 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. **6.29.** $\begin{vmatrix} 2 & 6 & -3 & -9 \\ 6 & 8 & -9 & -12 \\ 1 & 3 & -2 & -6 \\ 3 & 4 & -6 & -8 \end{vmatrix}$.

6.30. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 8 & 10 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{vmatrix}$. **6.31.** $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 2 & 2 & 2 \\ 7 & 5 & 6 & 5 & 5 \\ 3 & 7 & 7 & 9 & 7 \end{vmatrix}$.

6.32. $\begin{vmatrix} 5 & -5 & -3 & 4 & 2 \\ -4 & 4 & 3 & 6 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & -9 & -5 \\ -7 & 7 & 6 & 8 & 4 \\ 5 & -3 & 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}$. **6.33.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 7 & 5 & -1 \\ 3 & -1 & -5 & -3 & -2 \\ 5 & -6 & 4 & 2 & -4 \\ 2 & -3 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

6.34. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & -4 & -3 \\ -2 & 3 & -4 & 2 & -3 \\ 6 & 4 & 7 & -8 & -1 \\ 2 & -1 & 7 & 1 & 5 \end{vmatrix}$. **6.35.** $\begin{vmatrix} 8 & 10 & 3 & 1 & 4 \\ 7 & 9 & 4 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -4 & -2 & -6 \\ -1 & 2 & 6 & 3 & 9 \end{vmatrix}$.

6.36. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$. **6.37.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

6.38. $$\begin{vmatrix} 1+x & x & \dots & x & x & \dots & x & 1+x \\ x & 1+x & \dots & x & x & \dots & 1+x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & \dots & 1+x & 1+x & \dots & x & x \\ x & x & \dots & 1+2x & 1+x & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1+2x & x & \dots & x & x & \dots & x & 1+x \end{vmatrix}$$
(порядок определителя равен $2n$).

6.39. Справедливы ли тождества ($A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$):
а) $\det(A+B) = \det A + \det B$; б) $\det(\alpha A) = \alpha \det A$;
в) $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$; г) $\det(A^k) = (\det A)^k$, $k \in \mathbb{N}$?

6.40. Доказать, что если матрица A ортогональна, то $|\det A| = 1$.

6.41. Доказать, что определитель нильпотентной матрицы равен нулю.

6.42. Доказать, что для любой квадратной вещественной матрицы A имеет место неравенство $\det(AA^T) \geq 0$.

6.43. Как изменится определитель, если в его матрице выделить k строк (или столбцов) и из каждой из них вычесть все остальные выделенные строки?

6.44. Найти связь между определителем матрицы A порядка

n и определителями блочных матриц порядка $2n$ следующего вида:

а) $\begin{bmatrix} A & -A \\ A & A \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} A & 2A \\ 3A & 4A \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 3A & 4A \\ 2A & 3A \end{bmatrix}$.

6.45. Квадратная матрица A порядка n разбита на блоки так, что получающаяся при этом блочная матрица состоит из p клеточных строк и p клеточных столбцов: $A = (A_{ij})$, $i, j = \overline{1,p}$. При этом отличными от нуля оказались лишь блоки на побочной клеточной диагонали: A_{1p}, $A_{2,p-1}, \ldots, A_{p1}$, которые являются квадратными матрицами порядков k_1, $k_2, \ldots, k_p$ соответственно. Доказать, что

$$\det A = (-1)^s \det A_{1p} \cdot \det A_{2,p-1} \cdot \ldots \cdot \det A_{p1},$$

где $s = \left[n(n-1) + \sum_{i=1}^{p} k_i(k_i - 1)\right]/2$.

§7. Вычисление определителя

Метод Гаусса. Метод Гаусса решения матричных задач основан на следующих положениях:

• выделяется тип матрицы, для которой задача решается достаточно просто;

• указывается тип преобразований, которые либо не изменяют решений задачи, либо изменяют их контролируемым образом;

• произвольная матрица указанными преобразованиями приводится к выделенному типу, тем самым задача общего вида сводится к более простой.

В применении к задаче вычисления определителя эта схема выглядит следующим образом:

– определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов (пример 5.1);

– элементарные преобразования матрицы либо не изменяют определителя (свойство 8), либо изменяют (свойства 3 и 5), но так, что эти изменения можно легко контролировать;

– произвольная квадратная матрица элементарными преобразованиями приводится к треугольной форме (теорема 3.1).

Метод Гаусса вычисления определителя состоит в приведении матрицы элементарными преобразованиями к треугольному виду, вычислении определителя получившейся треугольной матрицы и восстановлении исходного определителя, если привлекались элементарные преобразования первого и второго типов (§3).

В методе Гаусса вычисления определителя можно использовать элементарные преобразования как строк, так и столбцов.

Пример 7.1. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

методом Гаусса.

Решение. Приведем матрицу A к треугольному виду:

$$|A| = \left\{\begin{array}{l}\text{переставим}\\ \text{местами 1-ю}\\ \text{и 2-ю строки}\end{array}\right\} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \left\{\begin{array}{l}\text{вычтем из 3-й стро-}\\ \text{ки 1-ю, умножен-}\\ \text{ную на 2, а к 4-й}\\ \text{строке прибавим 1-}\\ \text{ю}\end{array}\right\} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \left\{\begin{array}{l}\text{переставим}\\ \text{местами 2-ю}\\ \text{и 4-ю строки}\end{array}\right\} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{\begin{array}{l}\text{вычтем из 4-й стро-}\\ \text{ки 3-ю, а из 3-й –}\\ \text{удвоенную 2-ю}\end{array}\right\} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \left\{\begin{array}{l}\text{прибавим к 4-й}\\ \text{строке 3-ю}\end{array}\right\} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 3. \quad \blacksquare$$

Метод рекуррентных соотношений. Метод применяется в тех случаях, когда удается получить соотношение, связывающее данный определитель D_n порядка n с определителями такого же вида, но более низких порядков

$$D_n = f(D_{n-1}, D_{n-2}, \ldots, D_{n-k}),\ k < n. \tag{7.1}$$

Такое равенство называется *рекуррентным соотношением*.

Простейший вариант метода используется для вычисления определителя D_n конкретного (и невысокого) порядка n и состоит в получении рекуррентного соотношения и последовательном вычислении всех определителей, входящих в это соотношение, при этом определители низших порядков вычисляются непосредственно, а определители более высокого порядка – через рекуррентное соотношение.

Пример 7.2. Вычислить определитель

$$D_5 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & a_3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix}.$$

Решение. Найдем рекуррентное соотношение для общего случая определителя данного вида $(n+1)$-го порядка:

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{vmatrix} = \left\{\begin{array}{l}\text{разложим по по-}\\ \text{следнему столб-}\\ \text{цу}\end{array}\right\} =$$

$$= a_n D_n + (-1)^{n+2} \begin{vmatrix} 1 & a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1} \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix} = \left\{\begin{array}{l}\text{разложим второй}\\ \text{определитель по}\\ \text{последней строке}\end{array}\right\} =$$

$$= a_n D_n + (-1)^{n+2}(-1)^{n+1} a_1 a_2 \dots a_{n-1}.$$

Таким образом,

$$D_{n+1} = a_n D_n - a_1 a_2 \dots a_{n-1}, \quad n \geq 2. \tag{7.2}$$

Вернемся к примеру. Согласно (7.2) имеем $D_5 = a_4 D_4 - a_1 a_2 a_3$. Для вычисления D_5 найдем последовательно определители D_2, D_3, D_4: $D_2 = -1$, $D_3 = a_2 D_2 - a_1 = -a_1 - a_2$, $D_4 = a_3 D_3 - a_1 a_2 = -a_1 a_3 - a_2 a_3 - a_1 a_2$. Отсюда $D_5 = -a_1 a_3 a_4 - a_2 a_3 a_4 - a_1 a_2 a_4 - a_1 a_2 a_3 = -a_1 a_2 a_3 a_4 \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4}\right)$, если $a_i \neq 0$, $i = \overline{1,4}$.

Замечание. Нетрудно показать, что эта форма записи годится и в случае, когда среди a_i есть равные нулю. В этом случае соответствующая величина a_i в ответе отсутствует. ∎

Чтобы получить общее выражение для определителя произвольного порядка n, поступают следующим образом:

а) вычислив несколько определителей низших порядков, устанавливают закономерность и находят предполагаемое искомое выражение;

б) затем доказывают гипотетический ответ методом математической индукции.

В обоих пунктах "а" и "б" существенно используется рекуррентное соотношение.

Пример 7.3. Вычислить определитель D_{n+1} такого же вида, что и в примере 7.2, но произвольного $(n+1)$-го порядка.

Решение. Как было найдено в примере 7.2, $D_2 = -1$, $D_3 = -a_1 - a_2 = -a_1 a_2 \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right)$, $D_4 = -a_1 a_2 a_3 \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3}\right)$. Покажем, что $D_{n+1} = -a_1 a_2 \dots a_n \cdot \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right)$.

Пусть $D_n = -a_1 a_2 \dots a_{n-1} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}}\right)$. Тогда в силу (7.2)

$$D_{n+1} = -a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}}\right) - a_1 a_2 \dots a_{n-1} =$$
$$= -a_1 a_2 \dots a_n \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}\right).$$

По поводу случая, когда среди a_i есть равные нулю, см. замечание в решении примера 7.2. ∎

Особенно удобен метод рекуррентных соотношений для вычисления определителей *трехдиагональных матриц*, т.е. матриц вида

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & a_3 & b_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & b_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{n-1} & a_n \end{bmatrix}.$$

Для определителей D_n трехдиагональной матрицы имеет место простое рекуррентное соотношение

$$D_n = a_n D_{n-1} - b_{n-1} c_{n-1} D_{n-2}, \quad n \geq 3, \tag{7.3}$$

которое может быть получено разложением определителя по последнему столбцу (строке) с последующим разложением алгебраического дополнения к b_{n-1} (c_{n-1}) по последней строке (столбцу).

Пример 7.4. Вычислить определитель

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение. Согласно (7.3) имеем $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}$, $n > 2$. Найдем несколько определителей низших порядков: $D_1 = 2$, $D_2 = 3$, $D_3 = 2D_2 - D_1 = 6 - 2 = 4$. Естественно предположить, что $D_n = n + 1$. Это предположение легко доказать методом математической индукции (если $D_k = k + 1$, $\forall k < n$, то $D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2} = 2n - (n-1) = n + 1$). ∎

Не всегда удается по значениям D_1, D_2, D_3 и т.д. установить закономерность и выяснить вид общего выражения для определителя произвольного порядка n. Однако, если рекуррентное соотношение имеет вид

$$D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}, \quad n \geq 3, \tag{7.4}$$

где p и q – постоянные коэффициенты (не зависящие от n), то вычисление определителя D_n можно свести к вычислению общего члена одной или двух геометрических прогрессий.

Перепишем (7.4) в виде

$$\begin{aligned} D_n - \alpha D_{n-1} &= \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}), \\ D_n - \beta D_{n-1} &= \alpha(D_{n-1} - \beta D_{n-2}), \end{aligned} \tag{7.5}$$

где $\alpha + \beta = p$, $\alpha\beta = -q$, т.е. α и β – корни уравнения $x^2 - px - q = 0$. Очевидно, формулы (7.5) описывают геометрическую прогрессию.

Пусть $\alpha \neq \beta$. Тогда по формуле n-го члена геометрической прогрессии из равенств (7.5) находим

$$\begin{cases} D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^{n-2}(D_2 - \alpha D_1), \\ D_n - \beta D_{n-1} = \alpha^{n-2}(D_2 - \beta D_1), \end{cases}$$

откуда (решая эту систему) получим

$$D_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n, \tag{7.6}$$

где

$$c_1 = \frac{D_2 - \beta D_1}{\alpha(\alpha - \beta)}, \quad c_2 = -\frac{D_2 - \alpha D_1}{\beta(\alpha - \beta)}. \tag{7.7}$$

Выражение (7.6) легко запоминается. Оно выводилось для $n > 2$, но непосредственно проверяется для $n = 1$ и $n = 2$.

Формулы (7.7) же не удобны для запоминания, значения c_1 и c_2 проще находить из системы уравнений, определенной начальными условиями:

$$\begin{cases} D_1 = c_1\alpha + c_2\beta, \\ D_2 = c_1\alpha^2 + c_2\beta^2. \end{cases}$$

Если $\alpha = \beta$, то два равенства (7.5) сливаются в одно

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \alpha(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}),$$

откуда по формуле n-го члена геометрической прогрессии получаем

$$D_n = \alpha^n(nc_1 + c_2), \tag{7.8}$$

где константы c_1 и c_2 находятся из начальных условий

$$\begin{cases} D_1 = \alpha(c_1 + c_2), \\ D_2 = \alpha^2(2c_1 + c_2). \end{cases}$$

Пример 7.5. Вычислить определитель

$$D_n = \begin{vmatrix} 9 & 5 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 4 & 9 & 5 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 5 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 9 \end{vmatrix}.$$

Решение. Согласно (7.3) рекуррентное соотношение для этого определителя таково

$$D_n = 9D_{n-1} - 20D_{n-2}, \quad n \geq 3.$$

По значениям $D_1 = 9$, $D_2 = 61$, $D_3 = 9D_2 - 20D_1 = 369$ трудно уловить закономерность. Так как рекуррентное соотношение для D_n имеет вид (7.4), применим описанный выше алгоритм. Найдем корни α, β уравнения $x^2 - 9x + 20 = 0$: $\alpha = 4$, $\beta = 5$. По формуле (7.6) имеем $D_n = c_1 \cdot 4^n + c_2 \cdot 5^n$, где $\begin{cases} 4c_1 + 5c_2 = 9, \\ 16c_1 + 25c_2 = 61, \end{cases}$ т.е. $c_1 = -4$, $c_2 = 5$.

Таким образом, $D_n = 5^{n+1} - 4^{n+1}$. ∎

Пример 7.6. Вычислить определитель

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение. Согласно (7.3) рекуррентное соотношение для этого определителя имеет вид

$$D_n = 2D_{n-1} - D_{n-2}, \quad n \geq 3.$$

Решая уравнение $x^2 - 2x + 1 = 0$, находим $\alpha = \beta = 1$. Следовательно, $D_n = nc_1 + c_2$ (в силу (7.8)), где $\begin{cases} c_1 + c_2 = 2, \\ 2c_1 + c_2 = 3, \end{cases}$ т.е. $c_1 = c_2 = 1$.

Таким образом, $D_n = n + 1$. ∎

Определитель Вандермонда. *Определителем Вандермонда* называется определитель

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Покажем, что он равен произведению всевозможных разностей вида $(x_i - x_j)$, $i > j$:

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j). \tag{7.9}$$

Действительно, при $n = 2$ утверждение очевидно. Пусть оно верно для определителей $(n-1)$-го порядка. Тогда, вычитая из каждого столбца, начиная с последнего, предыдущий столбец, умноженный на x_1, получаем

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & x_2 - x_1 & x_2^2 - x_1 x_2 & \ldots & x_2^{n-1} - x_1 x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 - x_1 & x_3^2 - x_1 x_3 & \ldots & x_3^{n-1} - x_1 x_3^{n-2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n - x_1 & x_n^2 - x_1 x_n & \ldots & x_n^{n-1} - x_1 x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

После разложения этого определителя по 1-й строке и вынесения из всех строк получившегося определителя общих множителей $x_2 - x_1$, $x_3 - x_1, \ldots$, $x_n - x_1$, получим рекуррентное соотношение

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) \ldots (x_n - x_1) V(x_2, x_3, \ldots, x_n),$$

откуда с учетом индуктивного предположения следует (7.9).

Полезно произведение (7.9) "увидеть"в развернутом виде:

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = {} & (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \quad \ldots \quad (x_{n-1} - x_1)(x_n - x_1) \cdot \\ & \cdot (x_3 - x_2)(x_4 - x_2) \quad \ldots \quad (x_{n-1} - x_2)(x_n - x_2) \cdot \\ & \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ & \cdot (x_n - x_{n-1}). \end{aligned}$$

Число множителей в этом произведении равно $n(n-1)/2$, поэтому

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_j - x_i).$$

Метод выделения линейных множителей. Метод применяется для вычисления определителя, элементы которого зависят от параметра. Он основан на выполнении элементарных преобразований, формирующих в какой-либо строке (столбце) матрицы общий множитель вида $\lambda - a$ (где λ - параметр), который выносится за знак определителя. При этом определитель "освобождается" от параметра и дальнейшее его вычисление упрощается.

Метод особенно удобен для решения уравнений $D(\lambda) = 0$, где $D(\lambda)$ - определитель матрицы, зависящий от параметра λ. Линейный множитель $\lambda - a$ сразу дает корень этого уравнения: $\lambda = a$.

Пример 7.7. Решить уравнение

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 5-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Решение. Вычитая из всех строк последнюю, получим

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 & \lambda-4 \\ 0 & 4-\lambda & 0 & \lambda-4 \\ 0 & 0 & 4-\lambda & \lambda-4 \\ 1 & 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Вынесем из первых трех строк общий множитель $(\lambda-4)$, тогда уравнение перепишется в виде

$$(\lambda-4)^3\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

После прибавления к 4-й строке 1-й и 2-й строк и разложения по первым двум столбцам получим уравнение

$$(\lambda-4)^3\begin{vmatrix} -1 & 1\\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix}=0,\quad \text{т.е.}\quad (\lambda-4)^4=0.$$

Таким образом, уравнение имеет единственный корень $\lambda=4$ кратности 4. ∎

Представление определителя в виде суммы или произведения определителей. Метод применяется в тех случаях, когда исходный определитель можно разложить в сумму или произведение определителей, каждый из которых легко вычисляется.

Пример 7.8. Вычислить определитель

$$D_n=\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n\\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}.$$

Решение. Воспользуемся линейностью определителя по 1-му столбцу (свойство 4) и представим определитель D_n в виде суммы двух определителей:

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n\\ 1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n\\ x_2y_1 & 1+x_2y_2 & \dots & 1+x_2y_n\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix}=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{в первом определителе из всех столб-}\\ \text{цов, начиная со 2-го, вычтем 1-й}\\ \text{столбец, а во втором определителе}\\ \text{воспользуемся линейностью по 2-му}\\ \text{столбцу и т.д.}\end{array}\right\}=\begin{vmatrix} 1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n\\ 1 & x_2y_2 & \dots & x_2y_n\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & x_ny_2 & \dots & x_ny_n \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} x_1y_1 & 1 & \dots & x_1y_n\\ x_2y_1 & 1 & \dots & x_2y_n\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ x_ny_1 & 1 & \dots & x_ny_n \end{vmatrix}+\dots+\begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & 1\\ x_2y_1 & x_2y_2 & \dots & 1\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & 1 \end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \dots & x_1y_n\\ x_2y_1 & x_2y_2 & \dots & x_2y_n\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ x_ny_1 & x_ny_2 & \dots & x_ny_n \end{vmatrix}=0,$$ так как каждый определитель имеет пропорциональные столбцы (если $n>2$) и поэтому равен нулю.

Итак, $D_1=1+x_1y_1$; $D_2=(x_1-x_2)(y_1-y_2)$; $D_n=0$ при $n\geq 3$. ∎

Пример 7.9. Определитель D_n из примера 7.8 может быть представлен и как произведение двух определителей

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix},$$

что сразу дает ответ, полученный в предыдущем примере.

ЗАДАЧИ

Применяя метод Гаусса[1], вычислить определители.

7.1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$. **7.2.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$. **7.3.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

7.4. $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ -4 & 6 & -1 & -2 \end{vmatrix}$. **7.5.** $\begin{vmatrix} 3 & -9 & -3 & -6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ -4 & 5 & 3 & 2 \\ -7 & 8 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

7.6. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$. **7.7.** $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & 7 & 5 \\ -4 & 9 & -8 & -5 \\ -3 & 2 & -5 & 3 \end{vmatrix}$.

7.8. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 65 & 74 & 83 & 92 \end{vmatrix}$. **7.9.** $\begin{vmatrix} 27 & 44 & 40 & 55 \\ 20 & 64 & 21 & 40 \\ 13 & -20 & -13 & 24 \\ 46 & 45 & -55 & 84 \end{vmatrix}$.

7.10. $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 8 & 15 & 12 & 14 & 10 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 7 & 12 & 11 & 11 & 8 \\ 7 & 14 & 11 & 13 & 9 \end{vmatrix}$. **7.11.** $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

[1] В ряде случаев целесообразно предварительно уменьшить абсолютную величину элементов матриц элементарными преобразованиями.

7.12. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 5 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$. **7.13.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

7.14. $\begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 75 & 24 & 45 & 57 & 65 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 86 & 31 & 20 & 30 & 71 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}$. **7.15.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 7 & 1 & 11 \\ 7 & 1 & 11 & 1 & 13 & 1 \\ 1 & 11 & 1 & 13 & 1 & 17 \end{vmatrix}$.

7.16. $\begin{vmatrix} 2000 & 2001 & 2002 & 2003 \\ 1999 & 2001 & 2000 & 1998 \\ 1999 & 1999 & 2002 & 1998 \\ 2002 & 2004 & 2003 & 2009 \end{vmatrix}$. **7.17.** $\begin{vmatrix} 1111 & 1112 & 1113 & 1114 \\ 2111 & 2112 & 2113 & 3114 \\ 3111 & 3112 & 3113 & 4114 \\ 4111 & 4112 & 4113 & 6114 \end{vmatrix}$.

Вычислить определители[2], приводя их матрицы к треугольному виду.

7.18. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 1 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 1 \end{vmatrix}$. **7.19.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$.

7.20. $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 4 & \ldots & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 4 & \ldots & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 5 & \ldots & 4 & 4 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 4 & 4 & 4 & \ldots & 5 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & \ldots & 4 & 5 \end{vmatrix}$. **7.21.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

7.22. $\begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & n & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & n & \ldots & 1 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & n & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & n \end{vmatrix}$. **7.23.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & -n \\ 1 & 1 & \ldots & -n & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & -n & \ldots & 1 & 1 \\ -n & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

---

[2] Всюду, где по виду определителя нельзя узнать его порядок, предполагается, что порядок равен n.

7.24. $\begin{vmatrix} x & a & a & \dots & a & a \\ a & x & a & \dots & a & a \\ a & a & x & \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a & a & \dots & x & a \\ a & a & a & \dots & a & x \end{vmatrix}$. **7.25.** $\begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$.

7.26. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n & n+1 \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n & n+1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 & n+1 \\ -1 & -2 & -3 & \dots & -n & 0 \end{vmatrix}$. **7.27.** $\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ x_1 & x_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{vmatrix}$.

7.28. $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_0 & x & a_2 & \dots & a_n \\ a_0 & a_1 & x & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & x \end{vmatrix}$. **7.29.** $\begin{vmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 3 & 2 & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & n-1 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ n & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$.

7.30. $\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n & n \\ n & 2 & n & \dots & n & n \\ n & n & 3 & \dots & n & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n-1 & n \\ n & n & n & \dots & n & n \end{vmatrix}$. **7.31.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & \dots & a_1 & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & \dots & a_2 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & a_{n-1} & a_{n-1} \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n & a_n \end{vmatrix}$.

7.32. $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1+b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2+b_2 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}$. **7.33.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x & x & \dots & 0 & x \\ 1 & x & x & \dots & x & 0 \end{vmatrix}$.

7.34. $\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & \dots & a_1 & a_1-b_1 & a_1 \\ a_2 & \dots & a_2-b_2 & a_2 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n-b_n & \dots & a_n & a_n & a_n \end{vmatrix}$. **7.35.** $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}$.

7.36. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots & n-1 & n \\ 1 & 1 & 2 & 3 & \ldots & n-2 & n-1 \\ 1 & x & 1 & 2 & \ldots & n-3 & n-2 \\ 1 & x & x & 1 & \ldots & n-4 & n-3 \\ \hdotsfor{7} \\ 1 & x & x & x & \ldots & x & 1 \end{vmatrix}.$$

7.37. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \ldots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \ldots & n & n & n \\ \hdotsfor{7} \\ n-1 & n & n & \ldots & n & n & n \\ n & n & n & \ldots & n & n & n \end{vmatrix}.$$

7.38. $$\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1-b_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 1-b_n \end{vmatrix}.$$

7.39. $$\begin{vmatrix} a & a+h & a+2h & \ldots & a+(n-2)h & a+(n-1)h \\ -a & a & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -a & a & \ldots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -a & a \end{vmatrix}.$$

7.40. $$\begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -a_n & a_n \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

7.41. Вычислить определитель квадратной матрицы A порядка n, элементы которой заданы условиями $a_{ij} = \min(i,j)$.

7.42. Вычислить определитель квадратной матрицы A порядка n, элементы которой заданы условиями $a_{ij} = \max(i,j)$.

7.43. Вычислить определитель квадратной матрицы A порядка n, элементы которой заданы условиями $a_{ij} = pi + qj + s$, где p, q, s – вещественные постоянные.

7.44. Вычислить определитель квадратной матрицы A порядка n, элементы которой заданы условиями $a_{ij} = i^2 + j^2$.

7.45. Вычислить определитель квадратной матрицы A порядка n, элементы которой заданы условиями $a_{ij} = \operatorname{sgn}(i - j)$.

7.46. Вычислить определитель квадратной матрицы A порядка n, элементы которой заданы условиями $a_{ij} = |i - j|$.

7.47. Вычислить определитель квадратной матрицы A порядка n, элементы которой заданы условиями $a_{ij} = a^{|i-j|}$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

Вычислить следующие определители трехдиагональных матриц.

7.48. $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$. **7.49.** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

7.50. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 0 \end{vmatrix}$. **7.51.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

7.52. $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & 5 \end{vmatrix}$. **7.53.** $\begin{vmatrix} 7 & 6 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 6 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & 7 \end{vmatrix}$.

7.54. [3] $\begin{vmatrix} 13 & 8 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -4 & -3 & -4 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -4 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 5 & 1 \end{vmatrix}$. **7.55.** $\begin{vmatrix} 12 & 9 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 4 & 12 & 9 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 12 & \ldots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 12 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 4 & 12 \end{vmatrix}$.

[3] Порядок определителя $n \geq 3$.

7.56. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{vmatrix}$. **7.57.** [4] $\begin{vmatrix} -3 & 8 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 9 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 9 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 6 \end{vmatrix}$.

7.58.[4] $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{8}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. **7.59.** $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

7.60. $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{vmatrix}$. **7.61.**[5] $\begin{vmatrix} 7 & 4 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 5 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 5 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{9}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 7 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

7.62. $\begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x & 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & 1+x^2 & x & \dots & 0 & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1+x^2 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$.

[4] Порядок определителя $n \geq 3$.

[5] Порядок определителя $n \geq 4$.

7.63. $$\begin{array}{|cccccccccccccc|l}
3 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \left.\right\} k \text{ строк} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 & 3 & 0 & \left.\right\} l \text{ строк} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 & 5 & 3 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 2 & 5 &
\end{array}$$

7.64. Доказать, что n-й член ряда Фибоначчи равен определителю порядка n вида

$$\begin{vmatrix}
1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
-1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\
0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1
\end{vmatrix}.$$

Найти общую формулу для n-го члена.

7.65. Доказать равенство

$$\begin{vmatrix}
\cos\alpha & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
1 & 2\cos\alpha & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 1 & 2\cos\alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2\cos\alpha & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\cos\alpha
\end{vmatrix} = \cos n\alpha\,,$$

определитель в левой части которого – порядка n.

7.66. Доказать равенство, не вычисляя самих определителей:

$$\begin{vmatrix}
a_1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
c_1 & a_2 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & c_2 & a_3 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{n-1} & a_n
\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}
a_1 & b_1c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
1 & a_2 & b_2c_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 1 & a_3 & b_3c_3 & \dots & 0 & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & b_{n-1}c_{n-1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_n
\end{vmatrix}$$

Применяя метод рекуррентных соотношений, вычислить определители.

7.67. $$\begin{vmatrix} a_0+a_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & a_1+a_2 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_2+a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2}+a_{n-1} & a_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & a_{n-1}+a_n \end{vmatrix}.$$

7.68. $$\begin{vmatrix} 1-b_1 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_2 & b_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-b_{n-1} & b_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1-b_n \end{vmatrix}.$$

7.69. $$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ n-1 & x & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & n-2 & x & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & x & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x \end{vmatrix}.$$

7.70. $$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$ **7.71.** $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_n \end{vmatrix}.$$

7.72.[6] $$\begin{vmatrix} a & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & a & \dots & b & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b & \dots & a & 0 \\ b & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix}.$$ **7.73.** $$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & \dots & b_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{2n-1} & \dots & a_{2n-1} & 0 \\ b_{2n} & 0 & \dots & 0 & a_{2n} \end{vmatrix}.$$

[6] Порядок определителя равен $2n$.

7.74. $\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$. **7.75.** $\begin{vmatrix} c_0 & b & b & \dots & b \\ a & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ a & 0 & c_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & 0 & 0 & \dots & c_n \end{vmatrix}$.

7.75.1. $\begin{vmatrix} c_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ a_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & 0 & c_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & 0 & 0 & \dots & c_n \end{vmatrix}$.

7.76. $\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$.

7.77. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}$.

7.78. $\begin{vmatrix} n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & x \end{vmatrix}$.

7.79. $\begin{vmatrix} a_1 & -a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & -a_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$.

7.80. $$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -y_1 & x_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -y_n & x_n \end{vmatrix}.$$

7.81. $$\begin{vmatrix} h & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ hx & h & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ hx^2 & hx & h & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ hx^{n-1} & hx^{n-2} & hx^{n-3} & hx^{n-4} & \dots & h & -1 \\ hx^n & hx^{n-1} & hx^{n-2} & hx^{n-3} & \dots & hx & h \end{vmatrix}.$$

Используя значение определителя Вандермонда, вычислить.

7.82. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \dots & 2^n \\ 1 & 3 & 3^2 & \dots & 3^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & n+1 & (n+1)^2 & \dots & (n+1)^n \end{vmatrix}.$$

7.83. $$\begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \dots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \dots & (a-n)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a & a-1 & \dots & a-n \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

7.84. $$\begin{vmatrix} (x+a_1)^n & (x+a_1)^{n-1} & \dots & x+a_1 & 1 \\ (x+a_2)^n & (x+a_2)^{n-1} & \dots & x+a_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (x+a_{n+1})^n & (x+a_{n+1})^{n-1} & \dots & x+a_{n+1} & 1 \end{vmatrix}.$$

7.85. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & \dots & x_n+1 \\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & \dots & x_n^2+x_n \\ x_1^3+x_1^2 & x_2^3+x_2^2 & \dots & x_n^3+x_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

7.86. $$\begin{vmatrix} \cos^{n-1}\varphi_1 & \cos^{n-2}\varphi_1 & \ldots & \cos\varphi_1 & 1 \\ \cos^{n-1}\varphi_2 & \cos^{n-2}\varphi_2 & \ldots & \cos\varphi_2 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \cos^{n-1}\varphi_n & \cos^{n-2}\varphi_n & \ldots & \cos\varphi_n & 1 \end{vmatrix}.$$

7.87. $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \sin\varphi_1 & \sin\varphi_2 & \ldots & \sin\varphi_n \\ \sin^2\varphi_1 & \sin^2\varphi_2 & \ldots & \sin^2\varphi_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sin^{n-1}\varphi_1 & \sin^{n-1}\varphi_2 & \ldots & \sin^{n-1}\varphi_n \end{vmatrix}.$$

7.88. $$\begin{vmatrix} (2n-1)^n & (2n-2)^n & \ldots & n^n & (2n)^n \\ (2n-1)^{n-1} & (2n-2)^{n-1} & \ldots & n^{n-1} & (2n)^{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 2n-1 & 2n-2 & \ldots & n & 2n \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

7.89. $$\begin{vmatrix} 1 & f_1(x_1) & f_2(x_1) & \ldots & f_{n-1}(x_1) \\ 1 & f_1(x_2) & f_2(x_2) & \ldots & f_{n-1}(x_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & f_1(x_n) & f_2(x_n) & \ldots & f_{n-1}(x_n) \end{vmatrix},$$

где $f_k(x) = x^k + a_{k1}x^{k-1} + a_{k2}x^{k-2} + \ldots + a_{kk}$.

7.90. $$\begin{vmatrix} \frac{x_1}{x_1-1} & \frac{x_2}{x_2-1} & \ldots & \frac{x_n}{x_n-1} \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \ldots & x_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

7.91. $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ 1 & 2^3 & 3^3 & \ldots & n^3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 2^{2n-1} & 3^{2n-1} & \ldots & n^{2n-1} \end{vmatrix}.$$

7.92. $$\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \ldots & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \ldots & b_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \ldots & b_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

7.93. $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} & x_n^n \end{vmatrix}$. **7.94.** $\begin{vmatrix} 1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$.

7.95. $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-2} & (x_2+x_3+\dots+x_n)^{n-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2} & (x_1+x_3+\dots+x_n)^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} & (x_1+x_2+\dots+x_{n-1})^{n-1} \end{vmatrix}$.

7.96. $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-2} & x_2x_3\dots x_n \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-2} & x_1x_3\dots x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-2} & x_1x_2\dots x_{n-1} \end{vmatrix}$.

7.97. Вычислить определитель квадратной матрицы A порядка n, элементы которой заданы условиями

$$a_{ij} = \lambda_i^{n-j}(1+\lambda_i^2)^{j-1}.$$

Применяя метод выделения линейных множителей, вычислить определители.

7.98. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 1 & x+1 & 3 & \dots & n \\ 1 & 2 & x+1 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & x+1 \end{vmatrix}$. **7.99.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3-x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-x \end{vmatrix}$.

7.100. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$. **7.101.** $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}$.

7.102. $\begin{vmatrix} -x & a & b & c \\ a & -x & c & b \\ b & c & -x & a \\ c & b & a & -x \end{vmatrix}$. **7.103.** $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x \end{vmatrix}$.

7.104. $\begin{vmatrix} x+a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & x+a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x+a_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x+a_n \end{vmatrix}$.

7.105. $\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 & \dots & a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x & \dots & a_{n-1} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n & 1 \end{vmatrix}$.

7.106. $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & \dots & x^n \\ a_{11} & 1 & x & x^2 & \dots & x^{n-1} \\ a_{21} & a_{22} & 1 & x & \dots & x^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & 1 \end{vmatrix}$.

Применяя метод выделения линейных множителей, решить уравнение $|A - \lambda I| = 0$ для следующих матриц A.

7.107. $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 \\ -3 & 1 & -6 \end{bmatrix}$. **7.108.** $A = \begin{bmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}$.

7.109. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. **7.110.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 6 \\ -3 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

7.111. $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$. **7.112.** $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

7.113. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -2 \\ -1 & -3 & -2 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & -4 \\ -3 & -9 & -6 & 6 \end{bmatrix}$. **7.114.** $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \\ -6 & 6 & -6 & -4 \end{bmatrix}$.

7.115.[7] $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}$. **7.116.** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & \dots & n \end{bmatrix}$.

Вычислить определители, раскладывая их в сумму определителей.

7.117. $\begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & x_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & x_3 & \dots & a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & x_n \end{vmatrix}$. **7.118.** $\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_1 - b_2 & \dots & a_1 - b_n \\ a_2 - b_1 & a_2 - b_2 & \dots & a_2 - b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n - b_1 & a_n - b_2 & \dots & a_n - b_n \end{vmatrix}$.

7.119. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ x_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_2 & x_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ x_3 & x_3 & x_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-1} & x_{n-1} & x_{n-1} & x_{n-1} & \dots & a_{n-1} & 0 \\ x_n & x_n & x_n & x_n & \dots & x_n & a_n \end{vmatrix}$.

7.120. $\begin{vmatrix} (x_1 - a_1)^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ a_1^2 & (x_2 - a_2)^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & (x_n - a_n)^2 \end{vmatrix}$.

7.121. $\begin{vmatrix} x_1 + a_1 b_1 & a_1 b_2 & \dots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & x_2 + a_2 b_2 & \dots & a_2 b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \dots & x_n + a_n b_n \end{vmatrix}$.

7.122. $\begin{vmatrix} 0 & x & x & \dots & x \\ y & 0 & x & \dots & x \\ y & y & 0 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y & y & y & \dots & 0 \end{vmatrix}$. **7.123.** $\begin{vmatrix} a & x & x & \dots & x \\ y & a & x & \dots & x \\ y & y & a & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ y & y & y & \dots & a \end{vmatrix}$.

[7] Порядок матрицы равен n.

7.124. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & a_1 & x & x & \ldots & x \\ 1 & y & a_2 & x & \ldots & x \\ 1 & y & y & a_3 & \ldots & x \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 1 & y & y & y & \ldots & a_n \end{vmatrix}.$

Вычислить определители, раскладывая их в произведение определителей.

7.125. $\begin{vmatrix} \cos(\alpha_1-\beta_1) & \cos(\alpha_1-\beta_2) & \ldots & \cos(\alpha_1-\beta_n) \\ \cos(\alpha_2-\beta_1) & \cos(\alpha_2-\beta_2) & \ldots & \cos(\alpha_2-\beta_n) \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \cos(\alpha_n-\beta_1) & \cos(\alpha_n-\beta_2) & \ldots & \cos(\alpha_n-\beta_n) \end{vmatrix}.$

7.126. $\begin{vmatrix} \sin 2\alpha_1 & \sin(\alpha_1+\alpha_2) & \ldots & \sin(\alpha_1+\alpha_n) \\ \sin(\alpha_2+\alpha_1) & \sin 2\alpha_2 & \ldots & \sin(\alpha_2+\alpha_n) \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \sin(\alpha_n+\alpha_1) & \sin(\alpha_n+\alpha_2) & \ldots & \sin 2\alpha_n \end{vmatrix}.$

7.127. $\begin{vmatrix} \dfrac{1-a_1^nb_1^n}{1-a_1b_1} & \dfrac{1-a_1^nb_2^n}{1-a_1b_2} & \ldots & \dfrac{1-a_1^nb_n^n}{1-a_1b_n} \\ \dfrac{1-a_2^nb_1^n}{1-a_2b_1} & \dfrac{1-a_2^nb_2^n}{1-a_2b_2} & \ldots & \dfrac{1-a_2^nb_n^n}{1-a_2b_n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ \dfrac{1-a_n^nb_1^n}{1-a_nb_1} & \dfrac{1-a_n^nb_2^n}{1-a_nb_2} & \ldots & \dfrac{1-a_n^nb_n^n}{1-a_nb_n} \end{vmatrix}.$

7.128. $\begin{vmatrix} (a_0+b_0)^n & (a_0+b_1)^n & \ldots & (a_0+b_n)^n \\ (a_1+b_0)^n & (a_1+b_1)^n & \ldots & (a_1+b_n)^n \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ (a_n+b_0)^n & (a_n+b_1)^n & \ldots & (a_n+b_n)^n \end{vmatrix}.$

7.129. $\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \ldots & s_{n-1} \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_n \\ s_2 & s_3 & s_4 & \ldots & s_{n+1} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \ldots & s_{2n-2} \end{vmatrix}$, где $s_k = x_1^k + \ldots + x_n^k$.

7.130. $\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \dots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 & \dots & s_n & x \\ s_2 & s_3 & s_4 & \dots & s_{n+1} & x^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n-1} & s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-2} & x^n \end{vmatrix}$, где $s_k = x_1^k + \ldots + x_n^k$.

§8. Смешанные задачи

8.1.[8] Доказать, что если квадратная матрица второго порядка нильпотентна, то ее индекс нильпотентности не превосходит двух.

8.2. Доказать, что нильпотентная матрица второго порядка имеет нулевой след.

8.3. Доказать, что все члены определителя порядка $n \geq 3$, не могут быть одновременно положительными.

8.4. Доказать, что:

а) элементарное преобразование блочной матрицы[9] первого типа может изменить только знак определителя;

б) в результате элементарного преобразования блочной матрицы второго типа, т.е. умножения всех клеток какой-либо строки слева или всех клеток какого-либо столбца справа на квадратную матрицу D, ее определитель умножается на $\det D$;

в) элементарное преобразование блочной матрицы третьего типа не меняет ее определитель.

8.5. Известно, что определитель матрицы A порядка n равен d. Найти определители следующих блочных матриц:

а) $\begin{bmatrix} A & A^2 \\ -I & A \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} A & A^2 \\ A^3 & A^4 \end{bmatrix}$.

8.6. Доказать, что если матрица A ортогональная, то

$$\begin{vmatrix} I & A^T \\ A & I \end{vmatrix} = 0.$$

8.7. Доказать, что если A, B, C – квадратные матрицы одного порядка, то:

а) $\begin{vmatrix} I & A \\ B & I \end{vmatrix} = \det(I - AB)$; б) $\begin{vmatrix} I & A \\ B & I \end{vmatrix} = \det(I - BA)$;

[8] См. также задачи 2.35, 16.56.

[9] См. задачу 3.23.

в) $\begin{vmatrix} A & B \\ C & I \end{vmatrix} = \det(A - BC)\,;$ г) $\begin{vmatrix} AB & B \\ A & I \end{vmatrix} = \det[A, B]\,.$

8.8.[10] Выяснить, для любых ли квадратных матриц A, B, C, D одного порядка справедливо равенство

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(AD - BC)\,.$$

8.9. Пусть A и B – квадратные матрицы порядков m и n соответственно. Доказать, что определитель их кронекерова произведения вычисляется по формуле

$$\det(A \otimes B) = (\det A)^n \cdot (\det B)^m.$$

8.10. Доказать, что определитель кососимметрической матрицы A четного порядка не изменится, если ко всем ее элементам прибавить одно и то же число.

8.11. Матрица B получена из стохастической матрицы A порядка n вычитанием из каждого элемента числа 1. Доказать, что

$$\det B = (1 - n) \det A.$$

8.12. Пусть s_k – k-я строчная сумма квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n. Доказать, что

$$\begin{vmatrix} s_1 - a_{11} & s_1 - a_{12} & \ldots & s_1 - a_{1n} \\ s_2 - a_{21} & s_2 - a_{22} & \ldots & s_2 - a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ s_n - a_{n1} & s_n - a_{n2} & \ldots & s_n - a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1) \det A.$$

8.13. Доказать, что для любой матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & x_1 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & x_n \\ y_1 & \ldots & y_n & z \end{vmatrix} = z \det A - \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j A_{ij}\,,$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в матрице A.

8.14. Доказать, что для любой матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + x & a_{12} + x & \ldots & a_{1n} + x \\ a_{21} + x & a_{22} + x & \ldots & a_{2n} + x \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} + x & a_{n2} + x & \ldots & a_{nn} + x \end{vmatrix} = \det A + x \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\,,$$

[10] См. также задачи 9.81 и 9.82.

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в матрице A.

8.15. Пусть $f(t) = (c_1 - t)(c_2 - t)\ldots(c_n - t)$. Доказать, что

$$\begin{vmatrix} c_1 & a & a & \ldots & a \\ b & c_2 & a & \ldots & a \\ b & b & c_3 & \ldots & a \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b & b & b & \ldots & c_n \end{vmatrix} = \frac{af(b) - bf(a)}{a-b}.$$

8.16. Доказать, что для любой матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$:

$$\begin{vmatrix} x_1a_{11} & x_2a_{12} & \ldots & x_na_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_1a_{n1} & x_2a_{n2} & \ldots & x_na_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= |A| \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

8.17. Доказать, что сумма алгебраических дополнений всех элементов матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ равна определителю

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_{21} - a_{11} & a_{22} - a_{12} & \ldots & a_{2n} - a_{1n} \\ a_{31} - a_{11} & a_{32} - a_{12} & \ldots & a_{3n} - a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} - a_{11} & a_{n2} - a_{12} & \ldots & a_{nn} - a_{1n} \end{vmatrix}.$$

8.18. Доказать, что сумма алгебраических дополнений всех элементов матрицы не изменится, если ко всем ее элементам прибавить одно и то же число.

8.18.1. Доказать, что любой определитель равен полусумме двух определителей, один из которых получен из данного прибавлением ко всем элементам его матрицы числа h, а другой – аналогичным вычитанием числа h.

8.19. Доказать, что если все элементы одной строки (столбца) матрицы равны единице, то сумма алгебраических дополнений всех элементов этой матрицы равна ее определителю.

8.20. Доказать, что

$$\begin{vmatrix} a_1c_1 & a_2d_1 & a_1c_2 & a_2d_2 \\ a_3c_1 & a_4d_1 & a_3c_2 & a_4d_2 \\ b_1c_3 & b_2d_3 & b_1c_4 & b_2d_4 \\ b_3c_3 & b_4d_3 & b_3c_4 & b_4d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d_1 & d_2 \\ d_3 & d_4 \end{vmatrix}.$$

8.21. Пусть A и B – квадратные матрицы порядка n. Доказать, что

$$|A| \cdot |B| = \sum_{k=1}^{n} |A_k| \cdot |B_k|,$$

где A_k и B_k получены из A и B обменом столбцов с номерами 1 и k соответственно (т.е. первый столбец матрицы A и k-й столбец матрицы B меняются местами).

8.22. Пусть A и B – матрицы размера $n \times m$ и $m \times n$ соответственно. Доказать, что:

а) при $n > m$ определитель произведения AB равен нулю;

б) при $n \le m$ выполнено равенство (*формула Бине–Коши*)

$$\det AB = \sum_{1 \le k_1 < \ldots < k_n \le m} A_{k_1 \ldots k_n} B^{k_1 \ldots k_n},$$

где $A_{k_1 \ldots k_n}$ – минор n-го порядка, расположенный в столбцах матрицы A с номерами $k_1, \ldots, k_n$, а $B^{k_1 \ldots k_n}$ – минор n-го порядка, расположенный в строках матрицы B с номерами $k_1, \ldots, k_n$.

8.23. Доказать, что сумма главных миноров k-го порядка матрицы $A^T A$ равна сумме квадратов всех миноров k-го порядка матрицы A.

8.24. *Континуантой* называется определитель

$$(a_1 a_2 \ldots a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & a_2 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & a_3 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{n-1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & a_n \end{vmatrix}.$$

а) Записать $(a_1 a_2 \ldots a_n)$ в виде многочлена от $a_1, \ldots, a_n$.

б) Написать разложение континуанты по первым k строкам.

в) Установить следующую связь континуанты с непрерывными дробями:

$$\frac{(a_1a_2\dots a_n)}{(a_2a_3\dots a_n)} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

8.25. Определитель квадратной матрицы A, элементы которой заданы условиями $a_{ij} = (x_i + y_j)^{-1}$, называется *определителем Коши*. Доказать, что

$$\det A = \prod_{n\ge i>j\ge 1} (x_i - x_j)(y_i - y_j) \Big/ \prod_{i,j=1}^{n} (x_i + y_j).$$

8.26. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \dots & \frac{1}{2n-1} \end{vmatrix}.$$

8.27. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix}.$$

8.28. Перемножая матрицы определителей

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_2 & -x_1 & -x_4 & x_3 \\ x_3 & x_4 & -x_1 & -x_2 \\ x_4 & -x_3 & x_2 & -x_1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ y_2 & -y_1 & -y_4 & y_3 \\ y_3 & y_4 & -y_1 & -y_2 \\ y_4 & -y_3 & y_2 & -y_1 \end{vmatrix},$$

доказать тождество Эйлера:

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2)=$$
$$=(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4)^2+(x_1y_2-x_2y_1-x_3y_4+x_4y_3)^2+$$
$$+(x_1y_3+x_2y_4-x_3y_1-x_4y_2)^2+(x_1y_4-x_2y_4+x_3y_2-x_4y_1)^2.$$

8.29. Вычислить определитель квадратной матрицы A порядка $n \geq 2$, элементы которой заданы условиями $a_{ij} = f_i(x_j)$, где $x_j \in \mathbb{R}$ – произвольные числа, а $f_i(t)$ – произвольные многочлены степени не выше $n-2$.

8.30. Пусть $f(t) = c_0t^n + c_1t^{n-1} + \ldots + c_n$ – многочлен n-й степени и элементы квадратной матрицы A порядка $n+1$ вычисляются по формулам $a_{ij} = f(t)$ при $t = x + h(i+j-2)$, где x и h фиксированы. Доказать, что
$$\det A = (-h^2)^{n(n+1)/2}(n!c_0)^{n+1}.$$

Комбинируя различные методы, вычислить определители.

8.31. $\begin{vmatrix} 0 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ b_1 & 0 & a_3 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & 0 & \ldots & a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & 0 \end{vmatrix}$. **8.32.** $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ x & 1 & 2 & \ldots & n-1 \\ x & x & 1 & \ldots & n-2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x & x & x & \ldots & 1 \end{vmatrix}$.

8.33. $\begin{vmatrix} 1 & x_1(x_1-1) & x_1^2(x_1-1) & \ldots & x_1^{n-1}(x_1-1) \\ 1 & x_2(x_2-1) & x_2^2(x_2-1) & \ldots & x_2^{n-1}(x_2-1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n(x_n-1) & x_n^2(x_n-1) & \ldots & x_n^{n-1}(x_n-1) \end{vmatrix}$.

8.34. $\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \ldots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \ldots & 1+x_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \ldots & 1+x_n^n \end{vmatrix}$.

8.35. $\begin{vmatrix} 1+a_1+b_1 & a_1+b_2 & \ldots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & 1+a_2+b_2 & \ldots & a_2+b_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \ldots & 1+a_n+b_n \end{vmatrix}$.

8.36. $\begin{vmatrix} x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \ldots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & x_2y_2 & \ldots & 1+x_2y_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \ldots & x_ny_n \end{vmatrix}$.

8.37. $\begin{vmatrix} a_1-b_1+x & a_1-b_2 & \dots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2+x & \dots & a_2-b_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \dots & a_n-b_n+x \end{vmatrix}.$

8.38. $\begin{vmatrix} a^p-x & a^{p+1}-x & \dots & a^{p+n-1}-x \\ a^{p+n}-x & a^{p+n+1}-x & \dots & a^{p+2n-1}-x \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{p+n(n-1)}-x & a^{p+n(n-1)+1}-x & \dots & a^{p+n^2-1}-x \end{vmatrix}.$

8.38.1. $\begin{vmatrix} a_1-a_0 & a_1^2-a_0^2 & \dots & a_1^n-a_0^n \\ a_2-a_0 & a_2^2-a_0^2 & \dots & a_2^n-a_0^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n-a_0 & a_n^2-a_0^2 & \dots & a_n^n-a_0^n \end{vmatrix}.$

8.39. $\begin{vmatrix} 1-x & a & a^2 & \dots & a^{n-1} \\ a & a^2-x & a^3 & \dots & a^n \\ a^2 & a^3 & a^4-x & \dots & a^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a^{n-1} & a^n & a^{n+1} & \dots & a^{2n-2}-x \end{vmatrix}.$

8.40. $\begin{vmatrix} x+a_1 & x & x & \dots & x \\ x & x+a_2 & x & \dots & x \\ x & x & x+a_3 & \dots & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & x & x & \dots & x+a_n \end{vmatrix}.$

8.41. $\begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \dots & C_n^{n-2} & C_n^{n-1} & C_n^n \\ 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & C_{n-1}^3 & \dots & C_{n-1}^{n-2} & C_{n-1}^{n-1} & 0 \\ 1 & C_{n-2}^1 & C_{n-2}^2 & C_{n-2}^3 & \dots & C_{n-2}^{n-2} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & C_1^1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}.$

8.42. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & C_2^1 & C_3^1 & \dots & C_n^1 \\ 1 & C_3^2 & C_4^2 & \dots & C_{n+1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & C_n^{n-1} & C_{n+1}^{n-1} & \dots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix}.$

8.43. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ C_m^1 & C_{m+1}^1 & \ldots & C_{m+n}^1 \\ C_{m+1}^2 & C_{m+2}^2 & \ldots & C_{m+n+1}^2 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ C_{m+n-1}^n & C_{m+n}^n & \ldots & C_{m+2n-1}^n \end{vmatrix}.$

8.44. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & C_n^3 & \ldots & C_n^{n-1} \end{vmatrix}.$

8.45. $\begin{vmatrix} C_{m+n}^n & C_{m+n+1}^n & \ldots & C_{m+2n}^n \\ C_{m+n+1}^n & C_{m+n+2}^n & \ldots & C_{m+2n+1}^n \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ C_{m+2n}^n & C_{m+2n+1}^n & \ldots & C_{m+3n}^n \end{vmatrix}.$

8.46. $\begin{vmatrix} 1 & C_n^1 & C_n^2 & \ldots & C_n^n \\ 1 & C_{n+1}^1 & C_{n+1}^2 & \ldots & C_{n+1}^n \\ 1 & C_{n+2}^1 & C_{n+2}^2 & \ldots & C_{n+2}^n \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & C_{2n}^1 & C_{2n}^2 & \ldots & C_{2n}^n \end{vmatrix}.$

8.47. $\begin{vmatrix} 1 & C_m^1 & C_m^2 & \ldots & C_m^n \\ 1 & C_{m+1}^1 & C_{m+1}^2 & \ldots & C_{m+1}^n \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & C_{m+n}^1 & C_{m+n}^2 & \ldots & C_{m+n}^n \end{vmatrix}.$

8.48. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & C_1^1 & 0 & \ldots & 0 & x \\ 1 & C_2^1 & C_2^2 & \ldots & 0 & x^2 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 1 & C_n^1 & C_n^2 & \ldots & C_n^{n-1} & x^n \end{vmatrix}.$

8.49. Доказать, что определитель квадратной матрицы A порядка n с элементами $a_{ij} = C_{im}^j$, где $n \leq m$, вычисляется по формуле

$$\det A = m^{n(n+1)/2}.$$

8.50. *Определителем Вронского* или *вронскианом* системы $n-1$ раз дифференцируемых функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, …, $f_n(x)$ называется определитель

$$W(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_1'(x) & f_1''(x) & \ldots & f_1^{(n-1)}(x) \\ f_2(x) & f_2'(x) & f_2''(x) & \ldots & f_2^{(n-1)}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_n(x) & f_n'(x) & f_n''(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Вычислить вронскианы следующих систем функций:

а) $W(e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \ldots, e^{\alpha_n x})$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ произвольны;

б) $W(x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, \ldots, x^{\alpha_n})$, где числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ таковы, что ни одно из них не совпадает с числами $0, 1, \ldots, n-2$.

8.51. Доказать, что для любой числовой матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ выполнено соотношение

$$W\left(\sum_{i=1}^n a_{1i}f_i, \sum_{i=1}^n a_{2i}f_i, \ldots, \sum_{i=1}^n a_{ni}f_i\right) = \det A \cdot W(f_1, f_2, \ldots, f_n).$$

8.52. Доказать, что для любой $n-1$ раз дифференцируемой функции $\varphi(x)$ имеют место равенства:

а) $W(\varphi f_1, \varphi f_2, \ldots, \varphi f_n) = \varphi^n W(f_1, f_2, \ldots, f_n)$;

б) $W(f_1(\varphi(x)), f_2(\varphi(x)), \ldots, f_n(\varphi(x))) =$

$$= (\varphi'(x))^{n(n-1)/2}\, W(f_1(y), f_2(y), \ldots, f_n(y))\big|_{y=\varphi(x)}.$$

8.53. Доказать, что имеют место равенства:

а) $W(1, f_2, f_3, \ldots, f_n) = W(f_2', f_3', \ldots, f_n')$;

б) $W\left[\left(\dfrac{f_2}{f_1}\right)', \left(\dfrac{f_3}{f_1}\right)', \ldots, \left(\dfrac{f_n}{f_1}\right)'\right] = \dfrac{1}{f_1^n} W(f_1, f_2, \ldots, f_n)$;

в) $\dfrac{d}{dx}\dfrac{W(f_1, \ldots, f_{n-2}, f_n)}{W(f_1, \ldots, f_{n-2}, f_{n-1})} = \dfrac{W(f_1, \ldots, f_{n-2})W(f_1, \ldots, f_n)}{(W(f_1, \ldots, f_{n-1}))^2}$.

8.54. Доказать, что

$$\frac{d}{dx}W(f_1, f_2, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_1'(x) & \ldots & f_1^{(n-2)}(x) & f_1^{(n)}(x) \\ f_2(x) & f_2'(x) & \ldots & f_2^{(n-2)}(x) & f_2^{(n)}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ f_n(x) & f_n'(x) & \ldots & f_n^{(n-2)}(x) & f_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}.$$

§9. Обратная матрица

Матрица A^{-1} называется *обратной к матрице* A, если

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Матрица A, для которой существует обратная матрица, называется *обратимой.*

Квадратная матрица A называется *вырожденной (особенной),* если $|A| = 0$, и *невырожденной (неособенной),* если $|A| \neq 0$.

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Матрица

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}, \tag{9.1}$$

составленная из алгебраических дополнений A_{ij} к элементам a_{ij} матрицы A, называется *присоединенной (взаимной)* к матрице A.

Теорема 9.1 (о фальшивом разложении определителя). *Сумма произведений элементов одной строки (столбца) матрицы на алгебраические дополнения к элементам другой ее строки (соответственно столбца) равна нулю.*

Из этой теоремы и теоремы Лапласа следует, что

$$A\widehat{A} = \widehat{A}A = |A| \cdot I. \tag{9.2}$$

Теорема 9.2 (критерий обратимости). *Матрица обратима тогда и только тогда, когда она не вырождена, при этом*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\widehat{A}. \tag{9.3}$$

Теорема 9.3 (о единственности обратной матрицы). *Если A - квадратная матрица и $AB = I$ (или $BA = I$), то $B = A^{-1}$.*

Пример 9.1. Найти обратную для невырожденной матрицы

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}.$$

Решение. Из (9.3) следует, что $A^{-1} = \dfrac{1}{\alpha\delta - \beta\gamma}\begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix}$. ■

Пример 9.2. Найти обратные матрицы для матриц элементарных преобразований P_{ij}, D_i, L_{ij}.

Решение. Заметим, что матрицы P_{ij}, D_i, L_{ij} невырождены: $|P_{ij}| = -1$, $|D_i| = \alpha \neq 0$, $|L_{ij}| = 1$. Использование формулы (9.3) для матриц уже третьего порядка утомительно, так как требует большого объема вычислений, поэтому поступим следующим образом. Пусть A – одна из матриц элементарных преобразований. Тогда требуется найти матрицу B такую, что $AB = I$ (из теоремы 9.3 следует, что $B = A^{-1}$). Переведем эту задачу на язык элементарных преобразований. Имеем $I = I(AB) = (IA)B$. Матрица IA получена из единичной матрицы I элементарным преобразованием столбцов, следовательно, матрица B должна "восстановить" матрицу I. Т.е., если $A = P_{ij}$, то матрица B должна еще раз "переставить" i-й и j-й столбцы и, тем самым,

$$P_{ij}^{-1} = P_{ij}; \tag{9.4}$$

если $A = L_{ij}$, то матрица B должна из i-го столбца IA "вычесть" j-й столбец, умноженный на β и, тем самым,

$$L_{ij}^{-1} = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & & \vdots & & \vdots & & \\ & \ddots & \vdots & & \vdots & & \\ & & 1 & & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots \\ & & \vdots & & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & -\beta & \cdots & 1 & \cdots & \cdots \\ & & \vdots & & \vdots & 1 & \\ & & \vdots & & \vdots & \ddots & \\ & & \vdots & & \vdots & & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccccc} & & i & & j & & \end{array} & \end{array}; \tag{9.5}$$

если $A = D_i$, то матрица B должна "разделить" i-й столбец IA на α и

$$D_i^{-1} = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccccc} 1 & & \vdots & & \\ & \ddots & \vdots & & \\ & 1 & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & 1/\alpha & \cdots & \cdots \\ & & \vdots & 1 & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & \vdots & & 1 \end{array}\right] \\ \begin{array}{ccccc} & & i & & \end{array} \end{array}. \ \blacksquare \tag{9.6}$$

Некоторые свойства обратной матрицы.

1. $I^{-1} = I$.
2. $|A^{-1}| = 1/|A|$.
3. $(A^{-1})^{-1} = A$.
4. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
5. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Теорема 9.4. *Произвольная невырожденная матрица элементарными преобразованиями только строк (только столбцов) может быть приведена к единичной матрице.*

Пример 9.3. Пользуясь элементарными преобразованиями строк, привести к единичной матрице следующую матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Решение. Приведем сначала матрицу A к треугольному виду, а затем аннулируем все элементы над главной диагональю:

$$A \to \left\{\begin{array}{l}\text{вычтем из 2-й строки 1-ю} \\ \text{строку, а из 3-й строки} \\ \text{удвоенную 1-ю строку}\end{array}\right\} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \to \left\{\begin{array}{l}\text{вычтем из 3-й} \\ \text{строки 2-ю}\end{array}\right\} \to$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \left\{\begin{array}{l}\text{вычтем из 1-й строки 3-ю} \\ \text{строку, а из 2-й строки} \\ \text{утроенную 3-ю строку}\end{array}\right\} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \left\{ \begin{array}{l} \text{прибавим к 1-й строке} \\ \text{удвоенную 2-ю строку и} \\ \text{умножим 2-ю строку на } -1 \end{array} \right\} \to I. \quad \blacksquare$$

Для получения обратной матрицы достаточно к строкам единичной матрицы I применить те преобразования, которые приводят матрицу A к единичной матрице. Для этого удобно составить расширенную матрицу $[A|I]$ и над строками этой матрицы выполнить те преобразования, которые матрицу A приводят к единичной; тогда на месте матрицы I окажется обратная матрица A^{-1}. Итак,

$$\boxed{A \mid I} \xmapsto{\text{преобразования строк}} \boxed{I \mid A^{-1}}. \tag{9.7}$$

Аналогично в столбцовом варианте

$$\boxed{\begin{array}{c} A \\ \hline I \end{array}} \xmapsto{\text{преобразования столбцов}} \boxed{\begin{array}{c} I \\ \hline A^{-1} \end{array}}. \tag{9.8}$$

Этот метод вычисления обратной матрицы называется *методом Жордана* или *методом Гаусса–Жордана.*

Если в расширенных матрицах (9.7) и (9.8) на место единичной матрицы I поставить матрицу B, то вместо матрицы A^{-1} получим в первом случае матрицу $A^{-1}B$, а во втором – BA^{-1}:

$$\boxed{A \mid B} \xmapsto{\text{преобразования строк}} \boxed{I \mid A^{-1}B},$$

$$\boxed{\begin{array}{c} A \\ \hline B \end{array}} \xmapsto{\text{преобразования столбцов}} \boxed{\begin{array}{c} I \\ \hline BA^{-1} \end{array}}.$$

Пример 9.4. Применяя метод Гаусса–Жордана, найти обратную матрицу к матрице, заданной в примере 9.3.

Решение. Применим все преобразования, выполненные в решении примера 9.3, к расширенной матрице $[A|I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & 9 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right].$$

Таким образом,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 6 & 9 & -7 \\ -2 & -4 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Пример 9.5. Найти матрицу X, удовлетворяющую равенству $AX = B$, если

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решение. Так как матрицы A и B квадратные, то $X = A^{-1}B$. Преобразуем расширенную матрицу:

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 4 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left\{\begin{array}{l} \text{прибавим к 3-} \\ \text{й строке 1-ю} \end{array}\right\} \to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right] \to$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{прибавим к} \\ \text{3-й строке} \\ \text{2-ю} \end{array}\right\} \to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \to \left\{\begin{array}{l} \text{прибавим ко 2-й строке} \\ \text{3-ю, а к 1-й строке удво-} \\ \text{енную 3-ю строку} \end{array}\right\} \to$$

$$\to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & 4 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right] \to \left\{\begin{array}{l} \text{вычтем из 1-й} \\ \text{строки 2-ю} \end{array}\right\} \to \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right].$$

Таким образом,

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

Пример 9.6. Найти матрицу X, удовлетворяющую равенству $XA = B$ для матриц A и B, заданных в примере 9.5.

Решение. Так как матрицы A и B квадратные, то $X = BA^{-1}$. Преобразуем расширенную матрицу:

$$\left[\begin{array}{rrr} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 4 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \to \left\{\begin{array}{l} \text{вычтем из 2-го столбца} \\ \text{1-й, а к 3-му прибавим} \\ \text{удвоенный 1-й столбец} \end{array}\right\} \to \left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \to$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{прибавим к} \\ \text{3-му столбцу} \\ \text{2-й} \end{array}\right\} \to \left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \to \left\{\begin{array}{l} \text{прибавим к} \\ \text{1-му и 2-му} \\ \text{столбцам 3-й} \end{array}\right\} \to \left[\begin{array}{rrr} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{array}\right].$$

Таким образом,

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}. \quad \blacksquare$$

ЗАДАЧИ

9.1. Привести пример необратимых матриц A и B, для которых $AB = I$.

Пользуясь присоединенной матрицей, найти обратные для следующих матриц.

9.2. $\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}$. **9.3.** $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$. **9.4.** $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$, $a^2+b^2\neq 0$.

9.5. $\begin{bmatrix} 3 & 6 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. **9.6.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

9.7. $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. **9.8.** $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 2 & -9 & 1 \\ 1 & -5 & -4 \end{bmatrix}$.

9.9. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. **9.10.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

9.11. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. **9.12.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

9.13. Доказать, что $A\widehat{A} = \widehat{A}A = |A|\cdot I$.

9.14. Доказать, что для любых квадратных матриц A и B порядка n и любого $\alpha \in \mathbb{R}$ справедливы соотношения:

а) $\widehat{\alpha A} = \alpha^{n-1}\widehat{A}$; б) $\widehat{A^T} = \widehat{A}^T$;

в) $\widehat{AB} = \widehat{B}\widehat{A}$; г) $\widehat{A_1} = |A|^{n-2}A$, если $A_1 = \widehat{A}$.

9.15. Привести пример квадратной матрицы порядка n, присоединенная к которой имеет лишь один ненулевой элемент, расположенный в заданной позиции (i, j).

9.16. Найти все матрицы A с неотрицательными элементами, для каждой из которых все элементы обратной матрицы A^{-1} также неотрицательны.

9.17. Пусть A и B – невырожденные матрицы одного порядка. Доказать, что матрицы A и B перестановочны тогда и только тогда, когда перестановочны матрицы в любой из следующих пар:

а) A и B^{-1}; б) A^{-1} и B; в) A^{-1} и B^{-1}; г) $\widehat{A}$ и B.

9.18. Как изменится обратная матрица A^{-1}, если в исходной матрице A:

а) переставить i-ю и j-ю строки;

б) i-ю строку умножить на число α, не равное нулю;

в) к i-й строке прибавить j-ю, умноженную на число β,

или сделать аналогичные элементарные преобразования столбцов?

9.19. Доказать, что обратная матрица для верхней (нижней) треугольной невырожденной матрицы будет треугольной матрицей такого же вида.

9.20. Доказать, что если $B = (b_{ij})$ – обратная матрица для верхней (нижней) треугольной невырожденной матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n, то элементы главной диагонали матрицы B определяются равенствами $b_{ii} = 1/a_{ii}$, $i = \overline{1,n}$, а остальные элементы находятся из следующих рекуррентных соотношений:

а) для элементов i-й строки верхней треугольной матрицы

$$b_{ij} = -a_{jj}^{-1} \sum_{k=i}^{j-1} b_{ik} a_{kj}, \quad j = \overline{i+1,n};$$

б) для элементов j-го столбца нижней треугольной матрицы

$$b_{ij} = -a_{ii}^{-1} \sum_{k=j}^{i-1} a_{ik} b_{kj}, \quad i = \overline{j+1,n}.$$

9.21. *Угловым минором* Δ_k порядка k квадратной матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называется ее главный минор, расположенный в строках и столбцах с номерами $1, 2, \ldots, k$.

1) Доказать, что если в квадратной матрице A угловые миноры Δ_1, $\Delta_2, \ldots$, Δ_{n-1} отличны от нуля, то A может быть разложена в произведение двух треугольных матриц – левой треугольной L и правой треугольной R: $A = LR$. Это представление матрицы A называется ее *треугольным разложением* или *LR-разложением.*

2) Выяснить, единственно ли треугольное разложение.

3) Привести пример квадратной матрицы, не имеющей треугольного разложения.

4) Доказать, что условие отличия от нуля всех угловых миноров Δ_1, $\Delta_2, \ldots$, Δ_{n-1} необходимо для существования треугольного разложения невырожденной матрицы A.

9.22. Построить треугольное разложение следующих матриц:

а) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 1 & -5 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

9.23. Доказать, что квадратную матрицу с помощью элементарных преобразований только строк (только столбцов) можно привести к единичной матрице тогда и только тогда, когда она невырождена.

9.24. Доказать, что всякую невырожденную матрицу можно разложить в произведение матриц элементарных преобразований.

9.25. Разложить указанные матрицы в произведение матриц элементарных преобразований:

а) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Применяя метод Гаусса–Жордана, найти обратные для следующих матриц.

9.26. $\begin{bmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 1 & 2 & -4 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$. **9.27.** $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$. **9.28.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

9.29. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **9.30.** $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

9.31. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. **9.32.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$.

9.33. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **9.34.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

Найти обратные для следующих матриц[11].

9.35. $\begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{bmatrix}$, $\alpha_i \neq 0$, $i = \overline{1, n}$.

9.36. $\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \dots & \alpha_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\alpha_i \neq 0$, $i = \overline{1, n}$.

9.37. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **9.38.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

9.39. $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$, $\lambda \neq 0$. **9.40.** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \end{bmatrix}$.

9.41. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

9.42. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **9.43.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}$.

[11] Всюду, где по виду матрицы нельзя узнать ее порядок, предполагается, что порядок равен n.

9.44. $$\begin{bmatrix} 0 & n-1 & n-2 & \dots & 3 & 2 & 1 \\ n-1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ n-2 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

9.45. Найти обратную к матрице определителя из задачи 5.59а.

9.46. Доказать, что для невырожденной матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

обратная матрица $B = A^{-1}$ имеет вид

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2,n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n-1,1} & b_{n-1,2} & \dots & 0 & 0 \\ b_{n1} & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

9.47. Вычислить произведения $A^{-1}B$ и BA^{-1}, если

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Решить матричные уравнения.

9.48. $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

9.49. $$X \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 6 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

9.50. $X\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & -1 \end{bmatrix}.$

9.51. $\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$

9.52. $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -5 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -4 & 9 \\ -12 & -6 & 14 \end{bmatrix}.$

9.53. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & a & a & \dots & a & a \\ 0 & 1 & a & \dots & a & a \\ 0 & 0 & 1 & \dots & a & a \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

9.54. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}.$

9.55. Доказать, что любую невырожденную матрицу можно сделать вырожденной, изменив в ней ровно один элемент.

9.56. Доказать, что матрица, обратная к симметрической невырожденной матрице, также является симметрической.

9.57. Доказать, что матрица, обратная к кососимметрической невырожденной матрице, также является кососимметрической.

9.58. Доказать, что матрица, обратная к ортогональной матрице, также является ортогональной.

9.59. Доказать, что матрица, обратная к матрице перестановок, сама является некоторой матрицей перестановок.

9.60. Доказать, что матрица, обратная к периодической матрице A, также является периодической матрицей, причем ее период совпадает с периодом A.

9.61.[12] Найти все периодические матрицы второго порядка,

[12] См. также задачи 2.41, 16.57.

у которых:

а) период равен трем;

б) период равен четырем.

9.62. Пусть невырожденная матрица A обладает тем свойством, что все ее строчные суммы[13] одинаковы и равны числу r. Доказать, что $r \neq 0$ и обратная матрица A^{-1} обладает тем же свойством, только для нее все строчные суммы равны $1/r$. Верно ли аналогичное утверждение для столбцовых сумм?

9.63. Доказать, что обратная к невырожденной стохастической (дважды стохастической) матрице является матрицей, у которой все строчные суммы (соответственно все строчные и столбцовые суммы) равны 1. Верно ли, что обратная матрица будет стохастической?

9.64. Доказать, что кронекерово произведение невырожденных матриц обратимо, причем

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}.$$

9.65. Пусть A и B – невырожденные матрицы одного порядка. *Групповым коммутатором* матриц A и B называется матрица

$$\{A, B\} = ABA^{-1}B^{-1}.$$

Доказать следующие свойства группового коммутатора:

а) $\{\alpha A, B\} = \{A, B\}$; б) $\{A, B\}^{-1} = \{B, A\}$; в) $\det\{A, B\} = 1$;

г) $\{A, B\} = I \iff A$ и B перестановочны;

д) $\{A, B\} = A \iff A = I$.

9.66. Матрица A, у которой все элементы являются целыми числами, называется *целочисленной*. Доказать, что обратная к целочисленной матрице A сама является целочисленной матрицей тогда и только тогда, когда $\det A = \pm 1$.

9.67. Пусть A и B – матрицы размера $n \times m$ и $m \times n$ соответственно. Доказать, что матрица $I_n + AB$ обратима тогда и только тогда, когда обратима матрица $I_m + BA$.

9.68. Доказать, что если матрица A нильпотентна, то матрицы $I + A$ и $I - A$ обратимы.

9.69. Доказать, что если $I - A$ – невырожденная матрица, то

а) $I + A + A^2 + \ldots + A^n = (I - A^{n+1})(I - A)^{-1}$;

б) $I + A + A^2 + \ldots + A^n + \ldots = (I - A)^{-1}$.

[13] По поводу строчных сумм см. задачу 1.39.

4—4271

9.70. Найти матрицу A, если $I+A+A^2+\ldots+A^n+\ldots=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.

9.71. Пусть $B = xy^T$, где x, y – вектор-столбцы одинакового размера $n \times 1$. Доказать, что если $\mu = 1 + x^T y \neq 0$, то матрица $I + B$ обратима и выполнено равенство

$$(I + B)^{-1} = I - \frac{1}{\mu}B.$$

9.72. Пусть J_n – матрица порядка n, все элементы которой равны 1. Доказать, что

$$(I - J_n)^{-1} = I - \frac{1}{n-1}J_n.$$

9.73. Пусть A и B – квадратные матрицы порядка n, причем A невырождена, а $B = xy^T$, где x, y – вектор-столбцы одинакового размера $n \times 1$. Доказать, что если $\mu = 1 + y^T A^{-1} x \neq 0$, то матрица $A + B$ обратима и выполнено равенство

$$(A + B)^{-1} = A^{-1}\left(A - \frac{1}{\mu}B\right)A^{-1}.$$

9.74. В невырожденной матрице A к элементу a_{ij} прибавляется число h, при этом полученная матрица $\widetilde{A}$ также невырождена. Найти выражение для $\widetilde{A}^{-1}$ через h и элементы матрицы A^{-1}.

9.75. В невырожденной матрице A ко всем элементам прибавляется одно и то же число h, при этом полученная матрица $\widetilde{A}$ также невырождена. Найти выражение для $\widetilde{A}^{-1}$ через h и элементы матрицы A^{-1}.

9.76. Доказать, что матрица, обратная к невырожденной квазидиагональной матрице A, сама является квазидиагональной, причем она имеет такое же клеточное строение, что и A, а ее диагональные блоки обратны к соответствующим диагональным блокам матрицы A.

9.77. Доказать, что матрица, обратная к невырожденной верхней (нижней) квазитреугольной матрице A, сама является верхней (соответственно нижней) квазитреугольной, причем она имеет такое же клеточное строение, что и A, а ее диагональные блоки обратны к соответствующим диагональным блокам матрицы A.

9.78. Найти обратные для следующих блочных матриц:

$$
\text{а)} \begin{bmatrix} I_n & B \\ O & I_m \end{bmatrix}; \quad \text{б)} \begin{bmatrix} A & B \\ O & D \end{bmatrix}; \quad \text{в)} \begin{bmatrix} A & O \\ C & D \end{bmatrix}; \quad \text{г)} \begin{bmatrix} O & A \\ D & B \end{bmatrix}
$$

(здесь A и D – квадратные невырожденные матрицы порядков n и m соответственно, I_n и I_m – единичные матрицы соответствующих порядков, а B и C – произвольные матрицы подходящих размеров).

9.79. Найти обратную для блочной матрицы $\begin{bmatrix} I & A & O \\ O & I & B \\ O & O & I \end{bmatrix}$, где A и B – квадратные матрицы одинакового порядка.

9.80. Для матрицы A порядка $n-1$ известна обратная матрица A^{-1}. Найти обратную матрицу для *окаймленной* матрицы B порядка n вида

$$
B = \begin{bmatrix} A & x \\ y^T & a \end{bmatrix},
$$

предполагая ее невырожденной (здесь x, y – вектор-столбцы размера $(n-1) \times 1$, а a – вещественное число).

9.81. Доказать, что если матрица A невырождена, то определитель квадратной блочной матрицы

$$
X = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}
$$

может быть вычислен по формуле

$$
\det X = |A| \cdot |D - CA^{-1}B|.
$$

9.82. Пусть матрицы A, B, C, D – квадратные одного порядка. Доказать, что если матрица A невырождена и перестановочна с матрицей C, то справедливо равенство

$$
\det \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(AD - CB).
$$

Верно ли это равенство, если матрица A вырождена?

9.83. Доказать, что для квадратной блочной матрицы

$$
X = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},
$$

в которой A и D – квадратные блоки соответственно порядков n и m, обратной является блочная матрица

$$X^{-1} = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} P &= (A - BD^{-1}C)^{-1}, & Q &= -PBD^{-1} \\ R &= -D^{-1}CP, & S &= D^{-1} - D^{-1}CQ \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} S &= (D - CA^{-1}B)^{-1}, & R &= -SCA^{-1} \\ P &= A^{-1} - A^{-1}BR, & Q &= -A^{-1}BS. \end{aligned}$$

Предполагается, что все участвующие в этих соотношениях (которые называются *формулами Фробениуса*) обратные матрицы существуют.

9.84. Пусть A, B, C, D – невырожденные матрицы одного порядка. Доказать, что

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & (C - DB^{-1}A)^{-1} \\ (B - AC^{-1}D)^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{bmatrix}.$$

Предполагается, что все участвующие в правой части этого равенства обратные матрицы существуют.

9.85. Матрица A называется *подобной* матрице B (что обозначается символом $A \approx B$), если существует невырожденная матрица S такая, что $A = S^{-1}BS$. Матрица S при этом называется *матрицей преобразования подобия* или *трансформирующей матрицей*. Доказать, что отношение подобия на множестве всех невырожденных матриц одного порядка обладает следующими свойствами:

а) $A \approx A$; б) $A \approx B \Longrightarrow B \approx A$;

в) $A \approx B,\ B \approx C \Longrightarrow A \approx C$.

9.86. Доказать, что если хотя бы одна из двух матриц A, B невырождена, то матрицы AB и BA подобны. Верно ли это утверждение, если обе матрицы вырождены?

9.87. Показать, что скалярная матрица подобна только самой себе. Доказать, что этим свойством обладают только скалярные матрицы.

9.88. Показать, что матрица A переходит в подобную, если над ней выполняется любое из следующих преобразований:

а) i-я строка умножается на число $\alpha \neq 0$, а затем i-й столбец умножается на число $1/\alpha$;

б) к i-й строке прибавляется j-я, умноженная на число β, а затем из j-го столбца вычитается i-й, умноженный на β;

в) переставляются i-я и j-я строки, а затем i-й и j-й столбцы;

г) каждый элемент матрицы заменяется на симметричный ему относительно "центра" матрицы.

9.89. Пусть матрицы A и B подобны. Однозначно ли при этом определена матрица преобразования?

9.90. Доказать, что преобразование подобия сохраняет следующие свойства матриц:

а) невырожденность;

б) нильпотентность;

в) периодичность;

г) ортогональность.

9.91. Пусть B – матрица, подобная симметрической матрице. Доказать, что для симметричности матрицы B достаточно, чтобы матрица преобразования подобия была ортогональной. Является ли это условие необходимым?

Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для кососимметрических матриц.

9.92. Матрица B получена из матрицы A преобразованием подобия. Выяснить, верны ли следующие утверждения:

а) если A – треугольная матрица, то B – также треугольная;

б) если A – стохастическая матрица, то B – также стохастическая.

9.93. Пусть матрицы A и B подобны и $B = S^{-1}AS$. Доказать, что:

а) $\det B = \det A$;

б) $B = I$ тогда и только тогда, когда $A = I$;

в) $B = A$ тогда и только тогда, когда A и S перестановочны;

г) $B^k = S^{-1}A^kS$ для любого $k \in \mathbb{N}$;

д) $f(B) = S^{-1}f(A)S$ для любого многочлена $f(t)$;

е) $B^{-1} = SA^{-1}S^{-1}$;

ж) $\widehat{B} = S\widehat{A}S^{-1}$.

9.94. Матрицы A и B подобны соответственно матрицам C и D с одной и той же матрицей преобразования S. Доказать, что:

а) произведения AB и CD подобны;

б) коммутаторы $[A, B]$ и $[C, D]$ подобны;

в) групповые коммутаторы $\{A, B\}$ и $\{C, D\}$ подобны;

г) произведения Йордана $A * B$ и $C * D$ подобны.

9.95. Пусть матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ подобны соответственно матрицам C и D. Доказать, что кронекеровы произведения $A \otimes B$ и $C \otimes D$ также подобны.

9.96. Пусть матрица $A = A(t) \in \mathcal{D}^{n\times n}$ невырождена при некотором значении t. Доказать, что при данном значении t справедливо следующее правило дифференцирования обратной матрицы:

$$\frac{d}{dt}A^{-1} = -A^{-1}\frac{dA}{dt}A^{-1}.$$

Глава III. **Множества и отображения**

§10. Операции над множествами

Два множества X и Y называются *равными*, если каждое из них является подмножеством другого, т.е.

$$X = Y \iff \begin{cases} X \subset Y, \\ Y \subset X. \end{cases}$$

Объединением множеств X и Y называется множество

$$X \cup Y = \{x \,|\, x \in X \text{ или } x \in Y\},$$

т.е.

$$x \in X \cup Y \iff \left[\begin{array}{l} x \in X, \\ x \in Y. \end{array} \right.$$

Пересечением множеств X и Y называется множество

$$X \cap Y = \{x \,|\, x \in X, x \in Y\},$$

т.е.

$$x \in X \cap Y \iff \begin{cases} x \in X, \\ x \in Y. \end{cases}$$

Разностью множеств X и Y называется множество

$$X \setminus Y = \{x \,|\, x \in X, x \notin Y\}.$$

Если $Y \subset X$, то разность $X \setminus Y$ называется *дополнением* множества Y до множества X и обозначается символом $\overline{Y}$.

Декартовым произведением множеств X и Y называется множество

$$X \times Y = \{(x, y) \,|\, x \in X, y \in Y\}.$$

Разбиением множества называется представление множества в виде объединения непустых подмножеств, не имеющих попарно общих точек.

Пример 10.1. Доказать, что если подмножества E и F множества A удовлетворяют соотношениям

$$E \cup F = A, \quad E \cap F = \varnothing,$$

то каждое из множеств E и F является дополнением другого до A.

Решение. Докажем, что $F = \overline{E}$. Для этого покажем, что имеет место двустороннее вложение: $F \subset \overline{E} \subset F$. С одной стороны, если $x \in F$, то $x \in A$ (так как $A = E \cup F$) и $x \notin E$ (так как $E \cap F = \varnothing$). Следовательно, $x \in \overline{E}$. С другой стороны, если $x \in \overline{E}$, то $x \in A$, $x \notin E$. Так как $E \cap F = \varnothing$, то $x \in F$. ∎

Пример 10.2. Для подмножеств E и F множества A доказать, что

$$\overline{E \cap F} = \overline{E} \cup \overline{F}. \tag{10.1}$$

Решение. Проверим двустороннее вложение для множеств из (10.1). Имеем

$$x \in E \cap F \iff \begin{cases} x \in E, \\ x \in F. \end{cases}$$

Следовательно,

$$x \in \overline{E \cap F} \iff \left[\begin{array}{l} x \notin E, \\ x \notin F \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x \in \overline{E}, \\ x \in \overline{F} \end{array}\right. \iff x \in \overline{E} \cup \overline{F}. \quad \blacksquare$$

Характеристической функцией подмножества E множества A называется функция $e(x)$, определенная для любого $x \in A$ соотношением

$$e(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E. \end{cases} \tag{10.2}$$

Очевидно, что два множества совпадают тогда и только тогда, когда равны их характеристические функции.

Пример 10.3. Доказать, что если $e(x)$ и $f(x)$ – характеристические функции подмножеств E и F множества A, то $e(x)f(x)$ – характеристическая функция их пересечения $E \cap F$.

Решение. Пусть $\varphi(x)$ – характеристическая функция $E \cap F$. Тогда, если $x \in E \cap F$, то $\varphi(x) = 1$. При этом $x \in E$, $x \in F$ и $e(x) = 1$, $f(x) = 1$. Следовательно, $e(x)f(x) = 1 = \varphi(x)$. Если же $x \notin E \cap F$, то $\varphi(x) = 0$. При этом либо $e(x) = 0$, либо $f(x) = 0$. В любом случае $e(x)f(x) = 0 = \varphi(x)$. Таким образом, для любых $x \in A$ функции $\varphi(x)$ и $e(x)f(x)$ принимают одинаковые значения. Следовательно, $\varphi(x) = e(x)f(x)$. $\blacksquare$

Пример 10.4. Доказать, что

$$(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G)$$

(ассоциативность пересечения).

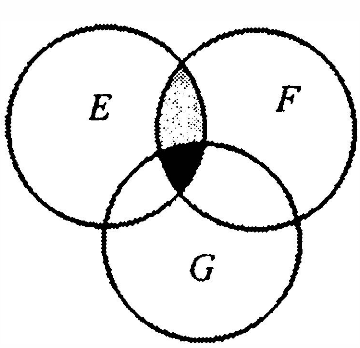
Решение. *1-й способ.* Так же, как и в примере 10.1, проверяется двустороннее вложение множеств.

2-й способ. Для доказательства равенства множеств достаточно проверить совпадение их характеристических функций. Обозначив через $e(x)$, $f(x)$, $g(x)$ характеристические функции E, F, G соответственно и используя пример 10.3, получим для любого $x \in A$

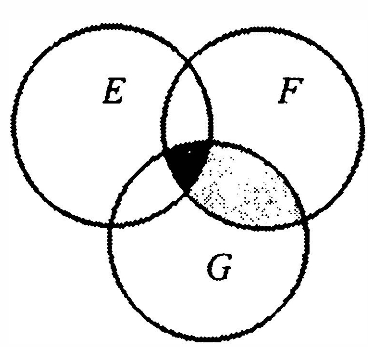
$$(e(x)f(x))g(x) = e(x)(f(x)g(x))$$

(в силу ассоциативности умножения в $\mathbb{R}$).

3-й способ. Равенство множеств можно проверить с помощью так называемых *кругов Эйлера*:



$(E \cap F) \cap G$



$E \cap (F \cap G)$

ЗАДАЧИ

10.1. Пусть $e(x)$ и $f(x)$ – характеристические функции подмножеств E и F подмножества A. Доказать, что

$$1 - e(x), \quad e(x)f(x), \quad e(x) + f(x) - e(x)f(x), \quad e(x) - e(x)f(x)$$

являются характеристическими функциями множеств $\overline{E}$, $E \cap F$, $E \cup F$ и $E \setminus F$ соответственно.

10.2. Пусть E и F – подмножества множества A . Доказать, что

а) $\overline{E \cup F} = \overline{E} \cap \overline{F}$; б) $\overline{E \cap F} = \overline{E} \cup \overline{F}$; в) $\overline{E \setminus F} = \overline{E} \cup F$;

г) $\overline{E} \setminus \overline{F} = F \setminus E$.

10.3. Доказать, что соотношение $A \subset B$ эквивалентно любому из трех соотношений

$$A \cup B = B; \qquad A \cap B = A; \qquad A \cap \overline{B} = \varnothing.$$

10.4. Доказать, что

а) $(E \cup F) \cup G = E \cup (F \cup G)$ (свойство ассоциативности объединения);

б) $(E \cap F) \cap G = E \cap (F \cap G)$ (свойство ассоциативности пересечения);

10.5. Доказать, что

а) $(E \cap F) \cup G = (E \cup G) \cap (F \cup G)$ (свойство дистрибутивности объединения относительно пересечения);

б) $(E \cup F) \cap G = (E \cap G) \cup (F \cap G)$ (свойство дистрибутивности пересечения относительно объединения).

10.6. Пусть E_i $(i = \overline{1,n})$ – подмножества множества A. Доказать, что

а) $\overline{E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n} = \overline{E_1} \cap \overline{E_2} \cap \ldots \cap \overline{E_n}$;

б) $\overline{E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n} = \overline{E_1} \cup \overline{E_2} \cup \ldots \cup \overline{E_n}$.

10.7. Пусть E_i $(i = \overline{1,n})$, F – подмножества множества A. Доказать, что

а) $(E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n) \cap F = (E_1 \cap F) \cup (E_2) \cup \ldots \cup (E_n \cap F)$;

б) $(E_1 \cap E_2 \cap \ldots \cap E_n) \cup F = (E_1 \cup F) \cap (E_2 \cup F) \cap \ldots \cap (E_n \cup F)$.

10.8. Доказать, что операция вычитания множеств не обладает свойством ассоциативности, показав, что равенство

$$(E \setminus F) \setminus G = E \setminus (F \setminus G)$$

выполнено тогда и только тогда, когда множества E и G не пересекаются.

10.9. Доказать, что

а) $E \setminus (F \cap G) = (E \setminus F) \cup (E \setminus G)$;

б) $E \setminus (F \cup G) = (E \setminus F) \cap (E \setminus G)$;
в) $(E \cap F) \setminus G = (E \setminus G) \cap (F \setminus G)$;
г) $(E \cup F) \setminus G = (E \setminus G) \cup (F \setminus G)$.

10.10. Доказать, что
а) $X \times (E \cup F) = (X \times E) \cup (X \times F)$;
б) $X \times (E \cap F) = (X \times E) \cap (X \times F)$;
в) $(X \cap Y) \times (E \cap F) = (X \times E) \cap (Y \times F)$.

10.11. Пусть A – конечное множество, состоящее из n элементов. Найти число всех подмножеств этого множества (включая пустое множество и само множество A).

10.12. Пусть A – конечное множество, состоящее из n элементов. Найти число всех подмножеств этого множества, состоящих из m элементов.

10.13. Обозначим через $m(A)$ число элементов множества A. Доказать, что для любых конечных множеств A, B, C выполнены соотношения:
а) $m(A \setminus B) = m(A) - m(A \cap B)$;
б) $m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B)$;
в) $m(A \cup B \cup C) = m(A) + m(B) + m(C) - m(A \cap B) - m(A \cap C) -$
$- m(B \cap C) + m(A \cap B \cap C)$.

§11. Отображения

Пусть X, Y – два множества. *Отображением* f множества X во множество Y называется закон, посредством которого каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие однозначно определенный элемент $y \in Y$. Символически отображение записывается в виде $f : X \to Y$. Запись $y = f(x)$ или $x \mapsto y$ означает, что элемент x при отображении f переходит в элемент y.

Полным прообразом элемента $y \in Y$ называется множество
$$f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}.$$
Образом отображения f называется множество
$$f(X) = \{y \in Y \mid \exists x \in X : y = f(x)\}.$$
Отображение $f : X \to Y$ называется:

• *инъективным*, если из того, что $x_1 \neq x_2$, следует, что $f(x_1) \neq f(x_2)$, или, другими словами, если уравнение
$$f(x) = y \tag{11.1}$$
при любом $y \in Y$ имеет не более одного решения;

• *сюръективным* или *отображением на*, если $f(X) = Y$, или, другими словами, если уравнение (11.1) при любом $y \in Y$ имеет хотя бы одно решение;

• *биективным* или *взаимно однозначным*, если оно и инъективно, и сюръективно, или, другими словами, если уравнение (11.1) при любом $y \in Y$ имеет, и притом единственное, решение.

Два отображения $f : X \to Y$ и $g : X \to Y$ называются *равными*, если
$$f(x) = g(x),\ \forall x \in X.$$

Тождественным (единичным) отображением на множестве X называется отображение $e_X : X \to X$, которое переводит каждый элемент $x \in X$ в себя.

Биективное отображение множества M на себя называется *перестановкой* (*подстановкой*) множества M. Если множество M состоит из n элементов, то его элементы можно занумеровать числами $1, 2, \dots, n$ и тогда каждую перестановку s можно записать в виде таблицы

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}, \tag{11.2}$$

в которой под каждым номером k указывается номер α_k того элемента, который является образом элемента с номером k. Очевидно,

1) $\alpha_i \in \{1, 2, \dots, n\}$, 2) $\alpha_i \neq \alpha_j$ при $i \neq j$,

так что $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ – перестановка (§4) из чисел $1, 2, \dots, n$.

Заметим, что термин "перестановка" используется и как название отображения (11.2), и как фиксированное расположение чисел $1, 2, \dots, n$ в определенном порядке α. Это естественно, так как между отображениями (11.2) и упорядочением α чисел $1, 2, \dots, n$, очевидно, существует взаимно однозначное соответствие.

Если в таблице (11.2) поменять местами столбцы, то получится другая запись той же перестановки s:

$$s = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n \end{pmatrix}, \tag{11.3}$$

где $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ и $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ – перестановки из первых n натуральных чисел.

Перестановка (11.2) называется *четной*, если α – четная перестановка, т.е. если $\sigma(\alpha)$ – четно. В записи (11.3) перестановка s четная тогда и только тогда, когда $\sigma(\beta) + \sigma(\gamma)$ – четно (см. ниже задачу 11.16).

Произведением (суперпозицией или *композицией)* отображений $g : X \to Y$ и $f : Y \to Z$ называется отображение $fg : X \to Z$, определенное правилом
$$fg(x) = f(g(x)), \quad \forall x \in X.$$

Пример 11.1. Найти произведения st и ts перестановок
$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ и } t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Произведение перестановок в данной задаче является суперпозицией двух отображений множества $M = \{1, 2, 3, 4\}$ на себя. Согласно обозначениям, принятым в определении произведения отображений, в перестановке st первой выполняется перестановка t, а второй – перестановка s. Суперпозицию перестановок t и s наглядно представить следующей схемой

$$\begin{array}{ccccc} & t & & s & \\ 1 & \longrightarrow & 3 & \longrightarrow & 1 \\ 2 & \longrightarrow & 4 & \longrightarrow & 3 \\ 3 & \longrightarrow & 2 & \longrightarrow & 4 \\ 4 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & 2 \end{array}$$

Поэтому

$$st = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Аналогично

$$\begin{array}{ccccc} & s & & t & \\ 1 & \to & 2 & \to & 4 \\ 2 & \to & 4 & \to & 1 \\ 3 & \to & 1 & \to & 3 \\ 4 & \to & 3 & \to & 2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad ts = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Теорема 11.1. *Произведение отображений обладает следующими свойствами:*

1) $fe_X = f$; $e_Y f = f$ для любого отображения $f : X \to Y$;

2) произведение отображений ассоциативно, т.е. если $h : X \to Y$, $g : Y \to Z$, $f : Z \to U$, то $f(gh) = (fg)h$;

3) произведение инъективных (сюръективных, биективных) отображений инъективно (соответственно сюръективно, биективно).

Пусть $f : X \to Y$. Отображение $f^{-1} : Y \to X$ называется *обратным* к отображению f, если

$$f^{-1}f = e_X, \quad ff^{-1} = e_Y.$$

Теорема 11.2. *Если $g : X \to Y, f : Y \to X$ и $fg = e_X$, то g инъективно, а f сюръективно.*

Теорема 11.3 (критерий обратимости). *Отображение обратимо тогда и только тогда, когда оно биективно.*

Теорема 11.4. *Обратимые отображения обладают следующими свойствами:*

1) обратное отображение единственно;

2) произведение обратимых отображений обратимо, при этом

$$(fg)^{-1} = g^{-1}f^{-1}.$$

ЗАДАЧИ

11.1. Пусть $\mathbb{R}_+$ – множество всех положительных вещественных чисел и пусть каждому числу $a \in \mathbb{R}$ поставлено в соответствие число x такое, что $x^2 = |a|$. Определяет ли это правило отображение

а) $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$; б) $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$; в) $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$?

Если да, то будет ли оно сюръективным, инъективным, биективным?

11.2. Определяет ли правило $f(x) = \sin x$ отображение

а) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; в) $f : \mathbb{R} \longrightarrow [-1; 1]$;

б) $f : [-\pi/2; \pi/2] \longrightarrow [-1; 1]$; г) $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$?

В каких из случаев а)-г) это правило определяет биективное отображение?

11.3. Пусть каждому подмножеству множества A поставлена в соответствие его характеристическая функция. Будет ли это биективным отображением множества всех подмножеств множества A на множество функций, принимающих значения 0 и 1?

11.4. Отображение $f : X \longrightarrow Y$ ставит в соответствие паре вещественных чисел

а) их сумму; в) их произведение;

б) их разность; г) их частное.

Для каждого из случаев а)–г) указать подходящие множества X и Y.

11.5. Является ли отображением $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ правило, которое паре чисел $a, b \in \mathbb{R}$ ставит в соответствие частное a/b?

11.6. Пусть X – множество всех невырожденных матриц n-го порядка. Является ли отображением $X \times X \longrightarrow X$ правило, которое любой паре матриц из X ставит в соответствие

а) их сумму; б) их произведение?

11.7. Пусть E – множество, состоящее из n элементов. Установить биективное отображение множества A всех отображений E во множество $\{0; 1\}$ на множество B всех подмножеств множества E.

11.8. Пусть E, F – подмножества множества X и $f : X \longrightarrow Y$. Показать, что:

а) $f(E \cup F) = f(E) \cup f(F)$; б) $f(E \cap F) \subset f(E) \cap f(F)$.

Что изменится в этих соотношениях, если f биективно?

11.9. Пусть E и F – конечные множества, состоящие их m и n элементов соответственно. Найти число всех отображений E в F.

11.10. Пусть E и F – конечные множества, состоящие из m и n элементов соответственно. Показать, что:

а) для существования инъективного отображения E в F необходимо и достаточно, чтобы $m \leq n$;

б) число инъективных отображений E в F равно

$$n(n-1)\ldots(n-m+1).$$

11.11. Пусть E и F – конечные множества, состоящие из m и n элементов соответственно. Показать, что:

а) для существования сюръективного отображения E на F необходимо и достаточно, чтобы $m \geq n$;

б) число сюръективных отображений E на F равно

$$n^m - n(n-1)^m + \ldots + (-1)^k C_n^k (n-k)^m + \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1}.$$

11.12. Пусть E и F – конечные множества, состоящие из m и n элементов соответственно. Показать, что:

а) для существования биективного отображения E на F необходимо и достаточно, чтобы $m = n$;

б) число биективных отображений E на F равно $n!$.

11.13. Доказать, что если множество X бесконечно, а его подмножество Y конечно, то существует биективное отображение $X \setminus Y \longrightarrow X$.

11.14. Для отображения $f : X \longrightarrow Y$ отображение $g : X \longrightarrow Y$ называется *левым* (соответственно *правым*) *обратным*, если $gf = e_X$ (соответственно $fg = e_Y$). Доказать, что:

а) отображение f инъективно в том и только том случае, если оно обладает левым обратным;

б) отображение f сюръективно в том и только том случае, если оно обладает правым обратным.

11.15. Найти произведение перестановок:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 5 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 5 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$

в указанном и обратном порядке.

11.16. Доказать, что при записи перестановки $\begin{pmatrix} \alpha_1 \, \alpha_2 \dots \alpha_n \\ \beta_1 \, \beta_2 \dots \beta_n \end{pmatrix}$ в виде $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n \end{pmatrix}$ общее число инверсий $\sigma(\gamma)$ в перестановке $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ и сумма $\sigma(\alpha) + \sigma(\beta)$ имеют одинаковую четность.

11.17. Пусть f – биективное отображение X на Y. Показать, что для подмножеств E и F множества Y имеют место соотношения

$$f^{-1}(E \cup F) = f^{-1}(E) \cup f^{-1}(F); \ f^{-1}(E \cap F) = f^{-1}(E) \cap f^{-1}(F);$$
$$f^{-1}(\overline{E}) = \overline{f^{-1}(E)}.$$

§12. Эквивалентность и алгебраические законы

Говорят, что на множестве X задано *бинарное отношение* $\mathcal{R}$, если указано непустое подмножество $\mathcal{R}$ декартова квадрата этого множества. Если при этом $(x, y) \in \mathcal{R}$, то говорят, что элементы x и y связаны отношением $\mathcal{R}$, и обозначают символом $x\mathcal{R}y$.

Бинарное отношение $\mathcal{R}$ на множестве X называется:

- *рефлексцвным*, если $x\mathcal{R}x, \forall x \in X$;
- *симметричным*, если имеет место импликация $x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$;
- *транзитивным*, если имеет место импликация $x\mathcal{R}y, y\mathcal{R}z \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

Бинарное отношение $\mathcal{E}$ на множестве X называется *отношением эквивалентности*, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно. Если пара элементов $x, y \in X$ связана отношением эквивалентности, то говорят, что x и y *эквивалентны*, и обозначают символом $x \sim y$. В конкретных случаях вместо этого символа могут быть использованы и другие, например, $x = y$, $x \equiv y$.

Классом эквивалентности, порожденным элементом a, называется множество $\mathrm{cl}\,(a) = \{x \in X | x \sim a\}$. Любой элемент класса эквивалентности называется *представителем* этого класса.

Теорема 12.1. *Класс эквивалентности порождается любым своим представителем.*

Теорема 12.2. *Два класса эквивалентности либо не пересекаются, либо совпадают.*

Таким образом, *любое отношение эквивалентности на множестве определяет разбиение этого множества.*

Множество всех классов эквивалентности называется *фактор-множеством множества* X *по отношению эквивалентности* $\mathcal{E}$ и обозначается символом $X/\mathcal{E}$.

Внутренним законом композиции (алгебраической операцией) на множестве X называется отображение

$$* : X \times X \to X.$$

Тот факт, что $(a, b) \mapsto c$, записывается символически в виде $a * b = c$. В конкретных случаях вместо символа $*$ используют символы $+$, $-$, $\times$, $:$ и др.

Алгебраическая операция $*$ на множестве X называется:

- *коммутативной*, если $a * b = b * a, \quad \forall a, b \in X$,
- *ассоциативной*, если $(a * b) * c = a * (b * c), \quad \forall a, b, c \in X$.

Элемент $e \in X$ называется *нейтральным элементом множества* X *относительно алгебраической операции* $*$, если $\forall a \in X$:

$$a * e = e * a = a.$$

Пусть $*$ – алгебраическая операция на множестве X, обладающая нейтральным элементом e. Элемент x' называется *симметричным элементом* для элемента $x \in X$, если $x * x' = x' * x = e$.

Теорема 12.3. *Нейтральный элемент единствен.*

Теорема 12.4. *Симметричный элемент относительно ассоциативной алгебраической операции единствен.*

Говорят, что алгебраическая операция $*$ на множестве X обладает *обратной операцией*, если для любых двух элементов $a, b \in X$ уравнения $a * x = b$ и $y * a = b$ имеют единственное решение.

Пусть $*_1$ и $*_2$ – две алгебраические операции на множестве X. Алгебраическая операция $*_1$ называется *дистрибутивной справа* относительно алгебраической операции $*_2$, если

$$(a *_2 b) *_1 c = (a *_1 c) *_2 (b *_1 c), \quad \forall a, b, c \in X;$$

дистрибутивной слева, если

$$a *_1 (b *_2 c) = (a *_1 b) *_2 (a *_1 c), \quad \forall a, b, c \in X;$$

и *дистрибутивной*, если она дистрибутивна и справа, и слева.

Пусть X и P – два множества. *Внешним законом композиции на множестве* X называется отображение

$$P \times X \to X.$$

Тот факт, что $(\alpha, x) \mapsto c$, обозначается символом $c = \alpha x$.

Внешний закон композиции на множестве X называется *дистрибутивным относительно внутреннего закона композиции* $*$ в X, если

$$\alpha(a * b) = \alpha a * \alpha b, \ \ \forall \alpha \in P, \forall a, b \in X.$$

Внешний закон композиции на множестве X называется *дистрибутивным относительно внутреннего закона композиции* $*'$ в P, если

$$(\alpha *' \beta)a = \alpha a * \beta a, \ \ \forall \alpha, \beta \in P, \forall a \in X.$$

ЗАДАЧИ

12.1. Привести примеры бинарного отношения:

а) рефлексивного, симметричного, но не транзитивного;

б) рефлексивного, транзитивного, но не симметричного;

в) симметричного, транзитивного, но не рефлексивного.

12.2. Найти ошибку в следующем "доказательстве" того, что рефлексивность бинарного отношения $\mathcal{R}$ вытекает из симметричности и транзитивности: "Так как $\mathcal{R}$ симметрично, то из $x\mathcal{R}y$ следует, что $y\mathcal{R}x$. Так как $\mathcal{R}$ транзитивно, то из $x\mathcal{R}y$ и $y\mathcal{R}x$ следует, что $x\mathcal{R}x$, т.е. $\mathcal{R}$ рефлексивно."

12.3. Доказать, что любое разбиение множества определяет отношение эквивалентности на этом множестве.

12.4. Пусть $f : X \to X$ – отображение на некотором множестве X. Какое условие необходимо и достаточно для того, чтобы бинарное отношение $\mathcal{R}$, задаваемое правилом: $x\mathcal{R}y$, если $y = f(x)$, было

а) рефлексивным; б) симметричным; в) транзитивным.

12.5. Рассматривается бинарное отношение $\mathcal{R}$ на некотором множестве населенных пунктов. Два населенных пункта считаются связанными отношением $\mathcal{R}$, если либо они совпадают, либо между ними установлено железнодорожное сообщение. Является ли $\mathcal{R}$ отношением эквивалентности?

12.5.1. Рассматривается бинарное отношение $\mathcal{R}$ на множестве всех жителей земного шара. Два человека считаются связанными отношением $\mathcal{R}$, если у них есть общие знакомые. Является ли $\mathcal{R}$ отношением эквивалентности?

12.5.2. Рассматривается бинарное отношение $\mathcal{R}$ на множестве всех жителей земного шара. Два человека считаются связанными отношением $\mathcal{R}$, если они владеют одним и тем же языком. Является ли $\mathcal{R}$ отношением эквивалентности?

12.6. На множестве вещественных чисел $\mathbb{R}$ задано бинарное отношение $\mathcal{R}$ по одному из следующих правил: $x\mathcal{R}y$, если

а) $x = y$; б) $x \le y$; в) $x < y$; г) $x \ge y$; д) $x > y$.

В каком из этих правил а)–д) бинарное отношение $\mathcal{R}$ рефлексивно?

12.7. На множестве ненулевых вещественных чисел $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ задано бинарное отношение $\mathcal{R}$ по одному из следующих правил: $x\mathcal{R}y$, если

а) $xy > 0$; б) $x - y \in \mathbb{Z}$; в) $x/y \in \mathbb{Z}$.

Для каждого из этих правил выяснить, является ли бинарное отношение $\mathcal{R}$ рефлексивным, симметричным, транзитивным? Если $\mathcal{R}$ является отношением эквивалентности, то найти фактор-множество $(\mathbb{R} \setminus \{0\})/\mathcal{R}$.

12.8. На множестве упорядоченных пар вещественных чисел $\mathbb{R}^2$ задано бинарное отношение $\mathcal{R}$ по одному из следующих правил: $(x_1, x_2)\mathcal{R}(y_1, y_2)$, если

а) $\begin{cases} x_1 \le y_1, \\ x_2 \le y_2; \end{cases}$ б) $\left[\begin{array}{l} x_1 \le y_1, \\ x_2 \le y_2; \end{array}\right.$ в) $\begin{cases} x_1 = y_1, \\ x_2 = y_2; \end{cases}$ г) $\left[\begin{array}{l} x_1 = y_1, \\ x_2 = y_2; \end{array}\right.$

д) $x_1y_1 + x_2y_2 \ge 0$; е) $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) \ge 0$.

Для каждого из этих правил выяснить, является ли бинарное отношение $\mathcal{R}$ рефлексивным, симметричным, транзитивным?

12.9. На множестве упорядоченных пар вещественных чисел $\mathbb{R}^2$ задано бинарное отношение $\mathcal{R}$ по правилу: $(x_1, x_2)\mathcal{R}(y_1, y_2)$, если существует биективное отображение $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такое, что $\begin{cases} y_1 = f(x_1), \\ y_2 = f(x_2). \end{cases}$ Доказать, что бинарное отношение $\mathcal{R}$ является отношением эквивалентности. Найти фактор-множество $\mathbb{R}^2/\mathcal{R}$.

12.10. На множестве квадратных матриц $\mathbb{R}^{n\times n}$ порядка n задано бинарное отношение $\mathcal{R}$ по одному из следующих правил: $A\mathcal{R}B$, если

а) матрицы A и B подобны;

б) матрица A перестановочна с матрицей B.

Для каждого из этих правил выяснить, является ли бинарное отношение $\mathcal{R}$ рефлексивным, симметричным, транзитивным?

12.11. На множестве матриц $\mathbb{R}^{m\times n}$ задано бинарное отношение $\mathcal{R}$ по одному из следующих правил: $A\mathcal{R}B$, если

а) существует невырожденная матрица $S \in \mathbb{R}^{m\times m}$ такая, что $B = SA$;

б) существует невырожденная матрица $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ такая, что $B = AT$;

в) существуют невырожденные матрицы $S \in \mathbb{R}^{m\times m}$ и $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ такие, что $B = SAT$.

Доказать, что каждое из этих правил задает отношение эквивалентности. Найти фактор-множество $\mathbb{R}^{m\times n}/\mathcal{R}$.

12.12. Пусть f – отображение множества X во множество Y. Доказать, что отношение $\mathcal{R}$, определенное правилом: $x_1\mathcal{R}x_2$, если $f(x_1) = f(x_2)$, является отношением эквивалентности на множестве X. Найти фактор-множество $X/\mathcal{R}$.

12.13. Пусть на плоскости задана прямая l и пусть $\mathcal{R}$ – бинарное отношение, связывающее две точки M_1 и M_2 по одному из следующих правил: $M_1\mathcal{R}M_2$, если

а) либо точки M_1 и M_2 совпадают, либо прямая M_1M_2 параллельна или совпадает с прямой l;

б) отрезок $[M_1M_2]$ либо не пересекает прямую l, либо лежит на ней.

Доказать, что в каждом случае $\mathcal{R}$ – отношение эквивалентности. Что представляют собой фактор-множества по этим отношениям эквивалентности?

12.14. Пусть $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$. Два целых числа m и n называются *сравнимыми по модулю* p ($m \equiv n(\operatorname{mod} p)$), если при делении на p они дают одинаковые остатки. Пусть на множестве $\mathbb{Z}$ целых чисел введено бинарное отношение по правилу $\mathcal{E}$: $m\mathcal{E}n$, если $m \equiv n(\operatorname{mod} p)$. Доказать, что $\mathcal{E}$ – отношение эквивалентности. Найти фактор-множество $\mathbb{Z}/\mathcal{E}$.

12.15. На декартовом произведении множеств $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ введено бинарное отношение по правилу: $(p,n)\mathcal{R}(q,m)$, если $pm = qn$. Доказать, что оно является отношением эквивалентности. Найти фактор-множество $(\mathbb{Z} \times \mathbb{N})/\mathcal{R}$.

12.16. На множестве дифференцируемых на прямой $\mathbb{R}$ функций $\mathcal{D}$ задано бинарное отношение $\mathcal{R}$ по правилу: $f(x)\mathcal{R}g(x)$, если $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Доказать, что бинарное отношение $\mathcal{R}$ является отношением эквивалентности. Найти фактор-множество $\mathcal{D}/\mathcal{R}$.

12.17. На множестве всех непустых подмножеств непустого множества X задано бинарное отношение $\mathcal{R}$ по одному из следующих правил: $E\mathcal{R}F$, если

а) $E \cap F \neq \varnothing$; б) $E \subset F$.

Для каждого из этих правил выяснить, является ли бинарное отношение $\mathcal{R}$ рефлексивным, симметричным, транзитивным?

12.18. На множестве всех подмножеств непустого конечного множества X задано бинарное отношение $\mathcal{R}$ по правилу: $E\mathcal{R}F$, если существует биективное отображение $f : E \to F$. Доказать, что отношение $\mathcal{R}$ является отношением эквивалентности и найти соответствующее фактор-множество.

12.19. Для каждого из следующих множеств проверить, являются ли указанные операции алгебраическими. Если да, то выяснить, обладают ли они свойствами (K) коммутативности, (A) ассоциативности, (N) наличия нейтрального элемента, (S) существования симметричного элемента для каждого элемента множества:

1) сложение, вычитание, умножение и деление чисел на множестве $\mathbb{R}$ вещественных чисел;

2) сложение, вычитание, умножение и деление чисел на множестве $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ненулевых вещественных чисел;

3) сложение и умножение матриц на множестве всех невырожденных матриц n-го порядка;

4) сложение и умножение матриц на множестве невырожденных треугольных матриц (одинакового вида) n-го порядка;

5) сложение матриц на множестве матриц вида $\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix}$, где $a, b \in \mathbb{R}$;

6) умножение матриц на множестве матриц вида $\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$, $a^2 + b^2 \neq 0$;

7) умножение матриц на множестве матриц вида $\begin{bmatrix} a & b \\ a & b \end{bmatrix}$, где $a, b \in \mathbb{R}$;

8) умножение матриц на множестве матриц вида $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \neq 0$;

9) умножение матриц на множестве матриц вида $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $a^2 + b^2 \neq 0$;

10) коммутатор матриц $[A, B] = AB - BA$ на множестве квадратных матриц n-го порядка;

11) произведение Йордана матриц $A * B = \frac{1}{2}(AB + BA)$ на множестве квадратных матриц n-го порядка;

12) групповой коммутатор матриц $\{A, B\} = ABA^{-1}B^{-1}$ на множестве невырожденных квадратных матриц n-го порядка;

13) произведение отображений на множестве всех отображений множества X в X;

14) симметрическая разность $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ на множестве всех подмножеств некоторого непустого множества X.

12.20. Привести пример алгебраической операции, которая коммутативна, но не ассоциативна.

12.21. Привести пример алгебраической операции, которая не ассоциативна, обладает нейтральным элементом, но симметричный элемент не единствен.

12.22. На множестве всех подмножеств множества X рассматриваются операции объединения и пересечения множеств. Доказать, что обе операции коммутативны, ассоциативны и каждая из них дистрибутивна относительно другой. Обладают ли эти операции нейтральным элементом и, если да, то для каждого ли подмножества существует симметричный элемент?

12.23. Доказать, что ассоциативная алгебраическая операция на множестве X обладает обратной операцией тогда и только тогда, когда эта операция имеет нейтральный элемент и для каждого элемента множества X существует симметричный.

Глава IV. **Введение в теорию линейных пространств**

В этой главе рассматриваются задачи, относящиеся к первоначальному опыту изучения линейных пространств. Понятие линейного пространства подготавливается геометрическими примерами – множествами векторов на прямой, на плоскости и в пространстве. Каждое из обсуждаемых здесь понятий – вещественное линейное пространство, линейная зависимость и ранг матрицы, базис и размерность линейного пространства, линейное подпространство и линейное многообразие – мотивируется как n-мерное обобщение соответствующих геометрических понятий.

Дальнейшее развитие теории линейных пространств будет дано в главе XII.

§13. Геометрические векторы

Направленные отрезки. Упорядоченная пара точек (A, B) называется *направленным отрезком* с началом в точке A и концом в точке B. Обозначение: $\overrightarrow{AB}$. Если точки A и B совпадают, то направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ называется *нулевым* и обозначается символом θ_A.

Направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ называется *параллельным прямой* l (*плоскости* P), если либо он нулевой, либо прямая AB совпадает с прямой l (соответственно лежит в плоскости P), либо прямая AB параллельна прямой l (соответственно плоскости P). Обозначение: $\overrightarrow{AB} \parallel l$, $\overrightarrow{AB} \parallel P$.

Направленные отрезки $\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A_2B_2}, \ldots, \overrightarrow{A_kB_k}$ называются *коллинеарными* (*компланарными*), если существует прямая (соответственно плоскость), которой параллелен каждый из этих отрезков.

Длиной направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка $[AB]$. Как следует из определения, длина нулевого и только нулевого направленного отрезка равна нулю. Обозначение: $|\overrightarrow{AB}|$.

Ненулевые направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *одинаково направленными* (*сонаправленными*), если лучи $[AB)$ и $[CD)$ имеют одинаковое направление, и *противоположно направленными*, если лучи $[AB)$ и $[CD)$ имеют противоположные направления. Обозначение: $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$ соответственно.

Прямая l с заданным на ней направлением называется *осью*. *Величиной* направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ на оси l называется число

$$(\overrightarrow{AB}) = \begin{cases} |\overrightarrow{AB}|, & \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow l, \\ -|\overrightarrow{AB}|, & \overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow l. \end{cases}$$

Из определения вытекают следующие факты.

1°. Нулевые направленные отрезки, и только они, имеют нулевую величину.

2°. $(\overrightarrow{AB}) = -(\overrightarrow{BA})$.

Лемма Шаля. *При любом расположении точек A, B и C на прямой имеет место равенство*

$$(\overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CB}).$$

Равенство направленных отрезков. Направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ называются *равными*, если середины отрезков $[AD]$ и $[BC]$ совпадают.

Теорема 13.1. *Направленные отрезки $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ равны тогда и только тогда, когда они имеют:*

1) одинаковую длину: $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$

и, в случае $|\overrightarrow{AB}| \neq 0$,

2) одинаковое направление: $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$.

Теорема 13.2. *Для любого направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ и любой точки C существует, и притом единственная, точка D такая, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.*

Теорема 13.3. *Отношение равенства направленных отрезков является отношением эквивалентности на множестве всех направленных отрезков.*

Свободный вектор. Класс эквивалентности направленных отрезков называется *свободным вектором* или просто *вектором*. Векторы обозначают строчными латинскими буквами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. Итак, вектор $\mathbf{a} = \mathrm{cl}\,(\overrightarrow{AB})$ состоит из всех направленных отрезков, равных $\overrightarrow{AB}$. Обычно вместо символа $\mathbf{a} = \mathrm{cl}\,(\overrightarrow{AB})$ используется символ $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, который в зависимости от контекста читается как "вектор $\mathbf{a}$, порожденный направленным отрезком $\overrightarrow{AB}$" или "вектор $\mathbf{a}$, отложенный от точки A".

Длиной вектора $\mathbf{a}$ (*величиной вектора* $\mathbf{a}$ *на оси*) называется длина (соответственно величина) порождающего его направленного отрезка; векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, ..., $\mathbf{a}_k$ называются *коллинеарными* (*компланарными*), если коллинеарны (соответственно компланарны) порождающие их направленные отрезки; векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называются *одинаково направленными* (*противоположно направленными*), если одинаково (соответственно противоположно) направлены порождающие их направленные отрезки. Очевидно, что эти определения корректны несмотря на произвол в выборе направленных отрезков. Вектор единичной длины называется *единичным* вектором.

Сложение векторов. Сумма векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ определяется следующим образом. От произвольной точки A откладывается вектор $\mathbf{a}$, пусть B – конец этого вектора, т.е. $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$. Затем от точки B откладывается вектор $\mathbf{b}$, пусть $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$. *Суммой* $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ *векторов* $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется вектор, порожденный направленным отрезком $\overrightarrow{AC}$.

Это правило сложения векторов называется *правилом треугольника.* Очевидно, что этот же вектор $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ для неколлинеарных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ может быть получен как диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, т.е. если в параллелограмме $ABCD$: $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{AD}$, то

$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\overrightarrow{AC}$. Это правило сложения векторов называется *правилом параллелограмма.*

Теорема 13.4. *Операция сложения векторов обладает следующими свойствами:*

1) $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$, $\forall\,\mathbf{a},\mathbf{b}$ *(свойство коммутативности);*

2) $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})$, $\forall\,\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ *(свойство ассоциативности);*

3) существует вектор $\mathbf{0}$, *называемый нулевым, такой, что* $\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{a}=\mathbf{a}$, $\forall\,\mathbf{a}$ *(свойство существования нейтрального элемента);*

4) для любого вектора $\mathbf{a}$ *существует вектор* $-\mathbf{a}$, *называемый противоположным к вектору* $\mathbf{a}$, *такой, что* $\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\mathbf{0}$ *(свойство существования симметричного элемента).*

Очевидно, нулевым вектором $\mathbf{0}$ является класс эквивалентности нулевых направленных отрезков, а противоположным к вектору $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$ является вектор $-\mathbf{a}=\overrightarrow{BA}$.

Свойство ассоциативности позволяет обобщить правило треугольника для сложения любого числа векторов: суммой векторов $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ldots,\ \mathbf{a}_n$ будет вектор, соединяющий начало и конец ломаной линии, последовательными звеньями которой служат слагаемые векторы $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ldots,\ \mathbf{a}_n$. Отсюда, в частности, следует, что $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2+\ldots+\mathbf{a}_n=\mathbf{0}$ тогда и только тогда, когда эта ломаная замыкается.

Разностью векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}$ называется вектор $\mathbf{x}$ такой, что $\mathbf{a}+\mathbf{x}=\mathbf{b}$. Обозначение: $\mathbf{b}-\mathbf{a}$.

Теорема 13.5. *Для любых векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *существует, и притом единственная, разность* $\mathbf{b}-\mathbf{a}$.

Очевидно, $\mathbf{b}-\mathbf{a}=\mathbf{b}+(-\mathbf{a})$. Правило параллелограмма сложения неколлинеарных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ позволяет построить и разность $\mathbf{b}-\mathbf{a}$ как другую диагональ параллелограмма, т.е. если в параллелограмме $ABCD$: $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{AD}$, то $\mathbf{b}-\mathbf{a}=\overrightarrow{BD}$.

Умножение вектора на число. *Произведением вектора* $\mathbf{a}$ *на вещественное число* α называется вектор $\mathbf{b}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) $|\mathbf{b}|=|\alpha|\cdot|\mathbf{a}|$

и, в случае $\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$,

2) $\mathbf{b}\uparrow\uparrow\mathbf{a}$, если $\alpha>0$, и $\mathbf{b}\uparrow\downarrow\mathbf{a}$, если $\alpha<0$.

Обозначение: $\mathbf{b}=\alpha\mathbf{a}$. Очевидно, что $0\mathbf{a}=\alpha\mathbf{0}=\mathbf{0}$, $\forall\,\mathbf{a}$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$.

Теорема 13.6. *Операция умножения вектора на число обладает следующими свойствами: для любых векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и чисел* $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$

1) $1\cdot\mathbf{a}=\mathbf{a}$;

2) $(\alpha\beta)\mathbf{a}=\alpha(\beta\mathbf{a})$;

3) $(\alpha+\beta)\mathbf{a}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{a}$ *(свойство дистрибутивности умножения на число относительно сложения чисел);*

4) $\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\alpha\mathbf{a}+\alpha\mathbf{b}$ *(свойство дистрибутивности умножения на число относительно сложения векторов).*

Радиус-вектор точки. Пусть в пространстве (на плоскости или на прямой) зафиксирована точка O. Тогда между точками пространства (плоскости или прямой) и векторами можно установить взаимно однозначное соответствие, поставив в соответствие каждой точке A вектор $\mathbf{r}_A=\overrightarrow{OA}$. Вектор $\mathbf{r}_A$ называется *радиус-вектором* точки A относительно *полюса* O. Тот факт, что точка A имеет радиус-вектор $\mathbf{r}$, обозначается символом $A(\mathbf{r})$.

Говорят, что точка $M \neq B$ *делит ненулевой отрезок* $[AB]$ *в отношении* λ, если $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{MB}$. Обозначение: $(ABM) = \lambda$.

Заметим, что если точка M делит отрезок $[AB]$ в отношении λ, то она лежит на прямой AB и $\lambda \neq -1$.

Теорема 13.7. *Пусть* $A(\mathbf{r}_1)$, $B(\mathbf{r}_2)$, $M(\mathbf{r}_3)$ – *точки пространства и* $(ABM) = \lambda$. *Тогда*

$$\mathbf{r}_3 = \frac{\mathbf{r}_1 + \lambda\mathbf{r}_2}{1+\lambda}\,. \tag{13.1}$$

Пример 13.1. В треугольнике ABC точка D делит отрезок CB в отношении 2, медиана CM пересекается с прямой AD в точке O. В каком отношении точка O делит отрезок CM?

Решение. Обозначим $\overrightarrow{BM} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{BD} = \mathbf{b}$. Тогда $\overrightarrow{AD} = -2\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\overrightarrow{CM} = -3\mathbf{b} + \mathbf{a}$. Пусть $\overrightarrow{AO} = \alpha\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{OM} = \beta\overrightarrow{CM}$. Из треугольника AMO имеем: $\overrightarrow{OM} + \mathbf{a} + \overrightarrow{AO} = \mathbf{0}$, т.е. $\beta(\mathbf{a} - 3\mathbf{b}) + \mathbf{a} + \alpha(-2\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{0}$ или $(\beta + 1 - 2\alpha)\mathbf{a} + (\alpha - 3\beta)\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Отсюда и из линейной независимости векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ следует, что $2\alpha - \beta = 1$, $\alpha - 3\beta = 0$. Следовательно, $\alpha = 3/5$, $\beta = 1/5$. Так как $\overrightarrow{OM} = \beta\overrightarrow{CM}$, то $\overrightarrow{CO} = (1-\beta)\overrightarrow{CM}$. Это означает, что $\overrightarrow{CO} = ((1-\beta)/\beta)\overrightarrow{OM}$. Таким образом, $(CMO) = (1-\beta)/\beta = 4$. ∎

ЗАДАЧИ

13.1. Что можно сказать о векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, если:

1) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|$;
2) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$;
3) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} - \mathbf{b})$;
4) $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$;
5) $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$;
6) $\dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$?

13.2. Неколлинеарные векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ отложены от одной точки. Что можно сказать о векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, если вектор $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ делит угол между ними пополам?

13.3. В треугольнике ABC проведена медиана AM. Выразить вектор $\overrightarrow{AM}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

13.4. Доказать, что векторы $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CK}$, совпадающие с медианами треугольника ABC, могут служить сторонами треугольника.

13.5. Точки M_i, $i = \overline{1,6}$, являются серединами последовательных сторон выпуклого шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Доказать, что векторы $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_3M_4}$, $\overrightarrow{M_5M_6}$ могут служить сторонами треугольника.

13.6. Пусть E и F – середины сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$, не являющегося параллелограммом; K, L, M

и N – середины отрезков AF, CE, BF и DE соответственно. Доказать, что $KLMN$ – параллелограмм.

13.6.1. Точки E, F, G, H являются серединами последовательных сторон четырехугольника $ABCD$. Доказать, что точка пересечения отрезков EG и FH делит эти отрезки пополам.

13.7. Векторы $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a}$ и $\overrightarrow{BD} = \mathbf{b}$ служат диагоналями параллелограмма $ABCD$. Выразить векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$ через векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

13.8. В трапеции $ABCD$ отношение основания AD к основанию BC равно λ. Полагая $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{BD} = \mathbf{b}$, выразить через $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$.

13.9. Точки E и F служат серединами сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$. Доказать, что $\overrightarrow{EF} = \dfrac{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}}{2}$. Вывести отсюда теорему о средней линии трапеции.

13.10. Точки E и F служат серединами диагоналей AC и BD четырехугольника $ABCD$. Доказать, что

$$\overrightarrow{EF} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}}{2} = \frac{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}}{2}.$$

13.11. Точки K и L служат серединами сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$. Выразить векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$ через векторы $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{AL}$.

13.12. Доказать, что медианы произвольного треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении $2:1$, считая от вершины.

13.12.1. В треугольнике ABC точка D делит отрезок CB в отношении 2, медиана CM пересекается с прямой AD в точке O. В каком отношении точка O делит отрезок AD?

13.12.2. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1 такие, что $(ABC_1) = (BCA_1) = (CAB_1) = 2$. Отрезок AA_1 пересекается с отрезками BB_1 и CC_1 соответственно в точках M и N. Найти отношение $AM : MN : NA_1$.

13.13. Векторы $\overrightarrow{AB} = \mathbf{p}$ и $\overrightarrow{AF} = \mathbf{q}$ служат двумя смежными сторонами правильного шестиугольника $ABCDEF$. Выразить через $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$ векторы $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$.

13.14. Доказать, что сумма векторов, идущих из центра правильного многоугольника к его вершинам, равна $\mathbf{0}$.

13.15. Доказать, что вектор, идущий из произвольной точки плоскости в центр правильного многоугольника, есть среднее арифметическое векторов, идущих из этой точки к вершинам многоугольника.

13.16. В треугольнике найти точку, для которой сумма векторов, идущих из этой точки к вершинам треугольника, равна $\mathbf{0}$. Единственна ли такая точка?

13.16.1. Решить задачу, аналогичную задаче 13.16, для параллелограмма.

13.16.2. Решить задачу, аналогичную задаче 13.16, для произвольного четырехугольника.

13.17. От точки O отложены два ненулевых вектора $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$. Найти какой-нибудь вектор $\overrightarrow{OM}$, идущий по биссектрисе угла AOB.

13.18. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD угла A. Выразить вектор $\overrightarrow{AD}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

13.19. В треугольнике ABC биссектрисы AL и BK пересекаются в точке O. Выразить векторы $\overrightarrow{AO}$ и $\overrightarrow{BO}$ через векторы $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$ и $\mathbf{c} = \overrightarrow{AC}$, если известны длины сторон треугольника: $a = |BC|$, $b = |AC|$, $c = |AB|$. Вывести отсюда теорему о точке пересечения биссектрис в треугольнике.

13.20. Через точку P медианы CC_1 треугольника ABC проведены прямые AA_1 и BB_1 (точки A_1 и B_1 лежат на сторонах BC и CA). Доказать, что векторы $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{AB}$ коллинеарны.

13.21. а) Точки A, B и C лежат на одной прямой, а точки A_1, B_1 и C_1 – на другой прямой. Доказать, что из коллинеарности $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{AC_1}$ и $\overrightarrow{CA_1}$ следует коллинеарность $\overrightarrow{BC_1}$ и $\overrightarrow{CB_1}$.

б) Точки A, B и C лежат на одной прямой, а точки A_1, B_1 и C_1 таковы, что пары векторов $\overrightarrow{AB_1}$ и $\overrightarrow{BA_1}$, $\overrightarrow{AC_1}$ и $\overrightarrow{CA_1}$, $\overrightarrow{BC_1}$ и $\overrightarrow{CB_1}$ коллинеарны. Доказать, что точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой.

13.22. Пусть $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$ – неколлинеарные векторы и M – точка на прямой BC. Доказать, что $\overrightarrow{AM} = \alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b}$, где $\alpha + \beta = 1$. Что можно сказать о числах α и β, если точка M лежит:

а) на стороне BC;
б) внутри треугольника ABC;
в) вне треугольника ABC?

13.23. Пусть $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{c}$ – некомпланарные векторы и M – точка плоскости, проходящей через точки B, C и D. Доказать, что $\overrightarrow{AM} = \alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b} + \gamma\,\mathbf{c}$, где $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Что можно сказать о числах α, β и γ, если точка M лежит:
а) на грани BCD;
б) внутри тетраэдра $ABCD$;
в) вне тетраэдра $ABCD$?

13.24. На трех некомпланарных векторах $\overrightarrow{AB} = \mathbf{p}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{q}$, $\overrightarrow{AA'} = \mathbf{r}$ построен параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$. Выразить через $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ и $\mathbf{r}$ векторы, совпадающие с ребрами, диагональю параллелепипеда и диагоналями граней этого параллелепипеда, для которых вершина A' служит началом.

13.25. В тетраэдре $ABCD$ даны ребра, выходящие из вершины A: $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{c}$ и $\overrightarrow{AD} = \mathbf{d}$. Выразить через эти векторы остальные ребра тетраэдра, медиану $\overrightarrow{DM}$ грани BCD и вектор $\overrightarrow{AQ}$, где Q – точка пересечения медиан грани BCD.

13.26. Дан тетраэдр $OABC$. Полагая $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$, выразить через $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ векторы $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{RS}$, в которых M, P и R – середины ребер OA, OB и OC, а N, Q и S – середины соответствующих противоположных ребер.

13.27. Дан тетраэдр $OABC$. Полагая $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$, выразить через $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ вектор $\overrightarrow{EF}$, в котором E – середина ребра OA, а F – точка пересечения медиан треугольника ABC.

13.28. Даны радиус-векторы $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ трех последовательных вершин A, B и C параллелограмма. Найти радиус-вектор четвертой вершины D.

13.29. Зная радиус-векторы $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ вершин треугольника, найти радиус-вектор точки пересечения его медиан.

13.30. Зная радиус-векторы $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ трех последовательных вершин параллелограмма, найти радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки пересечения диагоналей параллелограмма.

13.31. Даны три последовательные вершины трапеции $A(\mathbf{r}_1)$, $B(\mathbf{r}_2)$ и $C(\mathbf{r}_3)$. Найти радиус-векторы: $\mathbf{r}_4$ четвертой вершины D, $\mathbf{r}'$ точки пересечения диагоналей и $\mathbf{r}''$ точки пересечения боковых сторон, зная, что основание AD в λ раз больше основания BC.

13.32. Зная радиус-векторы $\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_B$, $\mathbf{r}_D$ и $\mathbf{r}_{A'}$ четырех вершин параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$, найти радиус-векторы четырех остальных его вершин.

13.33. Радиус-векторы $\overrightarrow{OA} = \mathbf{r}_1$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{r}_2$ и $\overrightarrow{OC} = \mathbf{r}_3$ служат ребрами параллелепипеда. Найти радиус-вектор точки пересечения диагонали параллелепипеда, выходящей из вершины O, с плоскостью, проходящей через вершины A, B и C.

13.33.1. Зная радиус-векторы $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$, $\mathbf{r}_4$ вершин тетраэдра, найти радиус-вектор точки пересечения отрезков, соединяющих середины его противоположных ребер.

13.34. Известно, что $(ABC) = \lambda$. Найти (CAB).

13.35. Известно, что $(ABP) = \lambda$, $(ABQ) = \mu$. Найти (PRQ), если точка R делит отрезок AB в отношении ν.

13.35.1. Известно, что $(ABP) = \lambda$, $(ABQ) = \mu$. Найти (ABR), если точка R является серединой отрезка PQ.

13.36. Доказать, что если точки K, L, M, N делят в одном и том же отношении λ стороны AB, BC, CD, DA параллелограмма $ABCD$, то четырехугольник $KLMN$ есть параллелограмм. Показать, что если $\lambda \neq 1$ и четырехугольник $KLMN$ является параллелограммом, то четырехугольник $ABCD$ – также параллелограмм.

13.37. Дан тетраэдр $ABCD$. Найти точку M, для которой

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \mathbf{0}.$$

13.38. От точки M отложены три ненулевых вектора $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, сумма которых равна нулевому вектору. Зная углы α, β, γ между векторами $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$, $\mathbf{z}$ и $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ соответственно, найти отношения длин этих векторов $|\mathbf{x}| : |\mathbf{y}| : |\mathbf{z}|$.

13.39. От точки M, лежащей в плоскости треугольника ABC, отложены три ненулевых вектора $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, сонаправленных $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ соответственно и таких, что $\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{0}$. Найти отношение длин этих векторов $|\mathbf{x}| : |\mathbf{y}| : |\mathbf{z}|$, если:

а) точка M является центром окружности, описанной около треугольника ABC;

б) точка M является центром окружности, вписанной в треугольник ABC;

в) точка M является точкой пересечения высот треугольника ABC, а сам треугольник ABC остроугольный.

13.40. Найти точку M, лежащую в плоскости треугольника ABC, если сумма трех ненулевых векторов с равными длинами, отложенных от этой точки и сонаправленных $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ соответственно, равна нулевому вектору.

13.41. Даны два треугольника ABC и $A'B'C'$. Выразить вектор $\overrightarrow{MM'}$, соединяющий точки пересечения медиан этих треугольников, через векторы $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$.

13.42. В прямоугольном треугольнике ABC опущен перпендикуляр CH на гипотенузу AB. Выразить вектор $\overrightarrow{CH}$ через векторы $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$ и длины катетов $|BC| = a$ и $|CA| = b$.

13.43. Зная радиус-векторы $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ вершин треугольника ABC и длины a, b, c сторон, противолежащим соответствующим вершинам, найти радиус-вектор $\mathbf{r}$ центра круга, вписанного в этот треугольник.

13.44. Зная радиус-векторы $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ вершин треугольника ABC и его внутренние углы, найти радиус-вектор $\mathbf{r}$ основания перпендикуляра, опущенного из вершины A на сторону BC.

13.45. Доказать, что отрезки прямых, соединяющих середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам. Доказать также, что в той же точке пересекаются отрезки прямых, соединяющих вершины тетраэдра с точками пересечения медиан противоположных граней, и делятся этой точкой в отношении $3:1$ (считая от вершин).

13.46. Доказать, что каково бы ни было конечное множество точек A_1, $A_2, \ldots, A_n$ (на прямой, на плоскости или в пространстве), существует и притом только одна такая точка M, что $\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2} + \ldots + \overrightarrow{MA_n} = \mathbf{0}$.

§14. Вещественное линейное пространство

Непустое множество V называется *вещественным линейным пространством*, если на нем заданы два закона композиции:

внутренний закон композиции, называемый сложением и подчиненный аксиомам:

1) $a + b = b + a$, $\forall a, b \in V$ (аксиома коммутативности),

2) $(a + b) + c = a + (b + c)$, $\forall a, b, c \in V$ (аксиома ассоциативности),

3) $\exists\, \theta \in V : a + \theta = a$, $\forall a \in V$,

4) $\forall\, a \in V \ \ \exists\, (-a) \in V \colon a + (-a) = \theta$;

внешний закон композиции, называемый умножением элемента a на число $\alpha \in \mathbb{R}$ и подчиненный аксиомам:

5) $1 \cdot a = a, \forall a \in V$,

6) $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall a \in V$;

и если эти законы связаны между собой аксиомами:

7) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall a \in V$ (аксиома дистрибутивности умножения на число относительно сложения чисел),

8) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b, \forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall a, b \in V$ (аксиома дистрибутивности умножения на число относительно сложения элементов V).

Элементы линейного пространства называются *векторами*, а само линейное пространство называют также *векторным пространством.*

Вектор θ называется *нулевым* вектором пространства, а вектор $(-a)$ – *противоположным к вектору* a. Нулевой вектор обозначают также символом $\mathbf{0}$.

Линейной комбинацией векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейного пространства *с коэффициентами* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ называется вектор

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k.$$

Разностью векторов b и a линейного пространства V называется вектор $x \in V$ такой, что $a + x = b$. Обозначение: $b - a$.

Большинство задач этой книги сформулировано для следующих классических примеров линейных пространств.

Пример 14.1. Геометрические пространства V_1, V_2, V_3. Множества V_1, V_2, V_3 всех векторов на прямой, на плоскости и в пространстве соответственно образуют вещественные линейные пространства относительно стандартных операций сложения векторов и умножения вектора на действительное число. Это следует из теорем 13.4 и 13.6, и из того, что каждое из этих множеств замкнуто относительно обеих операций, содержит нулевой вектор $\mathbf{0}$ и противоположный вектор $-\mathbf{a}$ к любому своему вектору $\mathbf{a}$.

Линейные пространства V_1, V_2, V_3 будем называть *геометрическими пространствами.*

Для изображения геометрических пространств условимся все векторы откладывать от одной фиксированной точки O на прямой (на плоскости и в пространстве соответственно). При таком соглашении каждый свободный вектор будет однозначно определен своим концом. В этом смысле мы будем, говоря о свободном векторе, указывать только его конец.

Пример 14.2. Пространство вещественных матриц $\mathbb{R}^{m\times n}$. Как следует из теорем 1.1 и 1.2, множество $\mathbb{R}^{m\times n}$ всех вещественных матриц размера $m \times n$ является вещественным линейным пространством.

Пример 14.3. Арифметическое (координатное) пространство $\mathbb{R}^n$. Пусть $\mathbb{R}^n$ – множество всевозможных упорядоченных наборов n действительных чисел, называемых *арифметическими векторами* (или *n-мерными векторами*). Если арифметические векторы записывать в виде $a = (a_1, \ldots, a_n)$, то

$$\mathbb{R}^n = \left\{a = (a_1, \ldots, a_n) \,|\, a_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}\right\}.$$

Два арифметических вектора $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, \ldots, b_n)$ называются *равными*, если $a_i = b_i$, $i = \overline{1, n}$.

Операции над арифметическими векторами вводятся следующим образом:

$$a + b = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n),\ \alpha a = (\alpha a_1, \ldots, \alpha a_n),\ \alpha \in \mathbb{R}.$$

Нетрудно проверить, что $\mathbb{R}^n$ – вещественное линейное пространство относительно введенных операций.

Пример 14.4. Пространства многочленов. *Многочленом n-й степени* от одной переменной t с вещественными коэффициентами называется выражение вида $f(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n$, где $a_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{0,n}$, причем $a_n \neq 0$. Число $0 \in \mathbb{R}$ по определению считается многочленом с нулевыми коэффициентами и называется *нулевым многочленом.* Степень нулевого многочлена не определена.

Два многочлена $f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_kt^k$ и $g(t) = \sum_{k=0}^{m} b_kt^k$ называются *равными,* если $n = m$ и $a_k = b_k$, $k = \overline{0,n}$.

Суммой многочленов $f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_kt^k$ и $g(t) = \sum_{k=0}^{m} b_kt^k$ называется многочлен $h(t) = \sum_{k\geq 0}(a_k + b_k)t^k$, в котором недостающие коэффициенты (a_k или b_k) заменяются нулями. Обозначение: $f(t) + g(t)$.

Произведением многочлена $f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_kt^k$ *на число* $\alpha \in \mathbb{R}$ называется многочлен $\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha a_kt^k$.

Нетрудно проверить, что множества M_n всех многочленов степени не выше n и множество M_∞ многочленов всех степеней, пополненные нулевым многочленом, образуют вещественные линейные пространства.

Следующие свойства линейных пространств являются элементарными следствиями из аксиом.

1°. *В линейном пространстве существует единственный нулевой вектор.*

2°. *Для любого вектора линейного пространства существует единственный противоположный вектор.*

3°. *В линейном пространстве справедливы равенства:* $0a = \theta$, $\forall a \in V$ *и* $\alpha\theta = \theta$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

4°. *В линейном пространстве из равенства $\alpha a = \theta$ следует, что либо $\alpha = 0$, либо $a = \theta$.*

5°. *Для любого вектора a линейного пространства противоположный ему вектор может быть получен как произведение: $-a = (-1)a$.*

6°. *Для любой пары векторов a и b линейного пространства существует, и притом единственная, разность $a - b$, причем $a - b = a + (-b)$.*

ЗАДАЧИ

14.1. Для каждого из следующих множеств векторов на плоскости определить, является ли оно линейным пространством относительно стандартных операций сложения векторов и умножения вектора на число (если не оговорено противное, то предполагается, что все векторы отложены от фиксированной точки O плоскости, являющейся началом прямоугольной системы координат).

1. Все векторы, концы которых лежат на данной прямой.
2. Все векторы, начала и концы которых лежат на данной прямой.
3. Все векторы, концы которых не лежат на данной прямой.

4. Все векторы, концы которых лежат:
   а) в первой четверти системы координат;
   б) в первой или третьей четверти.
5. Все векторы, которые образуют с данным ненулевым вектором $\mathbf{a}$ заданный угол φ, $0 \le \varphi < \pi$.

14.2. Определить, является ли вещественным линейным пространством множество

а) $\mathbb{Z}$ целых чисел,

б) $\mathbb{Q}$ рациональных чисел,

в) $\mathbb{R}$ действительных чисел

относительно стандартных операций сложения и умножения чисел.

14.3. На множестве $\mathbb{R}_+$ положительных действительных чисел определены следующие операции:

а) "сложение" $x \oplus y = xy$ (т.е. обычное умножение чисел x и y);

б) "умножение на действительное число" $\alpha \odot x = x^\alpha$ (т.е. возведение числа x в степень α).

Показать, что множество $\mathbb{R}_+$ относительно указанных операций образует вещественное линейное пространство.

14.4. Пусть $\widetilde{\mathbb{R}}^2$ – множество всех упорядоченных пар действительных чисел $x = (\alpha_1, \alpha_2)$ с операциями:

а) если $x = (\alpha_1, \alpha_2)$, $y = (\beta_1, \beta_2)$, то $x + y = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2)$;

б) если $\lambda \in \mathbb{R}$, то $\lambda x = (\lambda\alpha_1, \alpha_2)$.

Является ли $\widetilde{\mathbb{R}}^2$ вещественным линейным пространством?

14.5. Для каждого из следующих множеств векторов арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ определить, является ли оно линейным пространством относительно стандартных операций сложения и умножения на число в $\mathbb{R}^n$.

1. Все векторы из $\mathbb{R}^n$, компоненты которых удовлетворяют условию:
   а) $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$; б) $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$.
2. Все векторы из $\mathbb{R}^n$, у которых:
   а) первая и последняя компоненты равны между собой;
   б) все компоненты с четными номерами равны нулю.
3. Все векторы из $\mathbb{R}^n$, которые являются линейными комбинациями данной системы векторов a_1, $a_2, \ldots, a_k$ из $\mathbb{R}^n$.

14.6. Пусть S – множество всех бесконечных последовательностей действительных чисел $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots)$, в котором введены следующие операции:

а) если $x = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots)$, $y = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \ldots)$, то $x + y = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \ldots, \alpha_n + \beta_n, \ldots)$;

б) если $\lambda \in \mathbb{R}$, то $\lambda x = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \ldots, \lambda\alpha_n, \ldots)$.

Для каждого из следующих подмножеств множества S определить, является ли оно вещественным линейным пространством относительно указанных операций.

1. Все множество S.
2. Все последовательности из S, элементы которых удовлетворяют соотношению $\alpha_k = \alpha_{k-1} + \alpha_{k-2}$, $k = 3, 4, \ldots$.
3. Все последовательности из S, все элементы которых, начиная с некоторого номера, равны нулю.
4. Все последовательности из S, которые содержат бесконечно много совпадающих элементов.

14.7. Для каждого из следующих множеств квадратных матриц n-го порядка определить, является ли оно линейным пространством относительно стандартных операций сложения матриц и умножения матрицы на число.

1. Множество всех матриц A, для которых:
   а) $\operatorname{tr} A = 0$; в) $A^T = A$;
   б) $\operatorname{tr} A = 1$; г) $A^T = -A$.
2. Множество всех невырожденных матриц из $\mathbb{R}^{n\times n}$, пополненное нулевой матрицей.
3. Множество всех верхних ступенчатых матриц из $\mathbb{R}^{n\times n}$.
4. Множество всех верхних треугольных матриц из $\mathbb{R}^{n\times n}$.

14.8. Для каждого из следующих множеств многочленов от одной переменной с вещественными коэффициентами определить, является ли оно линейным пространством относительно стандартных операций сложения многочленов и умножения многочлена на число.

1. Множество всех многочленов данной степени.
2. Множество всех многочленов $f(t)$, удовлетворяющих условиям:
   а) $f(1) = 0$; д) $f'(0) = 0$;
   б) $f(1) = 1$; е) $f'(1) = f(1)$;
   в) $f(0) + 2f(1) = 0$; ж) $f'(0) - f(0) = f'(1) - f(1)$.
   г) $f(0) + 2f(1) = 1$;
3. Множество всех многочленов $f(t)$, для которых $t = 1$ – простой корень.

14.9. Для каждого из следующих множеств функций, определенных на заданном конечном отрезке $[a, b]$, выяснить, является ли оно линейным пространством относительно обычных операций сложения функций и умножения функции на число.

1. Множество всех функций, непрерывных на $[a, b]$.
2. Множество всех функций, дифференцируемых на (a, b).
3. Множество всех функций, интегрируемых по Риману на $[a, b]$.
4. Множество всех функций, ограниченных на $[a, b]$.
5. Множество функций таких, что $\sup\limits_{a \le x \le b} |f(x)| \le 1$.
6. Множество всех функций, неотрицательных на $[a, b]$.
7. Множество функций таких, что $f(a) = f(b)$.
8. Множество функций таких, что $f'((a + b)/2) = 1$.
9. Множество функций таких, что $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = \infty$.
10. Множество функций, монотонно возрастающих на $[a, b]$.
11. Множество функций, монотонных на $[a, b]$.
12. Множество функций, принимающих конечное число значений на $[a, b]$.
13. Множество функций, обращающихся в тождественный нуль в некоторых окрестностях точек a и b.

14.10. Найти ошибку в следующем "доказательстве" того, что аксиома $1 \cdot a = a \ \forall a \in V$ вытекает из других аксиом линейного пространства: "Пусть $a = \alpha b$, тогда $1 \cdot a = 1(\alpha b) = (1 \cdot \alpha)b = \alpha b = a$".

14.11. Привести пример множества M, для которого выполнены все аксиомы линейного пространства, кроме аксиомы: $1 \cdot a = a \ \forall a \in M$. В чем состоит значение этой аксиомы в определении линейного пространства?

14.12. Доказать, что коммутативность сложения векторов вытекает из остальных аксиом линейного пространства.

§15. Линейная зависимость

Линейная комбинация векторов называется *тривиальной*, если все ее коэффициенты равны нулю, и *нетривиальной*, если среди коэффициентов этой комбинации хотя бы один отличен от нуля.

Система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ называется *линейно зависимой*, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору, т.е. если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, одновременно не равные нулю, такие, что

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k = \theta, \tag{15.1}$$

и *линейно независимой*, если нулевому вектору равна только тривиальная линейная комбинация этих векторов, т.е. если из равенства (15.1) следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$.

Теорема 15.1. *Система из одного вектора линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.*

Теорема 15.2. *Система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$, где $k > 1$, линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов этой системы линейно выражается через другие.*

Теорема 15.3. *Если подсистема системы векторов линейно зависима, то и вся система линейно зависима.*

Теорема 15.4. *Любая подсистема линейно независимой системы векторов линейно независима.*

Теорема 15.5. *Система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейно независима тогда и только тогда, когда любой вектор, являющийся линейной комбинацией этих векторов, имеет единственное разложение по этим векторам.*

Теорема 15.6. *Если система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейно независима, а система $a_1, a_2, \ldots, a_k, b$ линейно зависима, то вектор b линейно выражается через векторы $a_1, a_2, \ldots, a_k$.*

Пример 15.1. Арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$. В арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$ единичные векторы

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0), \\ &\ldots\ldots\ldots \\ e_n &= (0, 0, 0, \ldots, 1) \end{aligned} \tag{15.2}$$

линейно независимы. Это следует из того, что линейная комбинация этих векторов с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ представляет собой вектор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, который равен нулевому вектору $\theta = (0, \ldots, 0)$ тогда и только тогда, когда $\alpha_i = 0$, $i = \overline{1, n}$.

Пример 15.2. Пространство матриц $\mathbb{R}^{m\times n}$. Матричные единицы $E_{ij} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ($i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$) (см. задачу 1.14) линейно независимы. Это следует из того, что линейная комбинация этих матриц с коэффициентами a_{ij} ($i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$) представляет собой матрицу $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, которая равна нулевой матрице тогда и только тогда, когда $a_{ij} = 0$ ($i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$).

Пример 15.3. Пространство многочленов. Многочлены 1, t, $t^2, \ldots, t^n$ линейно независимы. Это следует из того, что линейная комбинация этих многочленов с коэффициентами $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ представляет собой многочлен $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k t^k$, который равен нулевому многочлену тогда и только тогда, когда $\alpha_k = 0$, $k = \overline{0, n}$.

Пример 15.4. Геометрические пространства. Следующие факты дают геометрическую иллюстрацию понятия линейной зависимости.

Теорема 15.7. *Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.*

С л е д с т в и е 1. *Любые два (значит, и более) вектора прямой линейно зависимы.*

Т е о р е м а 15.8. *Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.*

С л е д с т в и е 2. *Любые три (значит, и более) вектора плоскости линейно зависимы.*

Т е о р е м а 15.9. *Любые четыре вектора линейно зависимы.*

По аналогии с геометрическими векторами *два вектора* линейного пространства называются *коллинеарными*, если они отличаются лишь числовым множителем.

З А Д А Ч И

15.1. Доказать, что система векторов, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.

15.2. Доказать, что система векторов, два вектора которой различаются скалярным множителем, линейно зависима.

15.3. Доказать, что если три вектора a_1, a_2, a_3 линейно зависимы и вектор a_3 не выражается линейно через векторы a_1 и a_2, то векторы a_1 и a_2 различаются между собой лишь числовым множителем.

15.4. Доказать, что упорядоченная система векторов a_1, a_2, ..., a_k, отличных от нуля, линейно независима тогда и только тогда, когда ни один из этих векторов не выражается линейно через предыдущие.

15.5. Доказать, что если к упорядоченной линейно независимой системе векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ приписать впереди еще один вектор b, то не более чем один вектор полученной системы будет линейно выражаться через предыдущие.

15.6. 1) Доказать, что ненулевые строки верхней трапециевидной матрицы, т.е. строки

$$\begin{aligned}
a_1 &= (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1r}, a_{1,r+1}, \ldots, a_{1n}),\\
a_2 &= (0, \quad a_{22}, \ldots, a_{2r}, a_{2,r+1}, \ldots, a_{2n}),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_r &= (0, \quad 0, \quad \ldots, a_{rr}, a_{r,r+1}, \ldots, a_{rn}),
\end{aligned}$$

где $a_{kk} \neq 0$, $k = \overline{1,r}$, линейно независимы как векторы пространства $\mathbb{R}^n$.

2) Доказать то же утверждение для ненулевых строк верхней ступенчатой матрицы.

15.7. *Элементарными преобразованиями системы векторов* называются преобразования следующих типов: а) перестановка двух векторов системы; б) умножение вектора системы на ненулевое число; в) прибавление к одному вектору системы другого вектора, умноженного на произвольное число Доказать, что линейная зависимость и линейная независимость системы векторов не нарушаются при ее элементарных преобразованиях.

15.8. Доказать, что произвольную систему векторов арифметического пространства элементарными преобразованиями можно привести к системе векторов, образующих строки некоторой верхней ступенчатой матрицы. Как определить, была ли исходная система линейно зависима?

15.9. Доказать, что для любых трех векторов a, b, c и любых трех чисел α, β, γ векторы $\alpha a - \beta b$, $\gamma b - \alpha c$, $\beta c - \gamma a$ линейно зависимы.

15.10. Доказать, что векторы a, b, c, d линейно зависимы тогда и только тогда, когда линейно зависимы векторы $a + b + c$, $a + b + d$, $b + c + d$, $a + c + d$.

15.11. Пусть x, y, z – линейно независимая система векторов. Будут ли линейно независимы следующие системы векторов:

а) x, $x + y$, $x + y + z$;

б) $x + y$, $y + z$, $z + x$;

в) $x - y$, $y - z$, $z - x$?

15.12. Найти все значения λ, при которых:

а) из линейной независимости системы векторов a_1, a_2 следует линейная независимость системы $\lambda a_1 + a_2, a_1 + \lambda a_2$;

б) из линейной независимости системы векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ следует линейная независимость системы $a_1 + a_2, a_2 + a_3, \ldots$, $a_{n-1} + a_n, a_n + \lambda a_1$.

Выяснить, являются ли следующие системы векторов арифметических пространств линейно зависимыми.

15.13. $x_1 = (-3, 1, 5)$, $x_2 = (6, -2, 15)$.

15.14. $x_1 = (4, -12, 28)$, $x_2 = (-7, 21, -49)$.

15.15. $x_1 = (1, 2, 3, 0)$, $x_2 = (2, 4, 6, 1)$.

15.16. $x_1 = (1, 3, 4, 2, 7, 8)$, $x_2 = (2, 6, 8, 6, 21, 24)$.

15.17. $x_1 = (1, 2, 3)$, $x_2 = (2, 5, 7)$, $x_3 = (3, 7, 10)$.

15.18. $x_1 = (1, 2, 3)$, $x_2 = (2, 5, 7)$, $x_3 = (3, 7, 10 + \varepsilon)$.

15.19. $x_1 = (1, 2, 3)$, $x_2 = (4, 5, 6)$, $x_3 = (7, 8, 9)$.

15.20. $x_1 = (3, 4, 1, 2, 0, 0)$, $x_2 = (6, 8, 2, 4, 1, 3)$, $x_3 = (0, 0, 4, 8, 2, 6)$.

15.21. $x_1 = (1,1,1,1)$,
$x_2 = (1,-1,-1,1)$,
$x_3 = (1,-1,1,-1)$,
$x_4 = (1,1,-1,-1)$.

15.22. $x_1 = (1,1,0,0,0)$,
$x_2 = (1,2,0,0,0)$,
$x_3 = (9,8,7,2,1)$,
$x_4 = (5,9,7,1,1)$.

15.23. Пусть дана система векторов арифметического пространства

$$\begin{aligned} x_1 &= (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), \\ x_2 &= (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_s &= (a_{s1}, a_{s2}, \ldots, a_{sn}), \end{aligned}$$

где $s \le n$. Доказать, что если $|a_{jj}| > \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \ne j}}^{s} |a_{ij}|$, $j = \overline{1,s}$, то данная система векторов линейно независима.

15.24. Если из каждого вектора a_1, $a_2, \ldots$, a_k пространства $\mathbb{R}^n$ исключить компоненты с номерами i_1, $i_2, \ldots$, i_m ($1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_m \le n$), получится новая система векторов b_1, $b_2, \ldots$, b_k пространства $\mathbb{R}^{n-m}$, которую будем называть *укороченной* для исходной системы. В свою очередь, исходную систему будем называть *удлиненной* для системы b_1, $b_2, \ldots$, b_k. Доказать, что любая укороченная система для линейно зависимой системы векторов сама линейно зависима, а любая удлиненная система для линейной независимой системы векторов сама линейно независима.

15.25. Доказать, что в пространстве многочленов всякая конечная система, состоящая из многочленов разных степеней и не содержащая нуля, линейно независима.

15.26. Дана система многочленов $f_1(t) = 1-t^2$, $f_2(t) = 1+t^3$, $f_3(t) = t - t^3$, $f_4(t) = 1 + t + t^2 + t^3$. Найти линейные комбинации многочленов этой системы:

а) $5f_1 + f_2 - 4f_3$; б) $f_1 + 9f_2 - 4f_4$.

Что можно сказать об исходной системе многочленов?

15.27. Для многочлена, полученного в предыдущей задаче, найти другие разложения по системе $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, $f_4(t)$.

15.28. Пусть a, b, c – различные действительные числа. Выяснить, будет ли линейно зависима следующая система многочленов:

$$(t-a)(t-b), \quad (t-a)(t-c), \quad (t-b)(t-c).$$

15.29. Доказать, что матрицы $A_1, \ldots, A_k$ пространства $\mathbb{R}^{n\times m}$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда линейно зависимы матрицы $A_1^T, \ldots, A_k^T$.

15.30. Доказать, что матрицы $A_1, \ldots, A_k$ пространства $\mathbb{R}^{n\times m}$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы для одной невырожденной матрицы $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ линейно зависимы матрицы $BA_1, \ldots, BA_k$.

15.31. Пусть $A_j \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $j = \overline{1,k}$, и $B \in \mathbb{R}^{s\times l}$. Доказать, что матрицы $B \otimes A_1$, $B \otimes A_2, \ldots$, $B \otimes A_k$ линейно независимы тогда и только тогда, когда линейно независимы матрицы A_1, $A_2, \ldots$, A_k и матрица B ненулевая.

15.32. Известно, что невырожденная матрица A такова, что для некоторого $k \in \mathbb{N}$ матрицы $I, A, \ldots, A^k$ линейно зависимы. Доказать, что матрица A^{-1} есть многочлен от A степени не выше $k-1$.

15.33. Доказать линейную независимость следующих систем функций:

а) $\sin x, \cos x$;

б) $1, \sin x, \cos x$;

в) $\sin x, \sin 2x, \ldots, \sin nx$ $(n \in \mathbb{N})$;

г) $1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos nx$ $(n \in \mathbb{N})$;

д) $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx$ $(n \in \mathbb{N})$;

е) $1, \sin x, \sin^2 x, \ldots, \sin^n x$ $(n \in \mathbb{N})$;

ж) $1, \cos x, \cos^2 x, \ldots, \cos^n x$ $(n \in \mathbb{N})$.

15.34. Доказать линейную независимость систем функций:

а) $e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \ldots, e^{\alpha_n x}$ $(n \in \mathbb{N})$,

б) $x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, \ldots, x^{\alpha_n}$ $(n \in \mathbb{N})$,

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ – попарно различные действительные числа.

15.35. Доказать, что в пространстве функций одной переменной векторы $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ линейно независимы тогда и только тогда, когда существуют числа $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ такие, что $\det(f_i(a_j)) \neq 0$.

15.36. Доказать, что в пространстве $n-1$ раз дифференцируемых функций одной переменной векторы $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ линейно независимы, если существует такое число $a \in \mathbb{R}$, что их вронскиан $\det(f_i^{(j-1)}(a))$ отличен от нуля. Верно ли обратное утверждение?

§16. Ранг матрицы

Рангом ненулевой матрицы называется максимальный порядок ненулевых миноров этой матрицы. Ранг нулевой матрицы по определению считается равным нулю. Обозначение: $\operatorname{rg} A$.

Очевидно, что если $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, то $\operatorname{rg} A \le \min(m, n)$.

Матрица, ранг которой равен числу строк (столбцов), называется *матрицей полного ранга по числу строк (столбцов)*.

Пусть $\operatorname{rg} A = r > 0$. Любой ненулевой минор r-го порядка этой матрицы называется *базисным минором*, а строки и столбцы, в которых расположен базисный минор, – *базисными строками* и *столбцами*.

Теорема 16.1 (о базисном миноре). *Базисные строки (столбцы) линейно независимы. Любая строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией ее базисных строк (столбцов).*

Следствие 1 (**необходимое и достаточное условие равенства нулю определителя**). *Определитель матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда какая-либо ее строка (столбец) является линейной комбинацией других ее строк (столбцов).*

Теорема 16.2. *Если в линейном пространстве бóльшая система векторов линейно выражается через меньшую, то большая система линейно зависима.*

Теорема 16.3. *Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк (столбцов).*

Следствие 2. $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^T$.

Теорема 16.4. *Если все строки (столбцы) матрицы A линейно выражаются через строки (столбцы) матрицы B, то* $\operatorname{rg} A \le \operatorname{rg} B$.

Теорема 16.5. *Ранг произведения матриц не превосходит рангов сомножителей.*

Теорема 16.6. *Ранг матрицы не изменяется при умножении ее на невырожденную матрицу.*

Теорема 16.7. *Элементарные преобразования матрицы не изменяют ее ранга.*

Теорема 16.8. *Ранг матрицы не изменится, если из системы ее строк (столбцов) вычеркнуть или к ней приписать строку (соответственно столбец), которая является линейной комбинацией других строк (соответственно столбцов).*

Метод Гаусса вычисления ранга. Теоретическую основу этого метода для вычисления ранга матрицы (см. §7) составляют следующие факты:

– ранг верхней (нижней) трапециевидной матрицы равен количеству ее ненулевых строк (соответственно столбцов);

– элементарные преобразования матрицы не изменяют ее ранга;

– любая матрица элементарными преобразованиями строк и столбцов приводится к трапециевидной форме.

Метод Гаусса вычисления ранга матрицы состоит в приведении этой матрицы элементарными преобразованиями к верхней (нижней) трапециевидной форме и подсчете ее ненулевых строк (столбцов).

Как следует из теоремы 3.1, элементарными преобразованиями только строк (столбцов) матрицы ее можно привести к верхней (соответственно нижней) ступенчатой форме. Так как ранг верхней (нижней) ступенчатой матрицы также равен количеству ее ненулевых строк (соответственно столбцов), то часто в методе Гаусса вычисления ранга матрицу приводят лишь к ступенчатой форме.

Матрицы $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ называются *эквивалентными*, если существуют невырожденные матрицы P и Q такие, что выполнено равенство $A = PBQ$. Обозначение: $A \sim B$.

Теорема 16.9. *Эквивалентность матриц является отношением эквивалентности на множестве матриц $\mathbb{R}^{m\times n}$.*

Теорема 16.10. *Любая ненулевая матрица $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ранга r эквивалентна матрице $I_r \in \mathbb{R}^{m\times n}$ вида*

$$I_r = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \\ & & \ddots & & O \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \\ \hline & & O & & O \end{array}\right]$$

(здесь все элементы, кроме первых r диагональных элементов, равных единице, равны нулю).

Теорема 16.11. *Две матрицы $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда их ранги совпадают.*

Пример 16.1. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 7 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Решение. Для вычисления $\operatorname{rg} A$ воспользуемся методом Гаусса:

$$A \to \left\{\begin{array}{l}\text{переставим}\\ \text{1-ю и 3-ю}\\ \text{строки}\end{array}\right\} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & 4 & 3 & 3 \end{bmatrix} \to \left\{\begin{array}{l}\text{вычтем из 4-й строки 1-ю}\\ \text{строку, из 3-й – утроен-}\\ \text{ную 1-ю, а из 2-й – удво-}\\ \text{енную 2-ю строку}\end{array}\right\} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -10 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \to \left\{\begin{array}{l}\text{из 3-й строки вычтем}\\ \text{удвоенную 2-ю стро-}\\ \text{ку, а к 4-й строке при-}\\ \text{бавим 2-ю строку}\end{array}\right\} \to \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

В последней верхней ступенчатой матрице – три ненулевые строки, и следовательно, $\operatorname{rg} A = 3$. ∎

Пример 16.2. Найти ранг матрицы A в зависимости от значения параметра λ:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Решение. Воспользуемся методом Гаусса:

$$A \to \left\{\begin{array}{l}\text{переставим}\\ \text{1-ю и 3-ю}\\ \text{строки}\end{array}\right\} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \left\{\begin{array}{l}\text{вычтем из 2-й строки 1-ю}\\ \text{строку, а из 3-й – 1-ю стро-}\\ \text{ку, умноженную на } \lambda\end{array}\right\} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 \end{bmatrix} \to \left\{\begin{array}{l}\text{прибавим к 3-}\\ \text{й строке 2-ю}\end{array}\right\} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & (2+\lambda)(1-\lambda) \end{bmatrix} = A_1.$$

Если $\lambda = 1$, то

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

и $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A_1 = 1$.

Если $\lambda \neq 1$, то вторую и третью строки матрицы A_1 можно разделить на $\lambda - 1$, так что

$$A_1 \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -\lambda - 2 \end{bmatrix}.$$

Ранг последней матрицы равен 2, если $\lambda = -2$, и равен 3, если $\lambda \neq -2$.

Таким образом, $\operatorname{rg} A = 1$ при $\lambda = 1$, $\operatorname{rg} A = 2$ при $\lambda = -2$ и $\operatorname{rg} A = 3$ при всех остальных значениях λ. ■

Пример 16.3. Установить, является ли следующая система векторов линейно зависимой:

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, 0, 2, 1, 3, 7), \\ a_2 &= (2, 1, 0, 3, 1, 1), \\ a_3 &= (1, 2, 3, 0, 2, 4), \\ a_4 &= (5, 6, 4, 5, 3, 3). \end{aligned}$$

Решение. Составим матрицу, строками которой являются данные векторы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 2 & 4 \\ 5 & 6 & 4 & 5 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

В силу теоремы о базисном миноре строки матрицы A, а следовательно, и заданные векторы, будут линейно зависимы тогда и только тогда, когда ранг матрицы A меньше числа ее строк, т.е. $\operatorname{rg} A < 4$.

Для вычисления ранга A воспользуемся методом Гаусса:

$$A \to \left\{ \begin{array}{l} \text{вычтем из 2-й строки} \\ \text{удвоенную 1-ю строку, из} \\ \text{3-й строки – 1-ю строку, а} \\ \text{из 4-й строки – 1-ю стро-} \\ \text{ку, умноженную на 5} \end{array} \right\} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & -5 & -13 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 6 & -6 & 0 & -12 & -32 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \left\{ \begin{array}{l} \text{вычтем из 3-й строки} \\ \text{удвоенную 2-ю строку, а} \\ \text{из 4-й – 2-ю строку, умно-} \\ \text{женную на 6} \end{array} \right\} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -4 & 1 & -5 & -13 \\ 0 & 0 & 9 & -3 & 9 & 23 \\ 0 & 0 & 18 & -6 & 18 & 46 \end{bmatrix}.$$

Ранг последней матрицы, очевидно, равен трем. Таким образом, векторы a_1, a_2, a_3, a_4 линейно зависимы. ■

ЗАДАЧИ

16.1. Известно, что в матрице A существует ненулевой минор r-го порядка, а все миноры $(r+1)$-го порядка равны нулю. Доказать, что $\operatorname{rg} A = r$.

16.2. Известно, что в матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ все миноры порядка $r < \min(m,n)$, кроме одного, равны нулю. Доказать, что $\operatorname{rg} A = r$.

16.3. Известно, что в матрице $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ не более, чем r, миноров порядка $r < \min(m,n)$ отличны от нуля. Доказать, что $\operatorname{rg} A = r$.

Вычислить ранг следующих матриц.

16.4. $\begin{bmatrix} 37 & 259 & 481 & 407 \\ 19 & 133 & 247 & 209 \\ 25 & 175 & 325 & 275 \end{bmatrix}$. **16.5.** $\begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 0 & 4 & -9 \end{bmatrix}$.

16.6. $\begin{bmatrix} 1187 & 401 & 388 & 166 \\ 153 & -998 & 557 & -23 \\ 731 & 233 & -1303 & 47 \end{bmatrix}$. **16.7.** $\begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 2 & 3 & 5 \\ 6 & -12 & 3 & -7 & -8 \\ -3 & 7 & 9 & 4 & 15 \end{bmatrix}$.

16.8. $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ -4 & 7 & 3 & 3 & -1 & 6 \\ 4 & 3 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$.

16.9. $\begin{bmatrix} 3 & 9 & 21 & 3 & -14 & -21 \\ -12 & -6 & -12 & -12 & 8 & 14 \\ 6 & -3 & -9 & 6 & 6 & 7 \\ 18 & 15 & 6 & 18 & -4 & -35 \end{bmatrix}$.

Вычислить ранг следующих матриц в зависимости от значения параметра λ.

16.10. $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$. **16.11.** $\begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$.

16.12. $\begin{bmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ -4 & 2 & \lambda \\ \lambda & -1 & -2 \\ 4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$. **16.13.** $\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1-\lambda & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2-\lambda & 2 \\ -2 & -2 & -2 & -2-\lambda \end{bmatrix}$.

16.14. $\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1-2\lambda \\ 1+\lambda & 1+3\lambda \end{bmatrix}$. **16.15.** $\begin{bmatrix} \lambda & 1 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -\lambda \end{bmatrix}$.

16.16. Доказать, что матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & a_k & a_k^2 & \ldots & a_k^{n-1} \end{bmatrix},$$

в которой $k \le n$, является матрицей полного ранга тогда и только тогда, когда числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ различны.

16.17. Доказать, что в любых k линейно независимых строках (столбцах) матрицы найдется ненулевой минор порядка k.

16.18. В матрице ранга r взяты r линейно независимых строк. Являются ли они базисными строками?

16.19. Минор M_{k+1} $(k+1)$-го порядка называется *окаймляющим* минор M_k k-го порядка, если M_k получается из M_{k+1} вычеркиванием одной строки и одного столбца. Доказать, что если в матрице A существует ненулевой минор M_r r-го порядка, а все окаймляющие его миноры равны нулю, то $\operatorname{rg} A = r$ (*метод окаймления миноров*).

16.20. Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ называется *матрицей с диагональным преобладанием*, если

$$|a_{jj}| > \sum_{\substack{i=1 \\ i\ne j}}^{m} |a_{ij}|, \quad j = \overline{1, m}.$$

Доказать, что:

а) матрица с диагональным преобладанием является матрицей полного ранга;

б) определитель квадратной матрицы с диагональным преобладанием отличен от нуля.

16.20.1. Верны ли утверждения предыдущей задачи, если в условии диагонального преобладания хотя бы одно неравенство сделать нестрогим?

16.21. Доказать, что приписывание к матрице одной строки (или одного столбца) либо не изменяет ее ранга, либо увеличивает его на единицу.

16.22. Доказать, что вычеркивание одной строки (или одного столбца) матрицы не изменяет ее ранга тогда и только тогда, когда вычеркнутая строка (столбец) линейно выражается через остальные строки (соответственно столбцы) матрицы.

16.23. Доказать, что если ранг матрицы A не изменяется от приписывания к ней каждого столбца матрицы B с тем же числом строк, то он не меняется и от приписывания к матрице A всех столбцов матрицы B.

16.24. Как может измениться ранг матрицы, если изменить значение одного ее элемента?

16.25. Как может измениться ранг матрицы, если ко всем элементам одной строки прибавить одно и то же число?

16.26. Как может измениться ранг матрицы при изменении элементов: а) одной строки; б) k строк?

16.27. Как может измениться ранг матрицы, если ко всем ее элементам прибавить одно и то же число?

16.28. Существует ли матрица, ранг которой не изменяется: а) при приписывании к ней любого столбца; б) при вычеркивании любой ее строки?

16.29. Известно, что в первых k столбцах матрицы размера $m \times n$ главный минор порядка k ненулевой, а все прочие миноры порядка k равны нулю. Доказать, что эта матрица имеет вид

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} & a_{k,k+1} & \ldots & a_{kn} \\ 0 & \ldots & 0 & a_{k+1,k+1} & \ldots & a_{k+1,n} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 0 & \ldots & 0 & a_{m,k+1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

16.30. Доказать, что в невырожденной квадратной матрице n-го порядка ранг любой квадратной подматрицы порядка $n-1$ не меньше, чем $n-2$.

16.31. Известно, что квадратная матрица A порядка n содержит нулевую квадратную подматрицу k-го порядка. Указать, какие значения может принимать ранг матрицы A.

16.32. Известно, что квадратная матрица A порядка n содержит квадратную подматрицу $(n-1)$-го порядка, ранг которой равен 1. Указать, какие значения может принимать ранг матрицы A.

16.33. Известно, что ранг квадратной матрицы A порядка n равен $n-1$. Доказать, что существует матрица B ранга 1 такая, что матрица $A + B$ невырождена.

16.34. Доказать, что ранг блочной матрицы вида
$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{bmatrix}$$
равен сумме рангов диагональных клеток A_{11} и A_{22}.

16.35. Матрица A имеет следующую блочную структуру:
$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ O & A_{22} \end{bmatrix}.$$
Доказать, что
$$\operatorname{rg} A \geq \operatorname{rg} A_{11} + \operatorname{rg} A_{22}.$$
Построить пример квазитреугольной матрицы A, для которой в этом соотношении выполняется строгое неравенство.

16.36. Доказать, что для любых матриц A и B одинакового размера
$$|\operatorname{rg} A - \operatorname{rg} B| \leq \operatorname{rg}(A+B) \leq \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B.$$
Для каждого значения $r = \overline{|r_1 - r_2|, r_1 + r_2}$ построить пример матриц A и B, для которых $\operatorname{rg} A = r_1$, $\operatorname{rg} B = r_2$ и $\operatorname{rg}(A+B) = r$.

16.37. Доказать, что любую матрицу ранга r можно представить в виде суммы r матриц ранга единица, но нельзя представить в виде суммы менее чем r таких матриц.

16.38. Доказать, что если ранг матрицы A равен r, то минор, стоящий на пересечении любых r линейно независимых строк и r линейно независимых столбцов этой матрицы, отличен от нуля. Верно ли это утверждение, если $\operatorname{rg} A > r$?

16.39. Доказать, что ранг симметрической матрицы равен наивысшему порядку отличных от нуля главных миноров этой матрицы.

16.40. Доказать, что ранг кососимметрической матрицы равен наивысшему порядку отличных от нуля главных миноров этой матрицы.

16.41. Доказать, что ранг кососимметрической матрицы – число четное.

16.42. Ранг матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ равен единице. Доказать, что найдутся столбец x и строка y^T такие, что выполнено равенство
$$A = xy^T.$$

16.42.1. Ранг матрицы $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ равен единице. Доказать, что для любой матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ справедливо соотношение
$$2\det A = \det(A+B) + \det(A-B).$$

16.43. Доказать, что если $\operatorname{rg} A = 1$, то существует число α

такое, что $A^2 = \alpha A$.

16.44. Доказать, что если $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^2 = 1$, то равенство $\operatorname{rg} A^k = 1$ выполнено для всех $k \in \mathbb{N}$.

16.44.1. Пусть матрицы $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ таковы, что оба произведения AB и BA являются единичными матрицами. Доказать, что $m = n$ и $B = A^{-1}$.

16.45. Доказать, что любую матрицу $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ ранга r можно представить в виде произведения: $A = BC$, где $B \in \mathbb{R}^{m\times r}$ – матрица полного ранга по числу столбцов, а $C \in \mathbb{R}^{r\times n}$ – матрица полного ранга по числу строк. Такое представление матрицы A называется ее *скелетным разложением.*

16.46. Известно, что x и y – столбцы одной высоты n. Доказать, что:

а) $\operatorname{rg}(I + yx^T) = n$, если $x^T y \neq -1$;

б) $\operatorname{rg}(I + yx^T) = n - 1$, если $x^T y = -1$.

16.47. Доказать, что если ранг квадратной матрицы A равен 1, то одна из матриц $I + A$ или $I - A$ невырождена.

16.48. Доказать, что если ранг квадратной матрицы A равен 1, то

$$\det(I + A) = 1 + \operatorname{tr} A.$$

16.48.1. Для матриц A и B определены оба произведения AB и BA. Верно ли, что ранги AB и BA совпадают?

16.49. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $B \in \mathbb{R}^{n\times l}$. Доказать, что выполнено *неравенство Сильвестра*

$$\operatorname{rg} AB \geq \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B - n.$$

16.50. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Доказать, что $A^T A$ невырождена тогда и только тогда, когда A – матрица полного ранга по числу столбцов.

16.51. Доказать, что для любой матрицы A выполнено соотношение

$$\operatorname{rg}(A^T A) = \operatorname{rg} A.$$

16.52. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $B \in \mathbb{R}^{n\times l}$. Доказать, что если $AB = O$, то

$$\operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B \leq n.$$

16.52.1. Пусть матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ такова, что для любой вырожденной квадратной матрицы B порядка n выполнено соотношение

$$\operatorname{rg}(AB) = \operatorname{rg} B.$$

Доказать, что A – невырожденная матрица.

16.52.2. Пусть ненулевая матрица $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ такова, что для любой квадратной матрицы B порядка n выполнено соотношение

$$\operatorname{rg}(AB) = \operatorname{rg}(BA).$$

Доказать, что A – невырожденная матрица.

16.53. Пусть A и B – квадратные матрицы одинакового нечетного порядка. Доказать, что если $AB = O$, то хотя бы одна из матриц $A + A^T$ или $B + B^T$ вырождена.

16.54. Доказать, что если квадратная матрица A порядка n удовлетворяет равенству $A^2 = I$, то

$$\operatorname{rg}(I + A) + \operatorname{rg}(I - A) = n.$$

16.55. Пусть A – квадратная матрица порядка $n > 1$ и $\widehat{A}$ – матрица, присоединенная к A. Как связаны ранги матриц A и $\widehat{A}$?

16.56.[1] Найти все нильпотентные матрицы третьего порядка с индексом нильпотентности, равным двум.

16.57.[2] Найти все периодические матрицы A третьего порядка, удовлетворяющие соотношению $A^2 = I$.

16.58. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $B \in \mathbb{R}^{k\times l}$, причем одна из матриц A или B неквадратная. Доказать, если кронекерово произведение $A \otimes B$ – квадратная матрица, то она вырождена.

16.59. Доказать, что:

а) для невырожденной матрицы A порядка n и произвольной матрицы B выполнено соотношение

$$\operatorname{rg}(A \otimes B) = n \operatorname{rg} B;$$

б) для произвольных матриц A и B выполнено соотношение

$$\operatorname{rg}(A \otimes B) = \operatorname{rg} A \operatorname{rg} B.$$

16.60. Пусть A и B – матрицы одного размера. Доказать, что:

а) $\operatorname{rg}\begin{bmatrix} A & B \\ 2A & -5B \end{bmatrix} = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B;$

б) $\operatorname{rg}\begin{bmatrix} A + 2B & A + 4B \\ 3A - B & 3A - 2B \end{bmatrix} = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B.$

---

[1] См. также задачи 2.35, 8.1.

[2] См. также задачи 2.41, 9.61.

16.61. Пусть A и B – квадратные матрицы одного порядка. Доказать, что:

а) $\operatorname{rg}\begin{bmatrix} A & AB \\ B & B+B^2 \end{bmatrix} = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B$; б) $\operatorname{rg}\begin{bmatrix} A & A^2 \\ A^3 & A^4 \end{bmatrix} = \operatorname{rg} A$;

в) $\operatorname{rg}\begin{bmatrix} I & I \\ A^2 & A \end{bmatrix} = \operatorname{rg} A + \operatorname{rg}(I-A)$.

16.62. Пусть A – невырожденная матрица n-го порядка. Доказать, что ранг блочной матрицы

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

равен n тогда и только тогда, когда $D = CA^{-1}B$.

16.63. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $B \in \mathbb{R}^{n\times k}$. Доказать равенство рангов блочных матриц:

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} B & I_n \\ O & A \end{bmatrix} = \operatorname{rg}\begin{bmatrix} AB & O \\ O & I_n \end{bmatrix}.$$

Вывести из этого соотношения неравенство Сильвестра задачи 16.49.

16.64. Пусть для матриц A, B и C определено произведение BAC. Доказать равенство рангов блочных матриц:

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} AC & A \\ O & BA \end{bmatrix} = \operatorname{rg}\begin{bmatrix} A & O \\ O & BAC \end{bmatrix}.$$

Вывести из этого соотношения *неравенство Фробениуса*

$$\operatorname{rg} BA + \operatorname{rg} AC \le \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} BAC.$$

16.65. Квадратные матрицы A и B порядка n таковы, что $\operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B \le n$. Доказать, что существует невырожденная матрица C такая, что $ACB = O$.

§17. Базис и координаты

Базисом линейного пространства V называется упорядоченная линейно независимая система векторов из V, через которую линейно выражается любой вектор пространства.

Теорема 17.1. *Система векторов $e_1, \dots, e_n$ линейного пространства является его базисом тогда и только тогда, когда она образует максимальную линейно независимую систему векторов этого пространства.*

Из этой теоремы следует, что все базисы одного линейного пространства V состоят из одинакового числа векторов, равного максимальному числу линейно независимых векторов в V. Число векторов базиса называется *размерностью* линейного пространства. Размерность нулевого пространства по определению считается равной нулю. Обозначение: $\dim V$.

Линейное пространство размерности n, где n – целое неотрицательное число, называется *n-мерным пространством.* Любое n-мерное пространство относится к *конечномерным линейным пространствам.* Линейное пространство называется *бесконечномерным,* если для любого $k \in \mathbb{N}$ в нем найдется линейно независимая система из k векторов.

Из определения размерности и теоремы 17.1 следует, что:

1) *в n-мерном пространстве любые n линейно независимых векторов образуют базис;*

2) *в n-мерном пространстве любая система из s векторов, где $s > n$, линейно зависима.*

Теорема 17.2. *Разложение вектора по базису единственно.*

Коэффициенты разложения вектора по базису называются *координатами вектора в этом базисе.*

Обозначение. Если $e_1, \ldots, e_n$ – базис пространства и

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n, \tag{17.1}$$

то будем обозначать через x_e вектор-столбец из координат вектора x в этом базисе:

$$x_e = (\ x_1 \ \ x_2 \ \ \ldots \ \ x_n\ )^T.$$

Столбец x_e называют *координатным столбцом* вектора x в базисе $e_1, \ldots,$ e_n. Положим

$$e = (e_1, e_2, \ldots, e_n).$$

Под символом e будем понимать как обозначение базиса $e_1, \ldots, e_n$, так и матрицу-строку $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. В этих обозначениях разложение (17.1) может быть записано как произведение строки e на столбец x_e:

$$x = ex_e.$$

Теорема 17.3. *При сложении векторов их координаты в одном базисе складываются, а при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.*

Пусть $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ и $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ – два базиса n-мерного пространства V. Векторы второго базиса, как векторы пространства V, разлагаются по базису e; пусть

$$\begin{aligned} f_1 &= c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \ldots + c_{n1}e_n, \\ f_2 &= c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + \ldots + c_{n2}e_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n &= c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \ldots + c_{nn}e_n. \end{aligned} \tag{17.2}$$

Коэффициенты c_{ij} этих разложений образуют матрицу $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, которая называется *матрицей перехода от базиса e к базису f.* Обозначение: C или $C_{e\to f}$.

Соотношения (17.2) могут быть записаны компактно в виде

$$f = eC.$$

Теорема 17.4. *Матрица перехода к другому базису не вырождена.*

Теорема 17.5. *Если C – матрица перехода от базиса e к базису f, то C^{-1} – матрица перехода от базиса f к базису e.*

Теорема 17.6. *Координаты вектора x в базисах e и f связаны между собой соотношением*

$$x_e = Cx_f,$$

где C – матрица перехода от базиса e к базису f.

Рассмотрим примеры наиболее часто встречающихся в задачнике линейных пространств.

Пример 17.1. Геометрические пространства V_1, V_2, V_3.

На прямой V_1 существует ненулевой вектор, а любые два вектора коллинеарны, т.е. на прямой V_1 существует линейно независимая система из одного вектора (теорема 15.1), а любые два (значит, и более) векторов линейно зависимы (теоремы 15.7 и 15.3). Таким образом, *любой ненулевой вектор* прямой V_1 образует максимальную линейно независимую систему векторов в V_1 и поэтому (теорема 17.1) *является базисом* V_1, так что $\dim V_1 = 1$. Если $\mathbf{e}_1$ – базис V_1 и $\mathbf{a} \in V_1$, то $\mathbf{a} = x\,\mathbf{e}_1$, где, как следует из определения умножения вектора на число,

$$x = \begin{cases} |\mathbf{a}|/|\mathbf{e}_1|, & \mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{e}_1; \\ -|\mathbf{a}|/|\mathbf{e}_1|, & \mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{e}_1. \end{cases}$$

Если на прямой V_1 введено направление, совпадающее с направлением $\mathbf{e}_1$, то

$$x = \frac{(\mathbf{a})}{|\mathbf{e}_1|}. \tag{17.3}$$

На плоскости V_2 существует пара неколлинеарных векторов, а любые три вектора компланарны. Из теорем 15.7, 15.8, 15.3 и 17.1 следует, что *любая пара неколлинеарных векторов* плоскости V_2 *образует базис* V_2, так что $\dim V_2 = 2$. Если $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ – базис V_2 и $a \in V_2$, то $\mathbf{a} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2$. Координаты x, y вектора $\mathbf{a}$ в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ вычисляются следующим образом.

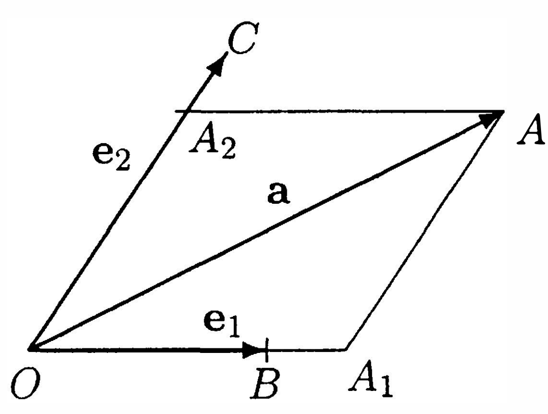


Рис. 1

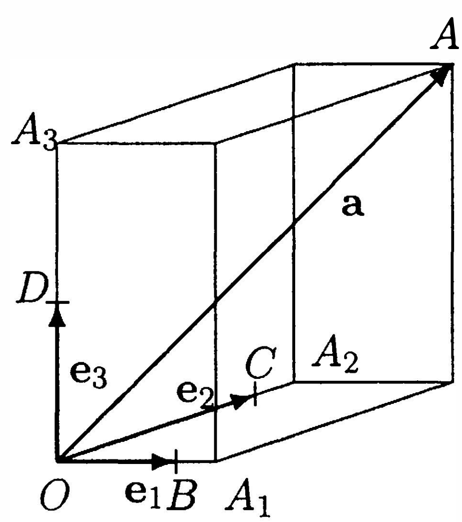


Рис. 2

Отложим векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{a}$ от одной точки O плоскости (рис. 1). Пусть $\mathbf{e}_1 = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{e}_2 = \overrightarrow{OC}$, $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, точки A_1 и A_2 – проекции точки A на прямые OB и OC параллельно прямым OC и OB соответственно. Тогда $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2$. Если на прямых OB и OC ввести направления, совпадающие с направлением $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ соответственно, то согласно (17.3)

$$x = \frac{(\overrightarrow{OA_1})}{|\mathbf{e}_1|}, \qquad y = \frac{(\overrightarrow{OA_2})}{|\mathbf{e}_2|}. \tag{17.4}$$

Аналогично (рис. 2) в пространстве V_3 *любая тройка некомпланарных векторов образует базис* V_3 (теоремы 15.8, 15.9, 15.3, 17.1), так что

$\dim V_3 = 3$. Если $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ – базис V_3 и $\mathbf{a} \in V_3$, то $\mathbf{a} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + x\mathbf{e}_3$ и

$$x = \frac{(\overrightarrow{OA_1})}{|\mathbf{e}_1|}, \qquad y = \frac{(\overrightarrow{OA_2})}{|\mathbf{e}_2|}, \qquad z = \frac{(\overrightarrow{OA_3})}{|\mathbf{e}_3|}, \tag{17.5}$$

где A_1, A_2, A_3 – проекции точки A на прямые OB, OC и OD параллельно плоскостям OCD, OBD и OBC соответственно.

Пример 17.2. Арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ единичные векторы

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0), \\ e_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n &= (0, 0, 0, \ldots, 1) \end{aligned}$$

линейно независимы (§15, пример 15.1), и если $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, то

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_n e_n. \tag{17.6}$$

Таким образом, векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ образую базис $\mathbb{R}^n$ и $\dim \mathbb{R}^n = n$. Этот базис называется *естественным базисом пространства* $\mathbb{R}^n$. Из (17.6) следует, что координатами вектора в естественном базисе служат компоненты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ этого вектора.

Пример 17.3. Пространство многочленов M_n.

Многочлены $1, t, t^2, \ldots, t^n$ образуют базис M_n, так как они линейно независимы (§15, пример 15.2) и если $p(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n \in M_n$, то, очевидно, $p(t)$ является линейной комбинацией этих многочленов. Этот базис называется *естественным базисом пространства* M_n. Координатами многочлена $p(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$ служат его коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Итак, $\dim M_n = n + 1$.

Пример 17.4. Пространство M_∞ многочленов всех степеней бесконечномерно, так как для любого $k \in \mathbb{N}$ можно указать k линейно независимых векторов: $1, t, t^2, \ldots, t^{k-1}$.

Пример 17.5. Пространство матриц $\mathbb{R}^{m\times n}$.

Матричные единицы E_{11}, E_{12}, ..., E_{1n}, E_{21}, E_{22}, ..., E_{2n}, ..., E_{mn} (в матрице E_{ij} все элементы нулевые, кроме одного элемента в позиции (i, j), равного единице) образуют базис $\mathbb{R}^{m\times n}$, так как они линейно независимы (§15, пример 15.4) и если $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, то $A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}$. Этот базис называется *естественным базисом пространства* $\mathbb{R}^{m\times n}$. Координатами матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ в естественном базисе служат ее элементы a_{ij}, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$. Итак, $\dim \mathbb{R}^{m\times n} = mn$.

Пример 17.6. Пусть S – линейное пространство всех бесконечных последовательностей действительных чисел $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ (см. задачу 14.6). Найти размерность S.

Решение. Покажем, что векторы

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0, 0, \ldots), \\ a_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0, 0, \ldots), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n &= (0, 0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots) \end{aligned}$$

линейно независимы. Пусть $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k = \theta$, тогда

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, 0, \ldots) = (0, 0, \ldots, 0, 0, \ldots),$$

т.е. $\alpha_k = 0$, $k = \overline{1, n}$. Это означает, что только тривиальная линейная комбинация этих векторов равна нулевому вектору. Следовательно, векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ линейно независимы.

Таким образом, для любого $n \in \mathbb{N}$ можно указать n линейно независимых векторов пространства S; следовательно, S – бесконечномерное пространство. ∎

Пример 17.7. Пусть F – линейное пространство всех бесконечных действительных последовательностей вида $(\alpha, \beta, \alpha, \beta, \ldots)$. Операции над последовательностями в F введены так же, как и в пространстве S предыдущего примера. Найти размерность и какой-нибудь базис пространства F.

Решение. Покажем, что векторы

$$e_1 = (1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots),$$
$$e_2 = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$$

образуют базис пространства F.

В самом деле, эти векторы линейно независимы, так как равенство $\alpha e_1 + \beta e_2 = \theta$ означает, что

$$(\alpha, \beta, \alpha, \beta, \ldots) = (0, 0, 0, 0, \ldots),$$

т.е. что $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

С другой стороны, любой вектор $a = (\alpha, \beta, \alpha, \beta, \ldots) \in F$ является линейной комбинацией векторов e_1, e_2: $a = \alpha e_1 + \beta e_2$.

Таким образом, $\dim F = 2$ и векторы e_1, e_2 образуют базис. ∎

Пример 17.8. Доказать, что векторы

$$a_1 = (1, 2, -1, -2),$$
$$a_2 = (2, 3, 0, -1),$$
$$a_3 = (1, 2, 1, 4),$$
$$a_4 = (1, 3, -1, 0)$$

образуют базис пространства R^4.

Решение. Так как в n-мерном пространстве любые n линейно независимых векторов образуют базис, а $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, то достаточно доказать линейную независимость векторов a_1, a_2, a_3, a_4 или, что то же самое, доказать, что ранг матрицы, составленной из этих векторов как из строк, равен количеству строк (теорема 16.3). Имеем

$$A \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

т.е. $\operatorname{rg} A = 4$. ∎

Пример 17.9. Найти координаты многочлена $p(t) = 1 + t + t^2 + t^3 \in M_3$ в базисе 1, $t - 1$, $(t-1)^2$, $(t-1)^3$.

Решение. Очевидно, матрица перехода от базиса $e = (1, t, t^2, t^3)$ к базису $f = (1, t-1, (t-1)^2, (t-1)^3)$ имеет вид

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Положим $x = p(t)$. Очевидно, $x_e = (1,1,1,1)^T$. Согласно теореме 17.6 $x_e = Cx_f$ или $x_f = C^{-1}x_e$. Последнее произведение может быть найдено методом Гаусса–Жордана (§9):

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Таким образом, многочлен $p(t)$ в базисе $f = (1, t-1, (t-1)^2, (t-1)^3)$ имеет координаты $x_f = (4,6,4,1)^T$. ∎

ЗАДАЧИ

Показать, что следующие системы векторов являются базисами пространства $\mathbb{R}^n$.

17.1. $x_1 = (1,2,3,\ldots,n)$,
$x_2 = (0,2,3,\ldots,n)$,
$x_3 = (0,0,3,\ldots,n)$,
. . . .
$x_n = (0,0,0,\ldots,n)$.

17.2. $x_1 = (1,1,\ldots,1,1,1)$,
$x_2 = (1,1,\ldots,1,1,0)$,
$x_3 = (1,1,\ldots,1,0,0)$,
. . . .
$x_n = (1,0,\ldots,0,0,0)$.

17.3. $x_1 = (1,1,1,1,\ldots,1)$,
$x_2 = (0,1,0,0,\ldots,0)$,
$x_3 = (0,1,1,0,\ldots,0)$,
$x_4 = (0,1,1,1,\ldots,0)$,
. . . .
$x_n = (0,1,1,1,\ldots,1)$.

Для каждого из следующих линейных пространств определить, является ли это пространство конечномерным; в случае положительного ответа найти размерность пространства.

17.4. Линейное пространство $\mathbb{R}_+$ из задачи 14.3.

17.5. Линейное пространство последовательностей действительных чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, элементы которых удовлетворяют соотношениям $\alpha_k = \alpha_{k-1} + \alpha_{k-2}$, $k = 3, 4, \ldots$.

17.6. Линейное пространство $\mathbb{R}$ из задачи 14.2, п."в".

17.7. Линейное пространство последовательностей действительных чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, все элементы которых, начиная с некоторого номера, равны нулю.

17.8. Доказать, что при любом $n \in \mathbb{N}$ данное множество образует конечномерное линейное пространство; найти его размерность и указать какой-либо базис этого пространства.

1. Множество четных многочленов степени не выше n.
2. Множество нечетных многочленов степени не выше n.

17.9. Доказать, что данное множество образует бесконечномерное линейное пространство.

1. Множество функций, принимающих конечное число значений на $[a, b]$.
2. Множество всех функций, непрерывных на $[a, b]$.

Выяснить, какие из следующих систем векторов являются базисами подходящего пространства $\mathbb{R}^n$.

17.10. $x_1 = (1, 1, 1, 1)$, $x_2 = (2, 3, 0, -1)$, $x_3 = (1, 2, 1, 3)$, $x_4 = (1, 3, -1, 0)$.

17.11. $x_1 = (1, 2, -1, -2)$, $x_2 = (2, 3, 0, -1)$, $x_3 = (1, 2, 1, 4)$, $x_4 = (1, 3, -1, 0)$.

17.12. $x_1 = (1, 2, -1)$, $x_2 = (2, 3, 0)$, $x_3 = (1, 3, -1)$.

17.13. $x_1 = (1, 2, -1, 1)$, $x_2 = (2, 3, 0, 1)$, $x_3 = (1, 3, 1, 0)$.

17.14. Доказать, что в пространстве M_n многочленов степени не выше n базисом является всякая система ненулевых многочленов, содержащих по одному многочлену каждой степени k: $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

17.15. Доказать, что:

а) любой ненулевой вектор пространства можно включить в некоторый базис этого пространства;

б) любую линейно независимую систему векторов можно дополнить до базиса пространства.

17.16. Пусть в пространстве V выбран некоторый базис $e_1, \ldots, e_n$. Тем самым, каждому вектору $x \in V$ поставлена в соответствие строка его координат в этом базисе:

$$x \mapsto x_e = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

Доказать, что:

а) линейная зависимость (линейная независимость) системы векторов $x, y, \ldots, z$ равносильна линейной зависимости (соответственно линейной независимости) системы строк $x_e, y_e, \ldots, z_e$ рассматриваемых как элементы соответствующего арифметического пространства $\mathbb{R}^n$;

б) если вектор a линейно выражается через систему $x, y, \ldots$, z, т.е. $a = \lambda x + \mu y + \ldots + \nu z$, то это же верно и для строк a_e, x_e, $y_e, \ldots$, z_e, причем $a_e = \lambda x_e + \mu y_e + \ldots + \nu z_e$.

17.17. В пространстве $\mathbb{R}^4$ найти два различных базиса, имеющих общие векторы $e_1 = (1,1,0,0)$ и $e_2 = (0,0,1,1)$.

17.18. Систему многочленов $t^5 + t^4$, $t^5 - 3t^3$, $t^5 + 2t^2$, $t^5 - t$ дополнить до базиса пространства M_5.

17.19. Дополнить систему матриц $\begin{bmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 6 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 & 8 & 7 \\ 9 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ до базиса пространства $\mathbb{R}^{2\times 3}$.

17.20. Доказать, что система матриц

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, E_4 = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

образует базис пространства $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Построить другой базис этого пространства так, чтобы ни одна из его матриц не была линейной комбинацией каких-либо двух матриц E_1, E_2, E_3, E_4.

17.21. Даны три вектора $\mathbf{a} = \{1, 2\}$, $\mathbf{b} = \{-5, -1\}$, $\mathbf{c} = \{-1, 3\}$. Найти координаты векторов $2\,\mathbf{a} + 3\,\mathbf{b} - \mathbf{c}$ и $16\,\mathbf{a} + 5\,\mathbf{b} - 9\,\mathbf{c}$.

17.22. Показать, что векторы $\mathbf{a} = \{-5, -1\}$, $\mathbf{b} = \{-1, 3\}$ образуют базис пространства V_2. Найти координаты векторов $\mathbf{c} = \{-6, 2\}$ и $\mathbf{d} = \{2, -6\}$ в этом базисе.

17.23. Даны четыре вектора $\mathbf{a} = \{3, 0, -2\}$, $\mathbf{b} = \{1, 2, -5\}$, $\mathbf{c} = \{-1, 1, 1\}$, $\mathbf{d} = \{8, 4, 1\}$. Найти координаты векторов $-5\,\mathbf{a} + \mathbf{b} - 6\,\mathbf{c} + \mathbf{d}$ и $3\,\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c} - \mathbf{d}$.

17.24. Показать, что векторы $\mathbf{a} = \{4, 1, -1\}$, $\mathbf{b} = \{1, 2, -5\}$, $\mathbf{c} = \{-1, 1, 1\}$ образуют базис пространства V_3. Найти координаты векторов $\mathbf{x} = \{4, 4, -5\}$, $\mathbf{y} = \{2, 4, -10\}$ и $\mathbf{z} = \{0, 3, -4\}$ в этом базисе.

17.25. При каких $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ векторы $\mathbf{a} = \{1, \alpha, \alpha^2\}$, $\mathbf{b} = \{1, \beta, \beta^2\}$, $\mathbf{c} = \{1, \gamma, \gamma^2\}$ образуют базис пространства V_3?

17.26. Известно, что векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ некомпланарны. Выяснить, компланарны ли векторы $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$, и если да, то указать линейное соотношение их связывающее:

а) $\mathbf{x} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$, $\mathbf{y} = 2\mathbf{b} - \mathbf{c} - \mathbf{a}$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{c} - \mathbf{a} - \mathbf{b}$;

б) $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{y} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{z} = -\mathbf{a} + \mathbf{c}$;

в) $\mathbf{x} = \mathbf{c}$, $\mathbf{y} = \mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}$, $\mathbf{z} = \mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$.

17.27. В параллелограмме $ABCD$ точка K – середина отрезка BC и точка O – точка пересечения диагоналей. Принимая за базисные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$, найти координаты векторов $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{KD}$ в этом базисе.

17.28. В треугольнике ABC точка M – середина отрезка AB и точка O – точка пересечения медиан. Принимая за базисные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, найти координаты векторов $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{MO}$ в этом базисе.

17.29. В трапеции $ABCD$ длины оснований AD и BC относятся как $3 : 2$. Принимая за базисные векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$, найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$ в этом базисе.

17.30. В тетраэдре $OABC$ точки K, L, M, N, P, Q – середины ребер OA, OB, OC, AB, AC, BC соответственно, S – точка пересечения медиан треугольника ABC. Принимая за базисные векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$, найти в этом базисе координаты:

а) векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$;

б) векторов $\overrightarrow{KL}$, $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{CN}$, $\overrightarrow{MP}$, $\overrightarrow{KQ}$;

в) векторов $\overrightarrow{OS}$, $\overrightarrow{KS}$.

17.31. Даны три точки O, A, B, не лежащие на одной прямой. Принимая за базисные векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, найти:

а) координаты вектора $\overrightarrow{OM}$, если точка M лежит на отрезке AB и $AM : BM = m : n$;

б) координаты вектора $\overrightarrow{ON}$, если точка N лежит на прямой AB вне отрезка AB и $AN : BN = m : n$.

17.32. В трапеции $ABCD$ отношение длин оснований AD и BC равно 4. Принимая за базисные векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$, найти координаты векторов $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AS}$, $\overrightarrow{SM}$, где M – точка пересечения диагоналей трапеции, а S – точка пересечения ее боковых сторон.

17.33. Доказать, что матрицы

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \; E_2 = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \; E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \; E_4 = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

образуют базис пространства $\mathbb{R}^{2\times 2}$, и найти координаты матрицы $A = \begin{bmatrix} 5 & 14 \\ 6 & 13 \end{bmatrix}$ в этом базисе.

17.34. Доказать, что матрицы

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix},$$
$$E_4 = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, E_5 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}, E_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

образуют базис пространства симметрических матриц порядка 3, и найти координаты матрицы $A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 1 \\ 6 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & -3 \end{bmatrix}$ в этом базисе.

17.35. Доказать, что многочлены $1, t-\alpha, (t-\alpha)^2, \ldots, (t-\alpha)^n$ образуют базис пространства M_n, и найти координаты произвольного многочлена $p(t) \in M_n$ в этом базисе.

17.36. Доказать, что многочлены $2t+t^5$, t^3-t^5, $t+t^3$ образуют базис с пространстве нечетных многочленов степени не выше 5, и найти координаты многочлена $5t - t^3 + 2t^5$ в этом базисе.

17.37. Доказать, что каждая из двух систем матриц

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

и

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

является базисом пространства $\mathbb{R}^{3\times 2}$, и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму. Найти координаты матрицы размера 3×2 в первом базисе, если известны ее координаты $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_6)$ во втором базисе.

17.38. Доказать, что каждая из двух систем матриц

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

и

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

является базисом в пространстве кососимметрических матриц порядка 3, и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму. Найти координаты кососимметрической матрицы порядка 3 в первом базисе, если известны ее координаты (ξ_1, ξ_2, ξ_3) во втором базисе.

17.39. Доказать, что каждая из двух систем функций

$$t - t^2,\ t^3,\ 1 + 5t + t^3,\ (1+t)^3$$

и

$$(1+t)^3,\ (1-t)^3,\ t - t^2 + t^3,\ 1 + t + t^2 + t^3$$

является базисом пространства M_3. Найти координаты многочлена степени не выше 3 в первом базисе, если известны его координаты $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ во втором базисе.

17.40. Доказать, что каждая из двух систем функций

$$(1+t^2)^2,\ (1-t^2)^2,\ 1$$

и

$$1 + t^2 + t^4,\ 1 - t^2 + t^4,\ t^4$$

является базисом в пространстве четных многочленов степени не выше 4, и найти матрицу перехода от первого базиса ко второму. Найти координаты четного многочлена степени не выше 4 в первом базисе, если известны координаты (ξ_1, ξ_2, ξ_3) во втором базисе.

17.41. Как изменится матрица перехода от одного базиса к другому, если:

а) поменять местами i-й и j-й векторы первого базиса;

б) поменять местами i-й и j-й векторы второго базиса;

в) записать векторы обоих базисов в обратном порядке?

17.42. Матрица S является матрицей перехода от первого базиса $e_1, \ldots, e_n$ ко второму базису $f_1, \ldots, f_n$ n-мерного пространства V, а матрица Q – матрицей перехода от третьего базиса $g_1, \ldots, g_n$ ко второму базису $f_1, \ldots, f_n$. Найти матрицу перехода:

а) от второго базиса к первому;

б) от первого базиса к третьему.

17.43. Как связаны между собой базисы $f_1, \ldots, f_n$ и $e_1, \ldots, e_n$ пространства V, если матрица перехода от базиса e к f:

а) диагональная; в) верхняя треугольная;

б) скалярная; г) нижняя треугольная?

17.44. Доказать, что система векторов является базисом линейного пространства тогда и только тогда, когда она образует минимальную систему, порождающую все пространство.

17.45. В n-мерном линейном пространстве даны векторы $e_1, \ldots, e_m$, причем $m \geq n+2$. Доказать, что существуют такие числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, не все равные нулю, что $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i = \theta$ и $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 0$.

17.46. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_n$ – два базиса линейного пространства V и $1 \leq k < n$. Доказать, что из векторов второго базиса можно выбрать такие k векторов, что после обмена их с векторами $e_1, \ldots, e_k$ из первого базиса получатся снова два базиса пространства V.

17.47. Векторы $x_1, \ldots, x_k \in V$ линейно независимы, а базис $e_1, \ldots, e_n$ пространства V таков, что он остается базисом после замены вектора e_i на вектор x_i при любом $i = \overline{1,k}$. Верно ли, что векторы $x_1, \ldots, x_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ тоже образуют базис пространства V?

17.48. Известно, что матрицы A_1, $A_2, \ldots$, A_{mn} образуют базис пространства $\mathbb{R}^{m \times n}$, а матрицы B_1, $B_2, \ldots$, B_{sl} – базис пространства $\mathbb{R}^{s \times l}$. Доказать, что их всевозможные кронекеровы произведения $A_i \otimes B_j$, $i = \overline{1,mn}$, $j = \overline{1,sl}$, образуют базис пространства $\mathbb{R}^{mn \times sl}$.

17.49. Матрицы A_1, $A_2, \ldots$, A_{mn} образуют базис пространства $\mathbb{R}^{m \times n}$. Доказать, что матрицы BA_1, $BA_2, \ldots$, BA_{mn} также образуют базис этого пространства тогда и только тогда, когда квадратная матрица B порядка m невырождена.

§18. Линейное подпространство и линейное многообразие

Непустое подмножество L пространства V называется *линейным подпространством пространства V*, если оно само является линейным пространством относительно законов композиции, действующих в V.

Теорема 18.1. *Непустое подмножество L пространства V является линейным подпространством этого пространства тогда и только тогда, когда имеют место импликации:*

$$\begin{array}{lcl} a, b \in L & \Rightarrow & a + b \in L\,; \\ a \in L, \alpha \in \mathbb{R} & \Rightarrow & \alpha a \in L\,. \end{array}$$

Пусть V – линейное пространство, L – некоторое его подпространство, x_0 – некоторый вектор пространства V. Множество H всевозможных векторов вида $x_0 + x$, где $x \in L$, называется *линейным многообразием* (или *линейным аффинным многообразием*) *пространства V, полученным сдвигом подпространства L на вектор x_0*. Вектор x_0 называется *вектором сдвига*, а подпространство L – *направляющим подпространством* линейного многообразия H.

Обозначение: $H = x_0 + L$. Итак, $x_0 + L = \{x_0 + x | x \in L\}$.

Из определения вытекают следующие факты.

1°. *Вектор сдвига x_0 принадлежит линейному многообразию.*

2°. *Разность двух векторов линейного многообразия принадлежит направляющему подпространству.*

Теорема 18.2. *Два линейных многообразия $H_1 = x_1 + L_1$ и $H_2 = x_2 + L_2$ совпадают тогда и только тогда, когда $L_1 = L_2 = L$ и $x_1 - x_2 \in L$.*

Следствие 1. *Вектором сдвига может быть любой вектор линейного многообразия.*

Следствие 2. *Линейное многообразие может быть получено сдвигом единственного направляющего подпространства.*

Размерностью линейного многообразия называется размерность его направляющего подпространства. Линейное многообразие размерности единица называется *прямой в линейном пространстве*, размерности $(n-1)$, где $n = \dim V$, – *гиперплоскостью*, а размерности k, $1 < k < n-1$, – *k-мерной плоскостью.*

ЗАДАЧИ

18.1. Образуют ли линейное подпространство арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ все векторы $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, компоненты которых:

а) являются целыми числами;

б) являются четными числами;

в) являются нечетными числами;

г) удовлетворяют условию $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$;

д) удовлетворяют условию $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$?

18.2. Образуют ли линейное подпространство пространства V_2 все векторы плоскости,

а) каждый из которых лежит на одной из осей координат Ox и Oy;

б) концы которых лежат на данной прямой (начало любого вектора, если не оговорено противное, предполагается совпадающим с началом координат);

в) начала и концы которых лежат на данной прямой;

г) концы которых лежат в первой четверти системы координат;

д) концы которых лежат в первой или третьей четверти системы координат?

18.3. Указать все линейные подпространства геометрического пространства V_3.

18.4. Образуют ли линейное подпространство пространства матриц $\mathbb{R}^{n\times n}$:

а) матрицы A, у которых $\operatorname{tr} A = 0$;

б) все симметрические матрицы порядка n;

в) все кососимметрические матрицы порядка n;

г) все невырожденные матрицы порядка n;

д) все треугольные матрицы одинакового вида;

е) все верхние ступенчатые матрицы;

ж) все матрицы с нулевой главной диагональю?

18.5. Образуют ли линейное подпространство пространства многочленов M_n все многочлены $p(t) \in M_n$, для которых

а) $p(1) = 0$;

б) $p(-t) = p(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$; в) $p(-t) = -p(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$;

г) $p(1) = 1$; д) $2p(0) = 3p(1)$;

е) $p(\alpha t) = \alpha p(t)$ для любого $t \in \mathbb{R}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$ – некоторое фиксированное число;

ж) $p(t) \geq 0$ при $t \in [0; 1]$;

з) $t = 1$ является простым корнем?

18.6. Образуют ли линейное подпространство пространства V

а) все линейные комбинации заданных векторов $a_1, \ldots, a_k \in V$;

б) все те линейные комбинации заданных векторов $a_1, \ldots, a_k \in V$, коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ которых удовлетворяют условию $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 0$?

18.7. Что представляет собой линейное многообразие размерности нуль? размерности n в n-мерном линейном пространстве?

18.7.1. Доказать, что множество H векторов линейного пространства образует линейное многообразие тогда и только тогда, когда оно вместе с каждой парой векторов x_1, x_2 содержит все векторы вида $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, где $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

18.7.2. Образуют ли линейное многообразие пространства V все те линейные комбинации заданных векторов $a_1, \ldots, a_k \in V$, коэффициенты $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ которых удовлетворяют условию:

а) $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 1$;

б) $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 2$;

в) $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + k\alpha_k = 1$?

18.7.3. Образуют ли линейное многообразие арифметического пространства $\mathbb{R}^n$ все векторы $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, компоненты которых

а) являются целыми числами;

б) являются неотрицательными вещественными числами;
в) удовлетворяют условию $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$;
г) удовлетворяют условию $x_1 x_2 \ldots x_n = 0$;
д) удовлетворяют условию $x_1 x_2 \ldots x_n \geq 0$;
е) удовлетворяют условию $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$;
ж) удовлетворяют условию $x_1 + 1 = x_2 + 2 = \ldots = x_n + n$?
Если образуют, то является ли это многообразие линейным подпространством?

18.7.4. Образуют ли линейное многообразие пространства V_3 все векторы:

а) концы которых лежат на данной плоскости, при условии, что векторы отложены от начала координат;

б) концы которых лежат на данной плоскости, при условии, что векторы отложены от некоторой фиксированной точки пространства;

в) концы которых лежат на прямой l_1, при условии, что векторы отложены от точек прямой l_2, параллельной l_1;

г) концы которых лежат на прямой l_1, при условии, что векторы отложены от точек прямой l_2, пересекающей l_1;

д) концы которых лежат на прямой l_1, при условии, что векторы отложены от точек прямой l_2, скрещивающейся с l_1;

е) концы которых лежат на прямой l при условии, что векторы отложены от точек плоскости π, параллельной l;

ж) концы которых лежат на прямой l при условии, что векторы отложены от точек плоскости π, пересекающей l?
Если образуют, то какова размерность этого многообразия?

18.7.5. Образуют ли линейное многообразие пространства матриц $\mathbb{R}^{n\times n}$ все матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$:
а) у которых след равен единице;
б) для которых $A + A^T = I$;
в) для которых $BA = O$, где $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – заданная матрица;
г) для которых $BA = 2B$, где $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – заданная матрица;
д) для которых $A^T = BA$, где $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ – заданная матрица;
е) у которых ранг равен единице;
ж) которые обратимы;
з) для которых $A^2 = A$;
и) у которых ранг не превосходит двух?

18.7.6. Образуют ли линейное многообразие в пространстве многочленов M_n все многочлены $p(t) \in M_n$:

а) для которых $p(1) = 1$;
б) для которых $p'(0) = p(0) + 1$;
в) для которых $p(0)p(1) = 0$;
г) у которых степень равна n;
д) для которых число $t = 1$ является корнем;
е) для которых число $t = 1$ является кратным корнем;
ж) остаток деления которых на $t - 1$ равен 1;
з) остаток от деления которых на $t^2 - 1$ равен t?

18.8. Доказать, что линейное многообразие $P = x_0 + L$ тогда и только тогда является подпространством, когда $x_0 \in L$.

18.9. Доказать, что для того, чтобы линейное многообразие $P = x_0 + L$ было подпространством, достаточно, чтобы сумма каких-либо двух векторов x_1 и x_2 из P принадлежала L.

18.10. Доказать, что в линейном многообразии размерности k, не являющимся подпространством, можно найти линейно независимую систему, состоящую из $k + 1$ векторов.

18.11. Доказать, что в линейном многообразии размерности k всякая система, состоящая из $k+2$ векторов, линейно зависима.

18.12. Доказать, что для любых $k + 1$ линейно независимых векторов существует и притом единственное линейное многообразие размерности k, содержащее эти векторы.

18.13. Доказать, что линейное многообразие размерности k, содержащее линейно независимые векторы $x_0, x_1, \ldots, x_k$, может быть описано как множество всех линейных комбинаций $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k$, коэффициенты которой удовлетворяют условию $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 1$.

Глава V. **Системы линейных алгебраических уравнений**

Системой m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными называется совокупность соотношений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где a_{ij}, b_i $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$ – заданные вещественные числа, а $x_1, \ldots, x_n$ – неизвестные величины. Числа a_{ij} называются *коэффициентами системы*, а b_i – *свободными членами*.

Упорядоченная совокупность чисел $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ называется *решением системы*, если при подстановке этих чисел в систему вместо неизвестных $x_1, \ldots, x_n$ соответственно каждое уравнение обращается в тождество.

Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если не имеет ни одного решения. Система уравнений называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если имеет более одного решения.

Исследовать и решить систему – это значит:

• установить, совместна она или несовместна;

• если она совместна, установить, является она определенной или неопределенной, при этом:

– в случае определенной системы найти единственное ее решение;

– в случае неопределенной системы описать множество всех ее решений.

Коэффициенты системы образуют матрицу $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$, называемую *основной матрицей системы*, свободные члены образуют столбец $b = (b_1, \ldots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m$, называемый *столбцом свободных членов* или *столбцом правой части*, а неизвестные – столбец $x = (x_1, \ldots, x_n)^T$, называемый *столбцом неизвестных*. В этих обозначениях система может быть записана в виде

$$Ax = b$$

или

$$x_1a_1 + \cdots + x_na_n = b,$$

где $a_{i\boldsymbol{.}} (i = \overline{1,n})$ – столбцы матрицы A.

Две системы линейных алгебраических уравнений с одинаковым числом неизвестных называются *эквивалентными*, если множества всех решений этих систем совпадают.

Теорема. *Умножение обеих частей системы $Ax = b$ слева на невырожденную матрицу приводит ее к эквивалентной системе.*

§19. Системы с квадратной невырожденной матрицей

Теорема 19.1. *Система линейных алгебраических уравнений с квадратной невырожденной матрицей совместна и имеет единственное решение.*

Это решение имеет вид

$$x = A^{-1}b$$

или, в покомпонентной записи,

$$x_i = |A_i|/|A|, \quad i = \overline{1,n},$$

где A_i получается из матрицы A заменой ее i-го столбца столбцом b свободных членов. Эти формулы называют *правилом Крамера.*

ЗАДАЧИ

Пользуясь правилом Крамера, решить системы уравнений.

19.1. $\begin{cases} 2x - y + 3z = 9, \\ 3x - 5y + z = -4, \\ 4x - 7y + z = 5. \end{cases}$ **19.2.** $\begin{cases} x + y + 2z = -1, \\ 2x - y + 2z = 3, \\ 4x + y + 4z = -3. \end{cases}$

19.3. $\begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ 2x + 3y + z = 1, \\ 2x + y + 3z = 11. \end{cases}$ **19.4.** $\begin{cases} x + 2y + 4z = 31, \\ 5x + y + 2z = 29, \\ 3x - y + z = 10. \end{cases}$

Для каждого значения параметра λ исследовать и решить системы уравнений.

19.5. $\begin{cases} \lambda x + (\lambda - 2)y = -2\lambda, \\ x + 2y = \lambda + 5. \end{cases}$ **19.6.** $\begin{cases} \lambda x + 3y = \lambda - 2, \\ 3x + \lambda y = 1. \end{cases}$

19.7. Выяснить, является ли вектор $b = (1, 2, \ldots, n) \in \mathbb{R}^n$ линейной комбинацией векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ вида:

а) $a_1 = (1, 1, 1, \ldots, 1),$
$a_2 = (1, 2, 4, \ldots, 2^{n-1}),$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
$a_n = (1, n, n^2, \ldots, n^{n-1});$

б) $a_1 = (1, 1, \ldots, 1),$
$a_2 = (0, 1, \ldots, 1),$
$\ldots\ldots\ldots\ldots$
$a_n = (0, 0, \ldots, 1).$

19.8. Доказать, что любой многочлен степени n однозначно определяется своими значениями при $n + 1$ различных значениях переменной, т.е. показать, что для произвольных различных между собой чисел $t_0, t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ и произвольных чисел $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ существует и притом только один многочлен $f(t)$ степени не выше n, для которого

$$f(t_i) = a_i, \; i = \overline{0, n}.$$

19.9. Пользуясь предыдущей задачей, доказать эквивалентность следующих двух определений равенства многочленов от одной переменной с действительными коэффициентами:

а) два многочлена называются равными, если равны их коэффициенты при одинаковых степенях переменной;

б) два многочлена называются равными, если их значения совпадают при каждом значении переменной.

19.10. Найти многочлен $f(t)$ второй степени, если известно, что

$$f(1) = -1,\ f(-1) = 9,\ f(2) = -3.$$

19.11. Найти многочлен $f(t)$ третьей степени, если известно, что

$$f(-1) = 0,\ f(1) = 4,\ f(2) = 3,\ f(3) = 16.$$

19.12. Доказать, что любой многочлен $f(t)$ степени n однозначно определяется своим значением и значениями всех своих производных до порядка n при некотором $t = t_0$, т.е. показать, что для любых чисел $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ существует и притом только один многочлен $f(t)$ степени не выше n, для которого

$$f(t_0) = a_0,\ f'(t_0) = a_1,\ f''(t_0) = a_2, \ldots,\ f^{(n)}(t_0) = a_n.$$

19.13. Доказать, что, каковы бы ни были числа $t_1, t_2, a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, b_0 \in \mathbb{R}$ $(t_1 \neq t_2)$, существует и притом единственный многочлен $f(t)$ степени не выше n такой, что

$$f(t_1) = a_0,\ f'(t_1) = a_1, \ldots,\ f^{(n-1)}(t_1) = a_{n-1},\ f(t_2) = b_0.$$

19.14. Доказать, что, каковы бы ни были числа $t_1, t_2, a_0, a_1, \ldots, a_k, b_0, b_1, \ldots, b_l \in \mathbb{R}$ $(t_1 \neq t_2;\ k + l = n - 1)$, существует и притом единственный многочлен $f(t)$ степени не выше n такой, что

$$f(t_1) = a_0,\ f'(t_1) = a_1, \ldots,\ f^{(k)}(t_1) = a_k,$$
$$f(t_2) = b_0,\ f'(t_2) = b_1, \ldots,\ f^{(l)}(t_2) = b_l.$$

19.15. Доказать, что равенства

$$Ab_1 = c_1,\ Ab_2 = c_2,\ \ldots,\ Ab_n = c_n,$$

в которых вектор-столбцы $b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ линейно независимы, а вектор-столбцы $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}^{m\times 1}$ произвольны, определяют и притом единственным образом матрицу $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

19.16. Доказать, что для любой линейно независимой системы матриц $B_1, B_2, \ldots, B_{n^2} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ и чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n^2} \in \mathbb{R}$

существует и притом единственная квадратная матрица A порядка n такая, что выполнены соотношения

$$\operatorname{tr}(AB_k) = \alpha_k,\ k = \overline{1, n^2}.$$

19.17. Доказать, что система

$$\begin{cases} bx + ay = c, \\ cx + az = b, \\ cy + bz = a. \end{cases}$$

имеет единственное решение, если $abc \neq 0$, и найти это решение.

19.18. Доказать, что система

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 + dx_4 = 0, \\ bx_1 - ax_2 + dx_3 - cx_4 = 0, \\ cx_1 - dx_2 - ax_3 + bx_4 = 0, \\ dx_1 + cx_2 - bx_3 - ax_4 = 0. \end{cases}$$

имеет единственное решение, если действительные параметры a, b, c, d не все равны нулю.

Решить следующие системы уравнений.

19.19. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1, \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b, \\ a_1^2x_1 + a_2^2x_2 + \ldots + a_n^2x_n = b^2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^{n-1}x_1 + a_2^{n-1}x_2 + \ldots + a_n^{n-1}x_n = b^{n-1}, \end{cases}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ попарно различны.

19.20. $$\begin{cases} x_1 + a_1x_2 + \ldots + a_1^{n-1}x_n = b_1, \\ x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_2^{n-1}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 + a_nx_2 + \ldots + a_n^{n-1}x_n = b_n, \end{cases}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ попарно различны.

19.21. $$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_n = b_1, \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b_2, \\ a_1^2x_1 + a_2^2x_2 + \ldots + a_n^2x_n = b_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1^{n-1}x_1 + a_2^{n-1}x_2 + \ldots + a_n^{n-1}x_n = b_n, \end{cases}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ попарно различны.

19.22. $$\begin{cases} x_1 + \quad x_2 + \ldots + \quad x_n + 1 = 0, \\ 2x_1 + 2^2 x_2 + \ldots + 2^n x_n + 1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ nx_1 + n^2 x_2 + \ldots + n^n x_n + 1 = 0. \end{cases}$$

19.23. $$\begin{cases} ax_1 + ax_2 + \ldots + ax_{n-1} + bx_n = c_n, \\ ax_1 + ax_2 + \ldots + bx_{n-1} + ax_n = c_{n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ bx_1 + ax_2 + \ldots + ax_{n-1} + ax_n = c_1, \end{cases}$$

где $(a-b)(b+(n-1)a) \neq 0$.

19.24. $$\begin{cases} \dfrac{x_1}{b_1 - a_1} + \dfrac{x_2}{b_1 - a_2} + \ldots + \dfrac{x_n}{b_1 - a_n} = 1, \\ \dfrac{x_1}{b_2 - a_1} + \dfrac{x_2}{b_2 - a_2} + \ldots + \dfrac{x_n}{b_2 - a_n} = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{x_1}{b_n - a_1} + \dfrac{x_2}{b_n - a_2} + \ldots + \dfrac{x_n}{b_n - a_n} = 1, \end{cases}$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ попарно различны.

19.25. Пользуясь правилом Крамера, вывести для n-й производной функции

$$f(t) = \frac{g(t)}{h(t)}$$

формулу

$$f^{(n)}(t) = \frac{1}{\big(h(t)\big)^{n+1}} \begin{vmatrix} h(t) & 0 & 0 & \ldots & 0 & g(t) \\ h'(t) & h(t) & 0 & \ldots & 0 & g'(t) \\ h''(t) & 2h'(t) & h(t) & \ldots & 0 & g''(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ h^{(n)}(t) & C_n^1 h^{(n-1)}(t) & C_n^2 h^{(n-2)}(t) & \ldots & h(t) & g^{(n)}(t) \end{vmatrix}$$

19.26. Доказать, что если система $Ax = b$ с квадратной вырожденной матрицей A совместна, то в формулах правила Крамера: $|A_i| = 0$, $i = \overline{1,n}$.

19.27. Пусть $Ax = b$ – система с квадратной матрицей A n-го порядка и $\operatorname{rg} A = n - 1$. Доказать, что если в формулах правила Крамера $|A_i| = 0$, $i = \overline{1,n}$, то система совместна. Верно ли утверждение этой задачи в случае, если $\operatorname{rg} A < n - 1$?

§20. Системы общего вида

Совместность системы. Пусть

$$Ax = b \tag{20.1}$$

– система общего вида и $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Составим матрицу B, приписав к матрице A столбец свободных членов:

$$B = [A|b].$$

Матрица B называется *расширенной матрицей* системы (20.1).

Теорема 20.1 (теорема Кронекера–Капелли). *Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы равен рангу расширенной матрицы.*

Схема исследования совместной системы. Пусть система уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r + a_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n = b_r, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mr}x_r + a_{m,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{$*$}$$

совместна и $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = r$.

Схема исследования системы $(*)$ состоит в следующем.

1. Выбирается базисный минор матрицы A. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что базисный минор матрицы A находится в левом верхнем углу, так что

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

2. Рассматривается укороченная система из первых r уравнений системы $(*)$, т.е. из уравнений, коэффициенты которых входят в базисный минор:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{r1}x_1 + \ldots + a_{rr}x_r + a_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n = b_r. \end{cases} \tag{$**$}$$

Теорема 20.2. *Укороченная система* $(**)$ *эквивалентна системе* $(*)$.

3. Если $r = n$, то система $(**)$ имеет единственное решение как система с квадратной невырожденной матрицей.
4. Пусть $r < n$. Неизвестные $x_1, \ldots, x_r$, коэффициенты при которых входят в базисный минор, называются *главными*, а остальные неизвестные $x_{r+1}, \ldots, x_n$ – *свободными*.

Теорема 20.3. *Придавая свободным неизвестным произвольные значения и вычисляя значения главных неизвестных из системы* $(**)$, *можно получить все решения системы* $(**)$.

Изложенная схема дает правило, которое позволяет получить любое решение системы $(**)$, а следовательно, и произвольной совместной системы линейных алгебраических уравнений.

Теорема 20.4. *Система алгебраических уравнений с* n *неизвестными имеет единственное решение тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B = n.$$

Общее решение системы. Чтобы описать множество всех решений неопределенной системы, можно решить систему (**) относительно главных неизвестных:

$$\begin{array}{c} x_1 = f_1(x_{r+1}, \ldots, x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = f_r(x_{r+1}, \ldots, x_n), \end{array} \qquad (20.2)$$

где $f_1, \ldots, f_r$ – некоторые однозначно (в силу теоремы 19.1) определяемые из (**) функции.

Соотношения (20.2) при произвольных $x_{r+1}, \ldots, x_n$ описывают множество всех решений системы и называются *общим решением системы.* В отличие от общего, конкретное решение $x = (c_1, \ \ldots \ , c_n)^T$, где c_i, $i = \overline{1, n}$, – известные числа, называется *частным решением.*

Однородные системы. Система линейных алгебраических уравнений с нулевой правой частью называется *однородной.*

Однородная система заведомо имеет решение $(0, \ldots, 0)^T$, называемое *тривиальным.*

Теорема 20.5. *Однородная система с n неизвестными имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rg} A < n$.

Теорема 20.6. *Однородная система с квадратной матрицей имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда* $|A| = 0$.

ЗАДАЧИ

20.1. Рассматривается система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными

$$Ax = b.$$

Указать все утверждения из приведенных ниже, равносильные невырожденности матрицы A.

1. Для любого b система имеет хотя бы одно решение.
2. Для некоторого b система имеет хотя бы одно решение.
3. Для любого b система имеет не более одного решения.
4. Для некоторого b система имеет не более одного решения.
5. Для любого b система имеет единственное решение.
6. Для некоторого b система имеет единственное решение.

20.2. Что можно сказать о матрице $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \neq n$, если система $Ax = b$ совместна при любом b?

20.2.1. Что можно сказать о матрице $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, если система $Ax = b$ имеет единственное решение при любом b?

20.3. Привести пример матрицы $A \in \mathbb{R}^{3 \times 5}$, для которой система уравнений $Ax = b$ совместна при любом b.

20.4. Привести пример матрицы $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$: а) ранга 1, б) ранга 2, для которой все три системы уравнений

$$Ax = e_i, \quad i = \overline{1, 3},$$

не имеют решений (e_i – единичные вектор-столбцы из $\mathbb{R}^3$).

20.5. Доказать, что для любой вырожденной матрицы A и любой нулевой матрицы O подходящих размеров существует ненулевая матрица B такая, что: а) $AB = O$; б) $BA = O$.

20.6. Доказать, что для того, чтобы система линейных уравнений с числом уравнений, на единицу большим числа неизвестных, была совместна, необходимо (но, вообще говоря, не достаточно), чтобы определитель расширенной матрицы был равен нулю. Показать, что это условие будет также и достаточным, если ранг основной матрицы системы равен числу неизвестных.

20.7. Доказать, что если столбцы основной матрицы системы линейно независимы, то эта система имеет не более одного решения.

20.8. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ и $a' \in \mathbb{R}^{1\times n}$. Доказать, что системы $Ax = 0$ и $\left\{\begin{array}{l} Ax = 0, \\ a'x = 0 \end{array}\right.$ эквивалентны тогда и только тогда, когда вектор-строка a' линейно выражается через строки матрицы A.

20.9. Доказать, что системы уравнений $A'x = 0$ и $A''x = 0$ эквивалентны тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} A' \\ A'' \end{bmatrix} = \operatorname{rg} A' = \operatorname{rg} A''.$$

20.10. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^{m\times 1}$, $a' \in \mathbb{R}^{1\times n}$ и $\beta \in \mathbb{R}$. Доказать, что совместные системы $Ax = b$ и $\left\{\begin{array}{l} Ax = b, \\ a'x = \beta \end{array}\right.$ эквивалентны тогда и только тогда, когда вектор-строка $[a'|\beta]$ линейно выражается через строки расширенной матрицы $[A|b]$.

20.11. Доказать, что совместные системы уравнений $A'x = b'$ и $A''x = b''$ эквивалентны тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} A' & b' \\ A'' & b'' \end{bmatrix} = \operatorname{rg} A' = \operatorname{rg} A''.$$

20.12. Доказать, что матричное уравнение

$$AX = B,$$

в котором $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times k}$ – заданные матрицы, а матрица $X \in \mathbb{R}^{n\times k}$ искомая, имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rg}[A|B] = \operatorname{rg} A.$$

20.13. Векторы $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}$ являются решениями неоднородной системы уравнений $Ax = b$. Какому условию должны удовлетворять коэффициенты линейной комбинации этих векторов, чтобы она снова была решением системы $Ax = b$?

20.14. Векторы $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}$ являются решениями неоднородной системы уравнений $Ax = b$. Какому условию должны удовлетворять коэффициенты линейной комбинации этих векторов, чтобы эта комбинация была решением соответствующей однородной системы $Ax = 0$?

20.15. Показать, что если матричное уравнение

$$AXB = C,$$

в котором $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times q}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times q}$ – заданные матрицы, а матрица $X \in \mathbb{R}^{n\times p}$ искомая, рассматривать как систему линейных уравнений относительно элементов матрицы X, то матрицей этой системы будет матрица $B^T \otimes A$, если элементы каждой из матриц X и C занумеровать по столбцам.

20.16. Показать, что если матричное уравнение

$$AX + XB = C,$$

в котором $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ – заданные матрицы, а матрица $X \in \mathbb{R}^{m\times n}$ искомая, рассматривать как систему линейных уравнений относительно элементов матрицы X, то матрицей этой системы будет матрица $I_n \otimes A + B^T \otimes I_m$, если элементы каждой из матриц X и C занумеровать по столбцам.

20.17. Доказать, что матричное уравнение

$$AXB = C,$$

в котором $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{p\times q}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times q}$ – заданные матрицы, имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}[\ A \mid C\ ] \quad \text{и} \quad \operatorname{rg} B = \operatorname{rg}[\ B^T \mid C^T\ ].$$

§21. Метод Гаусса исследования и решения систем

Укажем тип простейших систем линейных уравнений, тип эквивалентных преобразований системы, а также покажем, что произвольная система линейных алгебраических уравнений указанными преобразованиями приводится к указанному типу.

Системы с трапециевидной матрицей. Рассматривается система

$$Ax = b \tag{21.1}$$

с верхней трапециевидной матрицей A. Пусть расширенная матрица этой системы имеет вид

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \ldots & a_{1n} & & b_1 \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2r} & a_{2,r+1} & \ldots & a_{2n} & & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \ldots & a_{rn} & & b_r \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & & b_{r+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & & b_m \end{array}\right],$$

где $a_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1, r}$.

Теорема 21.1. *Система с верхней трапециевидной матрицей совместна тогда и только тогда, когда $b_k = 0$ при $k > r$.*

Реализация всех пунктов схемы исследования и решения совместной системы (§20) для системы с верхней трапециевидной матрицей достаточно проста:

1) в качестве базисного минора матрицы A всегда можно взять минор, расположенный в левом верхнем углу;

2) укороченная система состоит из первых r уравнений;

3) если $r = n$, то система (21.1) станет системой с треугольной матрицей

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12} + \ldots + a_{1r}x_r = b_1, \\ \qquad\qquad a_{22} + \ldots + a_{2r}x_r = b_2, \\ \qquad\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\quad a_{rr}x_r = b_r, \end{cases}$$

которая имеет единственное решение (§19); найти его не представляет труда: решая последовательно уравнения системы снизу вверх, мы каждый раз будем иметь дело с уравнением, содержащим только одно неизвестное.

4) если $r < n$, то неизвестные $x_{r+1}, \ldots, x_n$ будут свободными и система относительно главных неизвестных будет иметь вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{rr}x_r = b_r - a_{r,r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{rn}x_n. \end{cases}$$

Общее и частное решения исходной системы находятся из этой системы с треугольной матрицей.

Элементарные преобразования системы уравнений. *Элементарными преобразованиями системы уравнений* называются преобразования следующих типов:

1) перестановка местами двух уравнений системы;

2) умножение какого-либо уравнения системы на число $\alpha \neq 0$;

3) прибавление к одному уравнению системы другого ее уравнения, умноженного на любое число β.

Заметим, что элементарные преобразования системы уравнений означают элементарные преобразования строк ее расширенной матрицы B.

Теорема 21.2. *Элементарные преобразования системы линейных алгебраических уравнений приводят ее к эквивалентной системе.*

Приведение системы общего вида к системе с верхней трапециевидной матрицей. Известно (§3), что матрица A системы уравнений

(21.1) общего вида элементарными преобразованиями строк и перестановками столбцов приводится к верхней трапециевидной форме. Если используемые при этом элементарные преобразования строк матрицы A применить к строкам расширенной матрицы B, то на основании теоремы 21.2 мы придем к системе с верхней трапециевидной матрицей, решения которой отличаются от решений исходной системы только нумерацией неизвестных. *Метод Гаусса* исследования и решения системы уравнений состоит в приведении ее к системе с верхней трапециевидной матрицей с последующим исследованием и решением получившейся системы. При этом, если в процессе преобразования использовались перестановки столбцов основной матрицы A, то в полученных решениях необходимо восстановить исходную нумерацию неизвестных.

Пример 21.1. Исследовать и решить систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

Решение. Элементарными преобразованиями строк расширенной матрицы приведем матрицу системы к верхней трапециевидной форме:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & -7 & 2 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -10 & 0 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{-2} \end{array}\right].$$

Система с последней расширенной матрицей несовместна. ■

Пример 21.2. Исследовать и решить систему

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 5x_4 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 - 2x_3 - 11x_4 = 3, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 - 6x_4 = 1, \\ 2x_1 + 8x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 9, \\ 2x_1 + 7x_2 + 8x_3 - 3x_4 = 15. \end{cases}$$

Решение. Элементарными преобразованиями строк расширенной матрицы приведем матрицу системы к верхней трапециевидной форме:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 4 & 0 & -5 & 0 \\ 2 & 9 & -2 & -11 & 3 \\ 1 & 5 & -1 & -6 & 1 \\ 2 & 8 & 3 & -7 & 9 \\ 2 & 7 & 8 & -3 & 15 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 4 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & -1 & 8 & 7 & 15 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 4 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 18 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 4 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Система с последней расширенной матрицей совместна и определенна. Решим последовательно уравнения получившейся системы, начиная с последнего:

$$\begin{aligned} x_4 &= 5, \\ x_3 &= -2, \\ x_2 &= 3 + x_4 + 2x_3 = 4, \\ x_1 &= 5x_4 - 4x_2 = 9. \end{aligned}$$

Итак, система имеет единственное решение – вектор-столбец $(9,4,-2,5)^T$. ∎

Пример 21.3. Исследовать и решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_4 - 2x_5 = 1, \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + 8x_5 = 1, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 = -1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 9x_5 = 4. \end{cases}$$

Построить ее общее решение и указать какое-нибудь частное решение.

Решение. Элементарными преобразованиями строк расширенной матрицы приведем матрицу системы к верхней ступенчатой форме:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 6 & 3 & 2 & 1 & 8 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 9 & 4 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & 14 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 11 & 3 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 4 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Базисный минор этой матрицы расположен в первом, третьем и четвертом столбцах, поэтому выберем свободными неизвестные x_2 и x_5 и выразим через них остальные неизвестные, решая относительно них уравнения системы, начиная с последнего:

$$x_4 = 1 - x_5,$$
$$x_3 = -1 + 4x_4 - 7x_5 = 3 - 11x_5,$$
$$2x_1 = 1 - x_2 - 3x_4 + 2x_5 = -2 - x_2 + 5x_5 \Rightarrow x_1 = -1 - x_2/2 + 5x_5/2.$$

Итак, общее решение системы имеет вид

$$x = \left(-1 - x_2/2 + 5x_5/2, x_2, 3 - 11x_5, 1 - x_5, x_5\right)^T, \quad x_2, x_5 \in \mathbb{R}.$$

Частное решение системы получится, если в ее общем решении задать значения свободных неизвестных, например, положить их равными $x_2 = x_5 = 0$:

$$x = (-1, 0, 3, 1, 0)^T. \quad ∎$$

Пример 21.4. Найти необходимое и достаточное условие того, что в любом решении совместной системы линейных уравнений неизвестное x_k принимает одно и тоже значение.

Решение. Условие означает, что x_k не может быть свободным неизвестным, т.е. что k-й столбец матриц системы входит в любой ее базисный минор и, следовательно, не является линейной комбинацией других столбцов. Это равносильно тому, что при вычеркивании k-го столбца ранг матрицы системы уменьшается на единицу. ∎

ЗАДАЧИ

Исследовать на совместность и найти общее решение системы уравнений.

21.1. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1. \end{cases}$ **21.2.** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7, \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14. \end{cases}$

21.3. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 5. \end{cases}$ **21.4.** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 4. \end{cases}$

21.5. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6. \end{cases}$ **21.6.** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 = -6. \end{cases}$

21.7. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 - 3x_4 + 5x_5 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 7x_5 = 3, \\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 5x_4 + 8x_5 = 3. \end{cases}$

21.8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 13, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 14. \end{cases}$ **21.9.** $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$

21.10. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_4 + 2x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - 3x_5 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 7, \\ 9x_1 - 9x_2 + 6x_3 - 16x_4 + 2x_5 = 25. \end{cases}$

21.11. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$ **21.12.** $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3, \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1, \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$

21.13. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_5 = -3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 10, \\ x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = -5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + 4x_5 = 1. \end{cases}$

21.14. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0. \end{cases}$

21.15. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_4 = 23, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12. \end{cases}$

21.16. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

21.17. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3. \end{cases}$

21.18. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 3, \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = -1. \end{cases}$

21.19. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 1, \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

Исследовать систему уравнений на совместность и найти ее общее решение в зависимости от значений параметра λ.

21.20. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -1, \\ 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 = \lambda, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$ **21.21.** $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1, \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9, \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \lambda. \end{cases}$

21.22. $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3=0,\\ 5x_1+x_2-2x_3=2,\\ 2x_1+2x_2-x_3=3.\end{cases}$ **21.23.** $\begin{cases} 3x_1+2x_2+5x_3+4x_4=3,\\ 2x_1+3x_2+6x_3+8x_4=5,\\ x_1-6x_2-9x_3-20x_4=-11,\\ 4x_1+x_2+4x_3+\lambda x_4=2.\end{cases}$

21.24. $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+4x_4=5,\\ 4x_1-2x_2+5x_3+6x_4=7,\\ 6x_1-3x_2+7x_3+8x_4=9,\\ \lambda x_1-4x_2+9x_3+10x_4=11.\end{cases}$

21.25. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3+2x_4=3,\\ 4x_1+6x_2+3x_3+4x_4=5,\\ 6x_1+9x_2+5x_3+6x_4=7,\\ 8x_1+12x_2+7x_3+\lambda x_4=9.\end{cases}$ **21.26.** $\begin{cases} x_1+x_2+\lambda x_3=2,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=-1,\\ \lambda x_1+x_2+x_3=-1.\end{cases}$

21.27. $\begin{cases} \lambda x_1+x_2+x_3+x_4=1,\\ x_1+\lambda x_2+x_3+x_4=1,\\ x_1+x_2+\lambda x_3+x_4=1,\\ x_1+x_2+x_3+\lambda x_4=1.\end{cases}$ **21.28.** $\begin{cases} x_1+x_2+\lambda x_3=3,\\ x_1+\lambda x_2+x_3=0,\\ \lambda x_1+x_2+x_3=0.\end{cases}$

21.29. $\begin{cases} (\lambda+1)x_1+x_2+x_3=1,\\ x_1+(\lambda+1)x_2+x_3=\lambda,\\ x_1+x_2+(\lambda+1)x_3=\lambda^2.\end{cases}$

21.30. $\begin{cases} (\lambda+1)x_1+x_2+x_3=\lambda^2+3\lambda,\\ x_1+(\lambda+1)x_2+x_3=\lambda^3+3\lambda^2,\\ x_1+x_2+(\lambda+1)x_3=\lambda^4+3\lambda^3.\end{cases}$

21.31. $\begin{cases} (2\lambda+1)x_1-\lambda x_2+(\lambda+1)x_3=-\lambda-1,\\ (\lambda-2)x_1+(\lambda-1)x_2+(\lambda-2)x_3=\lambda,\\ (2\lambda-1)x_1+(\lambda-1)x_2+(2\lambda-1)x_3=\lambda.\end{cases}$

21.32. $\begin{cases} \lambda x_1+(2\lambda-1)x_2+(\lambda+2)x_3=1,\\ (\lambda-1)x_2+(\lambda-3)x_3=1+\lambda,\\ \lambda x_1+(3\lambda-2)x_2+(3\lambda+1)x_3=2-\lambda.\end{cases}$

Указать все значения параметра λ, при которых система уравнений является неопределенной.

21.33. $\begin{cases} (8-\lambda)x_1+2x_2+3x_3+\lambda x_4=0,\\ x_1+(9-\lambda)x_2+4x_3+\lambda x_4=0,\\ x_1+2x_2+(10-\lambda)x_3+\lambda x_4=0,\\ x_1+2x_2+3x_3+\lambda x_4=0.\end{cases}$

21.34. $\begin{cases} (2-\lambda)x_1+4x_2+2x_3+x_4=0, \\ x_1+(2-\lambda)x_2+x_3+x_4=0, \\ (3-\lambda)x_1+6x_2+(3-\lambda)x_3-4x_4=0, \\ x_1+2x_2+x_3+(2-\lambda)x_4=0. \end{cases}$

21.35. Проверить, что во всех решениях системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3+x_5=6, \\ x_1+2x_2+x_3+x_4=5, \\ -x_1+x_2+3x_3+5x_4+x_5=8, \\ 2x_1-x_2+x_3-8x_4+2x_5=-6. \end{cases}$$

значения неизвестных x_3 и x_5 постоянны и равны соответственно 1 и 0. Объяснить эти факты в терминах линейной зависимости и линейной независимости столбцов расширенной матрицы системы.

Исследовать системы уравнений на совместность и найти общее решение в зависимости от значений входящих в коэффициенты параметров.

21.36. $\begin{cases} x+y+z=1, \\ ax+by+cz=d, \\ a^2x+b^2y+c^2z=d^2. \end{cases}$ **21.37.** $\begin{cases} ax+y+z=1, \\ x+by+z=1, \\ x+y+cz=1. \end{cases}$

21.38. $\begin{cases} ax+y+z=a, \\ x+by+z=b, \\ x+y+cz=c. \end{cases}$ **21.39.** $\begin{cases} x+ay+a^2z=a^3, \\ x+by+b^2z=b^3, \\ x+cy+c^2z=c^3. \end{cases}$

21.40. $\begin{cases} ax+y+z=4, \\ x+by+z=3, \\ x+2by+z=4. \end{cases}$ **21.41.** $\begin{cases} ax+by+z=1, \\ x+aby+z=b, \\ x+by+az=1. \end{cases}$

21.42. $\begin{cases} x+ay+a^2z=1, \\ x+ay+abz=a, \\ bx+a^2y+a^2bz=a^2b. \end{cases}$ **21.43.** $\begin{cases} cx+by+cz=1-b+c, \\ bx+y+bz=b, \\ bx+cy+bz=1+b-c. \end{cases}$

21.44. $\begin{cases} ax+y+z=1, \\ x+ay+z=b, \\ x+y+az=c. \end{cases}$ **21.45.** $\begin{cases} ax+by+2z=1, \\ ax+(2b-1)y+3z=1, \\ ax+by+(b+3)z=2b-1. \end{cases}$

21.46. Установить, является ли вектор b линейной комбинацией векторов a_1, a_2, a_3, a_4, и, в случае положительного ответа, найти коэффициенты этой линейной комбинации:

а) $a_1 = (3, 7, 5), a_2 = (-5, -4, 7), a_3 = (2, 1, -4), a_4 = (4, 3, -6)$, $b = (2, 5, 3)$;

б) $a_1 = (2, 4, 2, 1)$, $a_2 = (5, 3, 3, 8)$, $a_3 = (8, 9, 5, 7)$, $a_4 = (1, 1, 1, 1)$, $b = (8, 9, 7, 12)$;

в) $a_1 = (8, 3, 4, 3, 7)$, $a_2 = (6, 3, 2, 5, 4)$, $a_3 = (5, 2, 3, 1, 5)$, $a_4 = (2, 1, 1, 1, 2)$, $b = (21, 10, 8, 15, 18)$;

г) $a_1 = (2, 4, 5, 2, 1)$, $a_2 = (3, 3, 11, 5, -7)$, $a_3 = (1, 1, 3, 1, -1)$, $a_4 = (2, 1, 2, 1, 2)$, $b = (4, 5, 2, 1, 7)$.

21.47. Решить системы $Ax = b_i$, $i = 1, 2, 3$, с общей матрицей $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -13 \end{bmatrix}$ и разными правыми частями

$$b_1 = (3, 0, 3, -6)^T,\ b_2 = (4, -1, 4, -9)^T,\ b_3 = (6, -3, 6, -15)^T.$$

21.48. Найти все значения параметра λ, при которых вектор b имеет единственное разложение по векторам a_1, a_2, a_3:

а) $b = (1, \lambda - 4, 1)$,
$a_1 = (6 - \lambda, 11 - 2\lambda, 1)$, $a_2 = (6 - \lambda, 6 - \lambda, 1)$, $a_3 = (1, 1, 6 - \lambda)$;

б) $b = (-1, -2, -1)$,
$a_1 = (\lambda, 6, 3)$, $a_2 = (3, 2\lambda, \lambda)$, $a_3 = (\lambda, 3 + \lambda, 3)$;

в) $b = (1, 1, 1)$,
$a_1 = (2 - \lambda, 1, 2 - \lambda)$, $a_2 = (3 - 2\lambda, 1, 2 - \lambda)$, $a_3 = (1, 2 - \lambda, 1)$;

г) $b = (1, 2, 1)$,
$a_1 = (3 + \lambda, -2, -1)$, $a_2 = (-1, -2, 3 + \lambda)$, $a_3 = (-2, \lambda, -2)$.

21.49. Показать, что вычисление матрицы, обратной к данной матрице порядка n, можно свести к решению n систем линейных уравнений, каждая из которых содержит n уравнений с n неизвестными и имеет своей матрицей матрицу A.

Пользуясь методом предыдущей задачи, найти обратные матрицы для следующих матриц.

21.50. $\begin{bmatrix} -2 & -3 & -6 & -9 \\ 4 & 6 & 12 & 17 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 7 & 7 \end{bmatrix}$ **21.51.** $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & -6 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

21.52. Найти третий столбец A^{-1}, где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

21.53. Найти последнюю строку A^{-1}, где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

21.54. Даны матрицы $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ и вектор $b = (1, 4, 7)^T$. Найти общее решение систем:

а) $Ax = b$; б) $Ax = Bx$; в) $Ax = By$.

21.55. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Доказать следующие утверждения или, если они не верны, привести контрпримеры к ним.

1. Если $n > m$ и для некоторого b система $Ax = b$ не имеет решений, то система $Ax = 0$ имеет бесконечно много решений.
2. Если $n < m$ и для некоторого b система $Ax = b$ не имеет решений, то система $Ax = 0$ имеет бесконечно много решений.
3. Если $n > m$ и система $Ax = 0$ имеет бесконечно много решений, то система $Ax = b$ не имеет решений для некоторого b.
4. Если $n < m$ и система $Ax = 0$ имеет бесконечно много решений, то система $Ax = b$ не имеет решений для некоторого b.

21.56. Даны матрица

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -4 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -10 \end{bmatrix}$$

и вектор $b = (b_1, b_2, b_3, b_4)^T$. Доказать, что система $Ax = b$ имеет единственное решение $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$, удовлетворяющее условию $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ тогда и только тогда, когда $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 0$.

21.57. Доказать, что система уравнений совместна при любой правой части тогда и только тогда, когда строки ее основной матрицы линейно независимы.

21.58. Доказать, что всегда имеет место одна из двух возможностей: либо система уравнений $Ax = b$ совместна при любой правой части, либо однородная система $A^T y = 0$ имеет ненулевое решение (*альтернатива Фредгольма*).

21.59. Выяснить, какие условия на основную матрицу A системы необходимы и достаточны для того, чтобы при любой правой части b система $Ax = b$

а) не была неопределенной;

б) не была определенной;

в) была определенной;

г) была неопределенной;

д) была несовместной.

21.60. Доказать, что система $Ax = b$ совместна тогда и только тогда, когда для любого решения y однородной системы $A^T y = 0$ выполнено равенство $b^T y = 0$ (*теорема Фредгольма*).

21.61. Проверить совместность системы уравнений, пользуясь теоремой Фредгольма:

а) $\begin{cases} 3x + 5y = 1, \\ 5x + 9y = 2, \\ 4x + 7y = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 4y = 2, \\ 5x + 7y = 3, \\ 2x + 3y = 1. \end{cases}$

21.62. Доказать, что системы $A^T Ax = 0$ и $Ax = 0$ эквивалентны.

21.63. Пусть $Ax = b$ – произвольная (не обязательно совместная) система уравнений. Доказать, что система уравнений $(A^T A)x = A^T b$ совместна.

§22. Геометрические свойства решений системы

Теорема 22.1. *Множество всех решений однородной системы $Ax = 0$ с n неизвестными является линейным подпространством арифметического пространства $\mathbb{R}^n$.*

Любой базис подпространства решений однородной системы линейных уравнений называется *фундаментальной системой решений* (Ф.С.Р.).

Теорема 22.2. *Размерность подпространства решений однородной системы $Ax = 0$ с n неизвестными равна $n - r$, где $r = \operatorname{rg} A$.*

Общий принцип построения фундаментальной системы решений следует из теоремы 22.2: так как размерность подпространства решений однородной системы равна $n - r$, то для построения фундаментальной системы решений достаточно найти любые $n - r$ линейно независимых решений (§17). Для этого достаточно свободным неизвестным придать $n - r$ линейно независимых наборов значений, т.е. наборов вида $(c_{1,r+1}, \dots, c_{1n})$, ... , $(c_{n-r,r+1}, \dots, c_{n-r,n})$, для которых

$$\begin{vmatrix} c_{1,r+1} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n-r,r+1} & \dots & c_{n-r,n} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Если для каждого из этих наборов найти соответствующие значения главных неизвестных, то получим $n - r$ линейно независимых решений системы:

$$\begin{aligned} e_1 &= (c_{11}, \quad \dots, c_{1r}, \quad c_{1,r+1}, \quad \dots, c_{1n})^T, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e_{n-r} &= (c_{n-r,1}, \dots, c_{n-r,r}, c_{n-r,r+1}, \dots, c_{n-r,n})^T. \end{aligned}$$

Фундаментальная система решений $e_1, \dots, e_{n-r}$ однородной системы линейных уравнений позволяет записать любое решение системы в общем виде:

$$x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_{n-r} e_{n-r}, \quad \forall \alpha_1, \dots, \alpha_{n-r} \in \mathbb{R}.$$

Это представление решения называется *общим решением однородной системы* уравнений *через фундаментальную систему решений.*

Пусть

$$Ax = b \tag{22.1}$$

– неоднородная система линейных алгебраических уравнений. Однородная система

$$Ax = 0, \tag{22.2}$$

полученная из системы (22.1) заменой свободных членов нулями, называется *приведенной однородной* системой для системы (22.1).

Между решениями обеих систем существует тесная связь:

1) *сумма решений неоднородной и приведенной однородной систем является решением неоднородной системы;*

2) *разность двух решений неоднородной системы является решением приведенной однородной системы.*

Теорема 22.3. *Множество всех решений неоднородной системы является линейным многообразием, полученным сдвигом подпространства решений приведенной однородной системы на частное решение неоднородной системы.*

Итак, найдя одно (частное) решение неоднородной системы и прибавляя его к каждому решению приведенной системы, можно получить все решения неоднородной системы. Это позволяет записать решение неоднородной системы в общем виде следующим образом:

$$x = c + \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_{n-r} e_{n-r}, \quad \forall \alpha_1, \dots, \alpha_{n-r} \in \mathbb{R}, \tag{22.3}$$

где c – частное решение (22.1), а $e_1, \dots, e_{n-r}$ – фундаментальная система решений (22.2). Представление (22.3) решения называется *общим решением неоднородной системы* уравнений *через фундаментальную систему решений.*

Пример 22.1. Построить фундаментальную систему решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Приведем расширенную матрицу системы к трапециевидной форме:

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & -4 & 0 \\ 4 & 5 & -2 & 3 & 0 \\ 3 & 8 & 24 & -19 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -18 & 15 & 0 \\ 0 & 2 & 12 & -10 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Выберем свободными неизвестные x_3, x_4. Так как количество неизвестных n равно 4, а ранг r основной матрицы равен 2, то Ф.С.Р. содержит $n - r = 2$ решения. Придадим свободным неизвестным x_3, x_4 два набора значений: $(1, 0)$ и $(0, 1)$ и найдем в каждом случае значения главных неизвестных из уравнений преобразованной системы:

$$\begin{aligned} x_2 &= 5x_4 - 6x_3, \\ x_1 &= 3x_4 - 4x_3 - 2x_2 = -7x_4 + 8x_3. \end{aligned}$$

Результаты сведем в таблицу:

x_1	x_2	x_3	x_4
8	−6	1	0
−7	5	0	1

Итак, решения

$$e_1 = (8, -6, 1, 0)^T, \quad e_2 = (-7, 5, 0, 1)^T$$

образуют фундаментальную систему. ∎

Пример 22.2. Найти общее решение неоднородной системы уравнений через фундаментальную систему решений:

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 5, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 4, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

Решение. Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатой форме:

$$\left[\begin{array}{rrrrr|r} 6 & 3 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 3 & 2 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 1 & 7 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 6 & 3 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 1 & 7 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -11 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & -13 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -19 & -6 & -2 & 2 \end{array}\right] \to$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{вычтем из} \\ \text{2-й строки} \\ \text{3-ю строку} \end{array}\right\} \to \left[\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 1 & 7 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -13 & -4 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -19 & -6 & -2 & 2 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 1 & 7 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 13 & 4 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 19 & 6 & 2 & -2 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 1 & 7 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 14 & 24 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 21 & 36 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{rrrrr|r} 2 & 1 & 7 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \qquad (22.4)$$

Найдем Ф.С.Р. приведенной однородной системы

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 7x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_3 - x_5 = 0, \\ 2x_4 + 7x_5 = 0. \end{cases}$$

Так как количество неизвестных n равно 5, а ранг r основной матрицы системы равен 3, то Ф.С.Р. содержит $n - r = 2$ решения. Выразим главные неизвестные x_1, x_3, x_4 через свободные неизвестные x_2, x_5:

$$\begin{aligned} x_4 &= -\frac{7}{2}x_5, \\ x_3 &= x_5, \\ x_1 &= \frac{1}{2}(-x_2 - 7x_3 - 3x_4 - 2x_5) = -\frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{4}x_5. \end{aligned}$$

Во избежание дробных чисел придадим свободным неизвестным x_2, x_5 следующие линейно независимые наборы значений: $(2, 0)$ и $(0, 4)$. Тогда получим:

x_1	x_3	x_4	x_2	x_5
-1	0	0	2	0
3	4	-14	0	4

Таким образом, решения

$$e_1 = (-1, 2, 0, 0, 0)^T, \; e_2 = (3, 0, 4, -14, 4)^T$$

образуют Ф.С.Р. приведенной однородной системы.

Найдем какое-нибудь частное решение исходной системы. Придадим свободным неизвестным значения $x_2 = 0$, $x_5 = 2$. Тогда из системы, соответствующей правой расширенной матрице (22.4), следует:

$$\begin{aligned} &2x_4 = 12 - 7x_5 = -2 \Rightarrow x_4 = -1, \\ &x_3 = -2 + x_5 = 0, \\ &2x_1 = 1 - x_2 - 7x_3 - 3x_4 - 2x_5 = 0 \Rightarrow x_1 = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $c = (0, 0, 0, -1, 2)^T$ - частное решение.

Согласно (22.3) общее решение исходной неоднородной системы имеет вид

$$x = (0, 0, 0, -1, 2)^T + \alpha_1(-1, 2, 0, 0, 0)^T + \alpha_2(3, 0, 4, -14, 4)^T, \; \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

ЗАДАЧИ

Найти фундаментальную систему решений для следующих систем уравнений.

22.1. $0x_1+0x_2+0x_3+0x_4=0$. **22.2.** $\begin{cases} 9x_1+21x_2-15x_3+5x_4=0, \\ 12x_1+28x_2-20x_3+7x_4=0. \end{cases}$

22.3. $\begin{cases} 10x_1 + 6x_2 + 15x_3 - 3x_4 - 18x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - x_4 - 6x_5 = 0, \\ -9x_1 - 4x_2 - 10x_3 + 2x_4 + 12x_5 = 0. \end{cases}$

22.4. $\begin{cases} 2x_1-5x_2+4x_3+3x_4=0, \\ 3x_1-4x_2+7x_3+5x_4=0, \\ 4x_1-9x_2+8x_3+5x_4=0, \\ 3x_1-2x_2+5x_3-3x_4=0. \end{cases}$ **22.5.** $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 6x_4 = 0, \\ 7x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_1 + 8x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$

22.6. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 9x_5 = 0. \end{cases}$

22.7. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 - 5x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

22.8. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - 6x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 6x_4 - 18x_5 = 0, \\ 3x_1 + 15x_2 + 11x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 3x_4 - 9x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 - 6x_5 = 0. \end{cases}$

Найти базисы линейных подпространств решений следующих систем.

22.9. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$ **22.10.** $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$

22.11. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 0. \end{cases}$

22.12. $\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0, \\ x_2 - x_4 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_5 - x_6 = 0, \\ x_2 - x_3 + x_6 = 0, \\ x_1 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$

22.13. $\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$

22.14. Для линейного подпространства векторов $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$, удовлетворяющих условиям $x_1 = x_3$, $x_2 = x_4$, найти два различных базиса, содержащих общий вектор $e_1 = (1, 0, 1, 0)$.

Найти общее решение следующих систем уравнений через их фундаментальные системы решений.

22.15. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 6x_3 + 3x_4 = 0, \\ 11x_1 + 17x_2 - 8x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$

22.16. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0, \\ 7x_1 + 9x_2 + 9x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0, \\ 4x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

22.17. $\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 8x_1 + 9x_2 + 9x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 0, \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases}$

22.18. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0, \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$

22.19. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n-2} + x_{n-1} + x_n = 0, \\ x_{n-1} + x_n = 0. \end{cases}$

Найти общее решение следующих систем уравнений через фундаментальную систему решений приведенных систем.

22.20. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 14x_4 = 8, \\ 2x_1 - 6x_2 - 3x_3 - x_4 = -5, \\ 3x_1 - 9x_2 - 5x_3 - 6x_4 = -4. \end{cases}$

22.21. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = -2, \\ 3x_1 - 6x_2 - 2x_3 - 4x_4 - 5x_5 = -3, \\ 3x_1 - 6x_2 - 4x_3 - 8x_4 - 13x_5 = -9, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 - x_4 - 2x_5 = -1. \end{cases}$

22.22. $\begin{cases} x_1 + 9x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 + 7x_2 + 6x_3 - x_4 = 7, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5. \end{cases}$

22.23. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 4, \\ 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 3x_5 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 12, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 6. \end{cases}$

22.24. $\begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18. \end{cases}$

22.25. $\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 2x_4 + x_5 + 3x_6 = 4, \\ 3x_1 + 9x_2 - 5x_3 + 3x_4 - 6x_5 + 2x_6 = 6, \\ -x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 + 7x_5 + x_6 = -2. \end{cases}$

Найти размерность направляющего подпространства линейного многообразия решений следующих систем в зависимости от значений параметра λ.

22.26. $\begin{cases} (5-\lambda)x_1 - 2x_2 - x_3 = 1, \\ -2x_1 + (2-\lambda)x_2 - 2x_3 = 2, \\ -x_1 - 2x_2 + (5-\lambda)x_3 = 1. \end{cases}$

22.27. $\begin{cases} -x_1 + (1+\lambda)x_2 + (2-\lambda)x_3 + \lambda x_4 = 3, \\ \lambda x_1 - x_2 + (2-\lambda)x_3 + \lambda x_4 = 2, \\ \lambda x_1 + \lambda x_2 + (2-\lambda)x_3 + \lambda x_4 = 2, \\ \lambda x_1 + \lambda x_2 + (2-\lambda)x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$

22.28. Проверить, что система

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 9x_4 + 6x_5 = 0, \\ 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 0, \\ 5x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 8x_4 + 6x_5 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 4x_5 = 0 \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений, причем в каждом ее решении $x_4 = x_5 = 0$. Объяснить эти факты в терминах линейной зависимости и линейной независимости столбцов матрицы системы.

22.29. Указать все группы неизвестных, которые могут быть объявлены свободными неизвестными системы

$$\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 5x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 7x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases}$$

22.30. Построить однородные системы уравнений, для которых следующие системы векторов являются фундаментальными системами решений:

а) $y_1 = (-2, 1, 1, 1)^T$, $y_2 = (0, 1, 2, 0)^T$, $y_3 = (1, -1, 0, 1)^T$;

б) $y_1 = (-2, 1, 1, 1)^T$, $y_2 = (0, 1, 2, 0)^T$;

в) $y_1 = (-2, 1, 1, 1)^T$.

22.31. Построить однородную систему линейных уравнений, состоящую: а) из двух уравнений; б) из трех уравнений; в) из четырех уравнений, – для которой система векторов

$$y_1 = (1, 4, -2, 2, -1)^T,$$
$$y_2 = (3, 13, -1, 2, 1)^T,$$
$$y_3 = (2, 7, -8, 4, -5)^T$$

является фундаментальной системой решений.

22.32. Построить неоднородные системы линейных уравнений, которые описывают линейные многообразия минимальной размерности, содержащие векторы:

а) $y_1 = (1, 1, 2, 1, 1)^T$;

б) $y_1 = (3, 0, 0, 2, 1)^T$, $y_2 = (0, 1, 1, 0, 0)^T$;

в) $y_1 = (1, -1, 2, 0, 3)^T$, $y_2 = (5, -3, 0, -2, 1)^T$, $y_3 = (-1, 0, 3, 1, 4)^T$;

г) $y_1 = (2, 1, 3, 0)^T$, $y_2 = (3, 1, 3, 0)^T$, $y_3 = (2, 2, 3, 0)^T$, $y_4 = (2, 1, 4, 0)^T$, $y_5 = (2, 1, 3, 1)^T$.

Выяснить, можно ли найти однородную систему уравнений, для которой указанные системы векторов являются двумя ее фундаментальными системами решений.

22.33. $y_1 = (1, 0, 0, 0)^T$, $y_2 = (1, 1, 0, 0)^T$, $y_3 = (1, 1, 1, 0)^T$ и $z_1 = (1, 0, 0, 0)^T$, $z_2 = (1, 1, 1, 0)^T$, $z_3 = (2, 1, 1, 0)^T$.

22.34. $y_1 = (1,0,0,0)^T, \quad z_1 = (0,0,0,1)^T,$
$y_2 = (1,1,0,0)^T, \quad$ и $\quad z_2 = (0,0,1,1)^T,$
$y_3 = (1,1,1,0)^T \quad z_3 = (0,1,1,1)^T.$

22.35. $y_1 = (1,0,0,0)^T, \quad z_1 = (0,0,1,0)^T,$
$y_2 = (0,1,0,0)^T, \quad$ и $\quad z_2 = (0,1,1,0)^T,$
$y_3 = (0,0,1,0)^T \quad z_3 = (1,1,1,0)^T.$

22.36. $y_1 = (2,3,1,2)^T, \quad z_1 = (1,0,2,-5)^T,$
$y_2 = (1,1,-2,-2)^T, \quad$ и $\quad z_2 = (0,1,8,7)^T,$
$y_3 = (3,4,2,1)^T \quad z_3 = (4,5,-2,0)^T.$

22.37. Пусть строки матрицы $A \in \mathbb{R}^{p\times n}$ $(p < n)$ образуют фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений ранга r с n неизвестными $(n = r + p)$. Доказать, что строки матрицы $B \in \mathbb{R}^{p\times n}$ образуют фундаментальную систему решений той же системы уравнений тогда и только тогда, когда существует невырожденная матрица C порядка p такая, что $B = CA$.

22.38. Доказать, что если ранг матрицы однородной системы линейных уравнений на единицу меньше числа неизвестных, то любые два решения этой системы пропорциональны, т.е. отличаются лишь числовым множителем.

22.39. Пользуясь предыдущей задачей, доказать, что если определитель квадратной матрицы A порядка $n > 1$ равен нулю, то алгебраические дополнения соответствующих элементов двух любых строк (столбцов) пропорциональны.

22.40. Пусть ранг квадратной матрицы A n-го порядка $(n > 1)$ равен $n - 1$. Пользуясь предыдущей задачей, доказать, что ранг ее присоединенной матрицы $\widehat{A}$ равен 1.

22.41. Доказать, что если в однородной системе линейных уравнений число уравнений на единицу меньше числа неизвестных, то в качестве решения этой системы можно взять набор миноров, полученных из основной матрицы поочередным вычеркиванием 1-го, 2-го и т.д. столбцов, причем эти миноры берутся с чередующимися знаками. Далее показать, что если это решение не нулевое, то любое решение системы ему пропорционально.

Пользуясь результатом предыдущей задачи, найти частное и общее решения систем уравнений.

22.42. $\begin{cases} 5x_1+3x_2+4x_3=0, \\ 6x_1+5x_2+6x_3=0. \end{cases}$ **22.43.** $\begin{cases} 4x_1-6x_2+\ 5x_3=0, \\ 6x_1-9x_2+10x_3=0. \end{cases}$

22.44. $\begin{cases} 2x_1+3x_2+5x_3+6x_4=0, \\ 3x_1+4x_2+6x_3+7x_4=0, \\ 3x_1+\ x_2+\ x_3+4x_4=0. \end{cases}$ **22.45.** $\begin{cases} 4x_1-5x_2-6x_3+3x_4=0, \\ 2x_1-\ x_2-3x_3+2x_4=0, \\ 6x_1-7x_2-9x_3+5x_4=0. \end{cases}$

22.46. При каких условиях в общем решении системы уравнений

$$\begin{cases} x_2 + ax_3 + bx_4 = 0, \\ -x_1 + cx_3 + dx_4 = 0, \\ ax_1 + cx_2 - ex_4 = 0, \\ bx_1 + dx_2 + ex_3 = 0 \end{cases}$$

за свободные неизвестные можно принять x_3 и x_4?

22.47. Известно, что для системы $Ax = b$ с матрицей A размера $m \times n$ любой вектор $x \in \mathbb{R}^n$ является решением. Что можно сказать о матрице A и векторе b в этом случае?

22.48. Пусть $AB = O$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times k}$. Доказать, что

$$\operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B \leq n.$$

22.49. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы в любом решении совместной системы линейных уравнений k-е неизвестное было равно нулю.

22.50. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

1. Доказать, что множество решений матричного уравнения

$$AX = O,$$

где $X \in \mathbb{R}^{n\times k}$, образует линейное подпространство пространства матриц $\mathbb{R}^{n\times k}$.

2. Найти размерность подпространства решений этого уравнения.

22.51. Пусть $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{k\times l}$.

1. Доказать, что множество решений матричного уравнения

$$AXB = O,$$

где $X \in \mathbb{R}^{n\times k}$, образует линейное подпространство пространства матриц $\mathbb{R}^{n\times k}$.

2. Пользуясь результатом задачи 20.15, найти размерность подпространства решений этого уравнения.

Глава VI. **Векторная алгебра**

В этой главе рассматриваются пространства V_1, V_2, V_3 векторов на прямой, на плоскости и в пространстве. Предполагаются известными следующие факты (гл.IV):

– $\dim V_1 = 1$ и любой ненулевой вектор $\mathbf{e}_1$ является базисом V_1,

– $\dim V_2 = 2$ и любая пара неколлинеарных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ является базисом V_2,

– $\dim V_3 = 3$ и любая тройка некомпланарных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ является базисом V_3,

– координаты вектора вычисляются согласно формулам (17.3), (17.4), (17.5).

§23. Аффинная система координат. Координаты точки

Пусть в пространстве V_3 (на плоскости V_2 или на прямой V_1) зафиксирована некоторая точка O, называемая *полюсом.* Для любой точки A вектор $\mathbf{r}_A = \overrightarrow{OA}$ называется *радиус-вектором точки A относительно полюса O.* Задание точки ее радиус-вектором определяет, очевидно, биективное отображение. Тот факт, что точка A имеет радиус-вектор $\mathbf{r}$, обозначают символом $A(\mathbf{r})$.

Если в пространстве V_3 зафиксированы точка O и базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, то говорят, что в пространстве задана *аффинная система координат* (или *общая декартова система координат*) $\{O;\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$. Точка O называется *началом координат*; оси, проходящие через начало координат и определенные векторами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, называются *осями координат* и обозначаются Ox (ось абсцисс), Oy (ось ординат), Oz (ось аппликат) соответственно. Плоскость, определяемая осями координат Ox и Oy (Ox и Oz, Oy и Oz), называется *координатной плоскостью* Oxy (Oxz, Oyz соответственно). В этой терминологии аффинная система координат обозначается также символом $Oxyz$.

Координатами точки A в аффинной системе координат $\{O;\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$ называются координаты радиус-вектора $\mathbf{r}_A$ этой точки в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Тот факт, что точка A имеет координаты x, y, z, обозначают символом $A(x, y, z)$. Итак,

$$\mathbf{r}_A = x\,\mathbf{e}_1 + y\,\mathbf{e}_2 + z\,\mathbf{e}_3 \iff A(x, y, z).$$

Таким образом, любая точка пространства в заданной системе координат имеет координаты, причем:

1) точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$ и $A_2(x_2, y_2, z_2)$ совпадают тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$;

2) если $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$ – точки пространства, заданные своими координатами в системе координат $\{O;\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$, то вектор $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ имеет координаты $\mathbf{a} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$;

3) если $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ и $(ABC) = \lambda$, то

$$x_3 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y_3 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z_3 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Базис $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, где $n = 1, 2, 3$, называется *ортонормированным*, если векторы базиса

1) имеют единичную длину

и, в случае $n > 1$,

2) попарно перпендикулярны.

Аффинная система координат $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, соответствующая ортонормированному базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, называется *прямоугольной декартовой* или просто *прямоугольной системой координат.*

Пусть на плоскости P даны две непараллельные прямые l и L. *Проекцией направленного отрезка* $\overrightarrow{AB}$ *на прямую* l *параллельно прямой* L называется направленный отрезок $\overrightarrow{A_1B_1}$, где A_1, B_1 – проекции точек A и B на прямую l параллельно прямой L. Обозначение: $\operatorname{pr}_l^L \overrightarrow{AB}$.

Теорема 23.1. *Проекции равных направленных отрезков равны.*

Проекцией вектора $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ *на прямую* l *параллельно прямой* L называется вектор, порожденный $\operatorname{pr}_l^L \overrightarrow{AB}$. Обозначение: $\operatorname{pr}_l^L \mathbf{a}$.

Теорема 23.2. *Проекция вектора на прямую* l *параллельно прямой* L *обладает свойством линейности:*

1) $\operatorname{pr}_l^L(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \operatorname{pr}_l^L \mathbf{a} + \operatorname{pr}_l^L \mathbf{b}, \quad \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}$,

2) $\operatorname{pr}_l^L(\alpha \mathbf{a}) = \alpha \cdot \operatorname{pr}_l^L \mathbf{a}, \quad \forall \mathbf{a}, \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Пусть в пространстве заданы плоскость π и непараллельная ей прямая l. *Проекцией направленного отрезка* $\overrightarrow{AB}$ *на прямую* l (*на плоскость* π) *параллельно плоскости* π (соответственно *прямой* l) называется направленный отрезок $\overrightarrow{A_1B_1}$ ($\overrightarrow{A_2B_2}$), где A_1 и B_1 (A_2 и B_2) – проекции точек A и B на прямую l (плоскость π) параллельно плоскости π (прямой l). Обозначение: $\operatorname{pr}_l^\pi \overrightarrow{AB}$, $\operatorname{pr}_\pi^l \overrightarrow{AB}$.

Для обеих проекций справедливо утверждение теоремы 23.1: *проекции равных направленных отрезков равны.*

Проекцией вектора $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ *на прямую* l (*плоскость* π) *параллельно плоскости* π (*прямой* l) называется вектор, порожденный $\operatorname{pr}_l^\pi \overrightarrow{AB}$ ($\operatorname{pr}_\pi^l \overrightarrow{AB}$). Обозначение: $\operatorname{pr}_l^\pi \mathbf{a}$, $\operatorname{pr}_\pi^l \mathbf{a}$. *Обе проекции вектора в пространстве обладают свойством линейности.*

Во всех трех случаях, если $l \perp L$ или $l \perp \pi$, проекции вектора называются *ортогональными проекциями.*

Формулы (17.5) для координат вектора $\mathbf{a} \in V_3$ в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ могут быть записаны в терминах проекций вектора на ось в виде

$$x = \frac{(\operatorname{pr}_x \mathbf{a})}{|\mathbf{e}_1|}, \qquad y = \frac{(\operatorname{pr}_y \mathbf{a})}{|\mathbf{e}_2|}, \qquad z = \frac{(\operatorname{pr}_z \mathbf{a})}{|\mathbf{e}_3|},$$

где $\operatorname{pr}_x \mathbf{a}$, $\operatorname{pr}_y \mathbf{a}$, $\operatorname{pr}_z \mathbf{a}$ – проекции вектора $\mathbf{a}$ на оси, определенные базисными векторами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ (т.е. на оси координат Ox, Oy, Oz), параллельно координатным плоскостям Oyz, Oxz, Oxy соответственно.

Теорема 23.3. *На плоскости (в пространстве) величина проекции вектора на ось параллельно прямой (соответственно прямой или плоскости) обладает свойством линейности.*

Если $\{O;\ \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и $\{O';\ \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ – две аффинные системы координат в пространстве ("старая" и "новая"), (α, β, γ) – координаты нового начала O' в старой системе координат, $C = (c_{ij})$ – матрица перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ (§17), (x, y, z) и (x', y', z') – координаты точки в старой и новой системах координат, то

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} + C \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{aligned} x &= \alpha + c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z', \\ y &= \beta + c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z', \\ z &= \gamma + c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z'. \end{aligned}$$

Эти соотношения называются *формулами преобразования координат.* Эти формулы выражают старые координаты точки через новые.

Ориентация в вещественном линейном пространстве. Два базиса $e = (e_1, \dots, e_n)$ и $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ вещественного линейного пространства V называются *одинаково ориентированными*, если матрица перехода C от базиса e к базису e' имеет положительный определитель, и *противоположно ориентированными* – в противном случае.

Из определения следует, что два базиса, получающиеся друг из друга

– перестановкой двух их векторов или

– умножением какого-либо вектора на отрицательное число,

противоположно ориентированы.

Теорема 23.4. *Отношение одинаковой ориентированности является отношением эквивалентности на множестве всех базисов пространства V.*

Множество всех базисов пространства разбивается отношением одинаковой ориентированности ровно на два непересекающихся класса (класса эквивалентности) так, что всякий базис принадлежит одному и только одному классу, два базиса одного класса одинаково ориентированы, а любые два базиса из разных классов противоположно ориентированы.

Один из классов называют классом *правых* (или *положительно ориентированных*) *базисов*, а другой – *левых* (*отрицательно ориентированных*). Каждый из этих двух классов называется *ориентацией пространства.* Вещественное линейное пространство с выбранной на нем ориентацией называется *ориентированным пространством.* Так как класс эквивалентности порождается любым своим представителем, то для того, чтобы ориентировать линейное пространство, достаточно задать один какой-нибудь базис пространства и объявить положительно ориентированными все одноименные с ним базисы.

Класс правых базисов на плоскости V_2 и в пространстве V_3 обычно выбирают следующим образом:

– упорядоченную пару неколлинеарных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ плоскости называют *правой* (*положительно ориентированной*), если кратчайший поворот от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$ выполняется против часовой стрелки, и *левой* (*отрицательно ориентированной*) – в противном случае (начала векторов считаются совмещенными);

– упорядоченную тройку некомпланарных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ пространства называют *правой* (*положительно ориентированной*), если из конца вектора $\mathbf{e}_3$ кратчайший поворот от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$ виден против часовой стрелки, и *левой* (*отрицательно ориентированной*) – в противном случае (начала векторов тройки считаются совмещенными).

Преобразование прямоугольной декартовой системы координат на плоскости. Если $\{O;\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2\}$ и $\{O';\ \mathbf{e}'_1,\ \mathbf{e}'_2\}$ – две прямоугольные декартовы системы координат на плоскости, то матрица перехода C от ортонормированного базиса $e = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ к ортонормированному базису $e' = (\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2)$ имеет вид

$$C = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix},$$

если базисы e и e' одинаково ориентированы, и

$$C = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix},$$

если базисы e и e' противоположно ориентированы. В первом случае новая система координат получается из старой переносом начала в точку $O'(\alpha, \beta)$ и поворотом на угол φ (φ – угол между $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}'_1$), во втором случае – переносом начала в точку $O'(\alpha, \beta)$, поворотом на угол φ с последующим отражением относительно $\mathbf{e}'_1$ (т.е. изменением направления $\mathbf{e}'_2$ на противоположное). При этом формулы преобразования координат имеют вид

$$\begin{cases} x = \alpha + x'\cos\varphi - y'\sin\varphi, \\ y = \beta + x'\sin\varphi + y'\cos\varphi \end{cases}$$

в первом случае и

$$\begin{cases} x = \alpha + x'\cos\varphi + y'\sin\varphi, \\ y = \beta + x'\sin\varphi - y'\cos\varphi \end{cases}$$

во втором.

Пример 23.1. Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, в которой треугольник ABC – основание, AA_1, BB_1, CC_1 – боковые ребра. Найти координаты точки A_1 в системе координат $\{B_1; \overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{CB_1}, \overrightarrow{BA_1}\}$.

Решение. Координаты точки A_1 в указанной системе координат совпадают с координатами вектора $\overrightarrow{B_1A_1}$ в базисе $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{CB_1}$, $\overrightarrow{BA_1}$. Найдем эти координаты. Имеем

$$\overrightarrow{B_1A_1} = \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BA_1}. \tag{23.1}$$

Для вектора $\overrightarrow{B_1B}$ имеют место следующие разложения:

$$\overrightarrow{B_1B} = \overrightarrow{B_1C} + \overrightarrow{CB},\ \overrightarrow{B_1B} = \overrightarrow{A_1A} = \overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{B_1B} = \overrightarrow{C_1C} = \overrightarrow{C_1A} + \overrightarrow{AC}.$$

Сложив эти равенства, получим

$$\overrightarrow{B_1B} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{C_1A} + \overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{B_1C}\right) = -\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC_1} + \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{CB_1}\right).$$

Отсюда и из (23.1) следует, что

$$\overrightarrow{B_1A_1} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC_1} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CB_1} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BA_1},$$

и, значит, $A_1\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. ∎

Пример 23.2. Дан вектор $\overrightarrow{OA} = \{x, y\}$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{OB}$, получающегося из вектора $\overrightarrow{OA}$ поворотом на угол φ. Система координат прямоугольная.

Решение. Пусть $\overrightarrow{OB} = \{x', y'\}$. Перейдем к новому базису $e = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, полученному из исходного поворотом на угол φ. Тогда новые координаты вектора $\overrightarrow{OB}$ будут совпадать с координатами $\{x, y\}$ вектора $\overrightarrow{OA}$ в старом базисе, поэтому

$$x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \quad y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi. \quad \blacksquare$$

ЗАДАЧИ

В задачах этого параграфа, если не оговорено противное, система координат считается аффинной.

Координаты точки

23.1. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Найти координаты всех его вершин в системе координат:

а) $\{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}\}$;

б) $\{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AK}\}$, где K – точка на диагонали AE такая, что $AK = AB$.

23.2. Даны две смежные вершины $A(-1, 3)$, $B(2, -1)$ параллелограмма $ABCD$. Найти две другие его вершины, если известно, что диагонали параллелограмма параллельны осям координат.

23.3. Относительно прямоугольной декартовой системы координат дана точка $M(x, y)$. Найти точку M_1, симметричную точке M:

а) относительно начала координат;

б) относительно оси абсцисс;

в) относительно оси ординат;

г) относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов;

д) относительно биссектрисы второго и четвертого координатных углов.

23.4. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(-2, 1)$, $B(1, 3)$, $C(4, 0)$. Найти его четвертую вершину D.

23.5. Даны три последовательные вершины трапеции $A(-1, -2)$, $B(1, 3)$, $C(9, 9)$. Найти четвертую вершину D этой трапеции, если ее основание AD в полтора раза длиннее основания BC.

23.6. Даны две точки $A(-3, 1)$ и $B(2, -3)$. На прямой AB найти точку M так, чтобы она была расположена по ту же сторону от точки A, что и точка B, и чтобы отрезок AM был втрое больше отрезка AB.

23.7. Относительно прямоугольной декартовой системы координат дана точка $M(x, y, z)$. Найти координаты точки M_1, симметричной точке M:

а) относительно начала координат;

б) относительно плоскости Oxy;

в) относительно оси Oz.

23.8. Относительно прямоугольной декартовой системы координат дана точка $M(x, y, z)$. Найти ее ортогональную проекцию M_0:

а) на ось Ox; б) на плоскость Oyz.

23.9. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Принимая за начало координат вершину A, а векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ – за базисные, найти координаты:

а) вершин C, B_1 и C_1;

б) точек K и L – середин ребер A_1B_1 и CC_1 соответственно;

в) точек M и N пересечения диагоналей граней $A_1B_1C_1D_1$ и ABB_1A_1 соответственно;

г) точки O пересечения диагоналей параллелепипеда.

23.10. Вершина O тетраэдра $OABC$ принята за начало координат, а векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ – за базисные. Найти в этой системе координаты точек пересечения медиан граней тетраэдра.

Деление отрезка в отношении

23.11. Найти координаты точки M, делящей отрезок M_1M_2, ограниченный точками $M_1(2, 3)$ и $M_2(-5, 1)$, в отношении:

1) $\lambda = 2$; 2) $\lambda = -\dfrac{1}{2}$; 3) $\lambda = -4$; 4) $\lambda = \dfrac{1}{3}$.

23.12. Найти координаты середины отрезка M_1M_2 в каждом из следующих случаев:

1) $M_1(2, 3)$, $M_2(-4, 7)$; 2) $M_1(-2, 4)$, $M_2(2, -4)$;

3) $M_1(0, 0)$, $M_2(1, 1)$.

23.13. Один из концов отрезка AB находится в точке $A(2,3)$, его серединой служит точка $M(1,-2)$. Найти другой конец отрезка.

23.14. Даны две точки $A(3,4)$ и $B(2,-1)$. Найти точки пересечения прямой AB с осями координат.

23.15. Найти точку пересечения медиан треугольника с вершинами $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$.

23.16. Даны середины сторон треугольника: $M_1(2,4)$, $M_2(-3,0)$, $M_3(2,1)$. Найти его вершины.

23.17. Даны две смежные вершины $A(-4,-7)$, $B(2,6)$ параллелограмма $ABCD$ и точка пересечения его диагоналей $M(3,1)$. Найти две другие вершины параллелограмма.

23.18. На осях Ox и Oy отложены соответственно отрезки $OA = 8$, $OB = 4$. Найти отношение, в котором отрезок AB делится основанием перпендикуляра, опущенного на прямую AB из начала координат. Система координат прямоугольная.

23.19. Даны две точки $A(-4,2)$, $B(8,-7)$. Найти точки C и D, делящие отрезок AB на три равные части.

23.20. Определить координаты концов A и B отрезка, который точками $C(2,2)$, $D(1,5)$ разделен на три равные части.

23.21. Дана точка $A(2,4)$. Найти точку B при условии, что точка C пересечения прямой AB с осью ординат делит отрезок AB в отношении $\frac{2}{3}$, а точка D пересечения прямой AB с осью абсцисс делит отрезок AB в отношении $-\frac{3}{4}$.

23.22. Даны две точки $A(9,-1)$ и $B(-2,6)$. В каком отношении делит отрезок AB точка C пересечения прямой AB с биссектрисой второго и четвертого координатных углов?

23.23. Найти точки A и B, зная, что точка $C(-5,4)$ делит отрезок AB в отношении $\frac{3}{4}$, а точка $D(6,-5)$ – в отношении $\frac{2}{3}$.

23.24. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки M и N так, что $(ABM) = \mu$, $(ACN) = \nu$. Точку пересечения отрезков BN и CM обозначим через O. Найти отношения (BNO) и (CMO).

23.25. Применяя результат предыдущей задачи при $\mu = \nu = 1$, доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке.

23.26. Вершина A параллелограмма $ABCD$ соединена с серединой M стороны BC, а вершина B – с точкой N, лежащей на стороне CD и отстоящей от точки D на расстоянии, равном

$\frac{1}{3}$ стороны CD. В каких отношениях делятся отрезки AM и BN точкой K их пересечения?

23.27. Найти центр круга, вписанного в треугольник с вершинами $A(9,2)$, $B(0,20)$, $C(-15,-10)$. Система координат прямоугольная.

23.28. Найти точку пересечения общих касательных двух окружностей, центры которых совпадают с точками $C_1(2,5)$ и $C_2(\frac{22}{3},\frac{31}{3})$, а радиусы соответственно равны 3 и 7. Система координат прямоугольная.

23.29. Найти координаты точки, делящей отрезок M_1M_2, ограниченный точками $M_1(-3,2,4)$ и $M_2(6,0,1)$, в отношении:

$$1)\ \lambda = 2;\quad 2)\ \lambda = -\frac{3}{4};\quad 3)\ \lambda = \frac{1}{4};\quad 4)\ \lambda = -3.$$

23.30. На прямой, проходящей через точки $M_1(1,2,4)$ и $M_2(-1,4,3)$, найти точку, лежащую в плоскости Oxz.

23.31. Отрезок AB разделен на пять равных частей; известны первая точка деления $C(3,-5,7)$ и последняя $F(-2,4,-8)$. Определить координаты концов отрезка и остальных точек деления.

23.32. Даны две вершины треугольника $A(-4,-1,2)$ и $B(3,5,-16)$. Найти третью вершину C, зная, что середина стороны AC лежит на оси Oy, а середина стороны BC – на плоскости Oxz.

23.33. Найти отношение, в котором каждая из координатных плоскостей делит отрезок AB, ограниченный точками $A(2,-1,7)$ и $B(4,5,-2)$.

23.34. Даны две прямые: одна из них проходит через точки $A(-3,5,15)$ и $B(0,0,7)$, а другая – через точки $C(2,-1,4)$ и $D(4,-3,0)$. Выяснить, пересекаются ли эти прямые, и если пересекаются, то найти точку их пересечения.

23.35. Даны две точки $A(8,-6,7)$ и $B(-20,15,10)$. Установить, пересекает ли прямая AB какую-нибудь из осей координат.

Преобразование координат

23.36. Найти новые координаты точек $A(2,3)$, $B(-5,4)$, $C(0,2)$ в системе, полученной переносом данной аффинной системы координат, если за новое начало координат принимается точка $O'(7,-1)$.

23.37. В аффинной системе координат задана точка $M(2,5)$.

После переноса она имеет координаты $(-4, 7)$. Найти старые координаты нового начала O' и новых базисных векторов $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$, а также новые координаты старого начала O и старых базисных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$.

23.38. Новая система координат получена поворотом некоторой прямоугольной декартовой системы координат на угол $\alpha = 60°$. Координаты точек $A(2\sqrt{3}, -4)$, $B(\sqrt{3}, 0)$ и $C(0, -2\sqrt{3})$ определены в новой системе. Вычислить координаты этих же точек в старой системе координат.

23.39. В некоторой прямоугольной декартовой системе координат даны точки $M(3, 1)$, $N(-1, 5)$ и $P(-3, -1)$. Найти их координаты в новой системе, полученной из исходной поворотом на угол $\alpha = -45°$.

23.40. Даны две прямоугольные системы координат. Начало новой системы находится в точке $O'(-4, 2)$; угол от положительного направления оси Ox до положительного направления оси $O'x'$ равен $\frac{2\pi}{3}$; системы одинаково ориентированы. Найти выражение старых координат произвольной точки плоскости через ее новые координаты.

23.41. Новая система координат получена из старой переносом начала в точку $O'(3, -4)$ и поворотом на угол α такой, что $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$. По отношению к исходной системе координат дана точка $A(6, -2)$. Найти ее координаты в новой системе. Системы координат прямоугольные.

23.42. На плоскости даны две прямоугольные системы координат $\{O;\, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ и $\{O';\, \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2'\}$. Вторая система координат получена из первой поворотом вокруг точки A на угол φ в направлении кратчайшего поворота от $\mathbf{e}_1$ к $\mathbf{e}_2$. Найти координаты (x, y) точки в первой системе координат, если известны ее координаты (x', y') во второй системе координат и, кроме того:

1) $A(1, 1)$, $\varphi = 45°$; 2) $A(2, 4)$, $\varphi = 180°$;
3) $A(3, 0)$, $\varphi = 60°$; 4) $A(-2, 2)$, $\varphi = 90°$.

23.43. Даны две точки $A(2, 1)$ и $B(5, 5)$. Найти конец вектора $\overrightarrow{AC}$, получающегося из вектора $\overrightarrow{AB}$ поворотом на угол $\frac{5\pi}{6}$. Система координат прямоугольная.

23.44. Даны две соседние вершины квадрата $A(-3, 2)$ и $B(2, 4)$. Найти две другие его вершины C и D. Система координат прямоугольная.

23.45. Основанием равнобедренного треугольника служит отрезок AC: $A(-4,2)$, $C(4,-4)$. Найти координаты вершины B этого треугольника, зная, что углы при его основании равны $\operatorname{arctg}\frac{5}{6}$. Система координат прямоугольная.

23.46. Найти величину ортогональной проекции вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось, направление которой определяется вектором $\overrightarrow{CD}$, если $A(-4,2), B(6,4), C(-6,-1), D(-1,-13)$. Система координат прямоугольная.

23.47. Даны две противоположные вершины квадрата $A(-3,2)$, $B(5,-4)$. Найти две другие его вершины C и D. Система координат прямоугольная.

23.48. Центр описанной около равностороннего треугольника ABC окружности находится в начале координат. Найти координаты вершин B и C, зная, что $A(2,4)$. Система координат прямоугольная.

23.49. В ромбе $ABCD$ с острым углом при вершине A, равным $60°$, известны координаты смежных вершин $A(-1,3)$ и $B(3,1)$. Найти координаты других вершин ромба. Система координат прямоугольная.

23.50. Определить координаты k-й вершины правильного n-угольника, если даны координаты первой вершины $A_1(x_1,y_1)$ и координаты центра $S(x_0,y_0)$. Система координат прямоугольная.

23.51. Найти формулы преобразования аффинной системы координат на плоскости в каждом из следующих случаев (координаты новых базисных векторов и нового начала координат заданы в старой системе):

1) $\mathbf{e}_1' = \{2,5\}$, $\mathbf{e}_2' = \{7,9\}$, $O'(3,1)$;
2) $\mathbf{e}_1' = \{5,0\}$, $\mathbf{e}_2' = \{0,4\}$, $O'(3,5)$;
3) $\mathbf{e}_1' = \{0,2\}$, $\mathbf{e}_2' = \{-7,0\}$, $O'(0,2)$;
4) $\mathbf{e}_1' = \{a,0\}$, $\mathbf{e}_2' = \{0,b\}$, $O'(0,0)$, где $ab \neq 0$;
5) $\mathbf{e}_1' = \{0,a\}$, $\mathbf{e}_2' = \{b,0\}$, $O'(0,0)$, где $ab \neq 0$.

23.52. По отношению к аффинной системе координат даны три точки $A(2,1)$, $B(3,0)$, $C(1,4)$. В новой системе координат те же точки имеют координаты $A(1,6)$, $B(1,9)$, $C(3,1)$. Найти формулы преобразования координат, а также старые координаты нового начала координат и новых базисных векторов и новые координаты старого начала координат и старых базисных векторов.

23.53. Известны координаты трех точек A, B, C относительно двух аффинных систем координат на плоскости. Доказать, что формулы преобразования координат будут в этом случае определены однозначно тогда и только тогда, когда данные точки A, B, C не лежат на одной прямой.

23.54. Даны две системы координат Oxy и $Ox'y'$. Координаты (x, y) произвольной точки относительно первой системы выражаются через ее координаты (x', y') относительно второй системы по следующим формулам:

$$x = 2x' - 5y' + 3, \quad y = -x' + 2y' - 2.$$

Найти координаты начала второй системы и ее базисных векторов относительно первой системы.

23.55. Координаты (x, y) каждой точки плоскости в первой системе координат выражаются через координаты (x', y') этой же точки во второй системе координат соотношениями

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + C \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, \ C \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Первая систем координат является прямоугольной декартовой. При каком необходимом и достаточном условии вторая система также является прямоугольной декартовой?

23.56. Даны две системы координат Oxy и $Ox'y'$. Относительно первой системы координат начало второй системы находится в точке $O'(-4, 2)$, ось $O'x'$ пересекает ось Ox в точке $A(2, 0)$, а ось $O'y'$ пересекает ось Oy в точке $B(0, 8)$. Принимая за базисные векторы второй системы векторы $\overrightarrow{O'A}$ и $\overrightarrow{O'B}$, выразить координаты произвольной точки плоскости относительно первой системы через ее координаты во второй системе.

23.57. Дан параллелограмм $OACB$. Рассмотрим две системы координат, принимая за начало обеих систем вершину параллелограмма O, за базисные векторы осей Ox и Oy первой системы соответственно векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$, а за базисные векторы осей Ox' и Oy' второй системы соответственно векторы $\overrightarrow{OK}$ и $\overrightarrow{OL}$ (K и L – середины сторон AC и BC). Найти координаты вершин параллелограмма во второй системе.

23.58. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Найти координаты (x, y) точки плоскости в системе координат $\{A; \overrightarrow{AB},$

$\overrightarrow{AF}\}$, если известны ее координаты (x', y') в системе координат $\{C; \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CE}\}$.

23.59. В трапеции $ABCD$ диагонали пересекаются в точке E, а длины оснований BC и AD относятся как $2:3$. Найти координаты (x, y) точки в системе координат $\{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\}$, если известны ее координаты (x', y') в системе координат $\{E; \overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB}\}$.

23.60. В трапеции $ABCD$ длины оснований BC и AD относятся как $3:4$, точка E является серединой основания AD, а продолжения боковых сторон пересекаются в точке F. Найти координаты (x, y) точки в системе координат $\{E; \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EC}\}$, если известны ее координаты (x', y') в системе координат $\{F; \overrightarrow{FB}, \overrightarrow{FC}\}$.

23.61. В прямоугольном треугольнике ABC, длины катетов которого равны $AB = 3$ и $BC = 4$, точка D является основанием высоты, проведенной из вершины прямого угла. Векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ имеют единичную длину, причем $\mathbf{e}_1$ сонаправлен с $\overrightarrow{BA}$, $\mathbf{e}_2$ сонаправлен с $\overrightarrow{BC}$, $\mathbf{e}'_1$ сонаправлен с $\overrightarrow{AC}$, $\mathbf{e}'_2$ сонаправлен с $\overrightarrow{DB}$. Найти координаты (x, y) точки плоскости в системе координат $\{B;\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2\}$, если известны ее координаты (x', y') в системе координат $\{D;\ \mathbf{e}'_1,\ \mathbf{e}'_2\}$.

23.62. Найти формулы преобразования аффинной системы координат в пространстве в каждом из следующих случаев (координаты новых базисных векторов и нового начала координат заданы в старой системе):

1) $\mathbf{e}'_1 = \{2, 4, 1\}$, $\mathbf{e}'_2 = \{0, 4, 4\}$, $\mathbf{e}'_3 = \{1, 1, 0\}$, $O'(2, 1, 3)$;

2) $\mathbf{e}'_1 = \{4, 2, 1\}$, $\mathbf{e}'_2 = \{5, 3, 2\}$, $\mathbf{e}'_3 = \{3, 2, 1\}$, $O'(1, 1, 2)$.

23.63. Даны две системы координат $Oxyz$ и $O'x'y'z'$. Координаты (x, y, z) произвольной точки относительно первой системы выражаются через ее координаты (x', y', z') относительно второй системы по следующим формулам:

$$\text{а) } x = x' + y' + z' - 1, \quad y = -x' + z' + 3, \quad z = -x' - y' - 2;$$

$$\text{б) } x = -2x' - y' - z' - 1, \quad y = -y' - z', \quad z = x' + 3y' + z' + 1.$$

В каждом из указанных случаев найти координаты начала второй системы и ее базисных векторов относительно первой системы.

23.64. По отношению к аффинной системе координат даны четыре точки $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$, $D(1, 1, 1)$. В новой системе координат те же точки имеют координаты $A(1, -1, 0)$,

$B(0,1,1)$, $C(1,0,1)$, $D(0,1,-1)$. Найти формулы преобразования координат, а также старые координаты нового начала координат и новых базисных векторов и новые координаты старого начала координат и старых базисных векторов.

23.65. Известны координаты четырех точек A, B, C, D относительно двух аффинных систем координат в пространстве. Доказать, что формулы преобразования координат будут в этом случае определены однозначно тогда и только тогда, когда данные точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости.

23.65.1. В прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ произведено "переименование" координатных осей.

а) Показать, что "переименование" $x' = y$, $y' = z$, $z' = x$ эквивалентно суперпозиции поворотов вокруг координатных осей.

б) Верно ли аналогичное утверждение для "переименования" $x' = z$, $y' = y$, $z' = x$?

23.66. Даны две системы координат $Oxyz$ и $Ox'y'z'$ с общим началом O и одинаковыми по длине базисными векторами по всем осям обеих систем. Первая система прямоугольная; ось Oz' второй системы совпадает с осью Oz первой, а оси Ox' и Oy' суть соответственно биссектрисы углов xOz и yOz. Найти формулы преобразования координат при переходе от первой системы ко второй.

23.67. В пространстве даны две прямоугольные системы координат $\{O;\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$ и $\{O;\ \mathbf{e}'_1,\ \mathbf{e}'_2,\ \mathbf{e}'_3\}$. Вторая система координат получена из первой в результате последовательного выполнения двух поворотов на угол $45°$: сначала вокруг оси Oz в направлении кратчайшего поворота от $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$, а затем вокруг новой оси абсцисс в направлении кратчайшего поворота от нового вектора $\mathbf{e}_2$ к вектору $\mathbf{e}_3$. Найти координаты (x, y, z) точки в первой системе координат, если известны ее координаты (x', y', z') во второй системе координат.

23.68. Найти формулы преобразования координат при переходе от одной прямоугольной системы координат $Oxyz$ к другой прямоугольной системе $O'x'y'z'$, если системы одинаково ориентированы, начало второй системы находится в точке $O'(1,2,3)$ и $(\widehat{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}'_1}) = \arccos\frac{1}{3}$, $(\widehat{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}'_2}) = \arccos(-\frac{2}{3})$, $(\widehat{\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}'_3}) < \frac{\pi}{2}$, $(\widehat{\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}'_1}) = \arccos(-\frac{2}{3})$, $(\widehat{\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}'_2}) > \frac{\pi}{2}$.

23.69. Даны две прямоугольные системы координат $Oxyz$ и $O'x'y'z'$. Начало второй системы находится в точке $O'(2,1,2)$; ось

$O'x'$ проходит через точку O, а ось $O'y'$ пересекает ось Oy в точке A. За положительное направление оси $O'x'$ принято направление вектора $\overrightarrow{O'O}$, за положительное направление оси $O'y'$ – направление вектора $\overrightarrow{O'A}$; положительное направление оси $O'z'$ выбрано так, чтобы системы были одинаково ориентированы. Выразить координаты (x, y, z) произвольной точки относительно первой системы через ее координаты (x', y', z') во второй.

23.70. В пространстве даны две прямоугольные системы координат $\{O;\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$ и $\{O';\ \mathbf{e}'_1,\ \mathbf{e}'_2,\ \mathbf{e}'_3\}$. Начало второй системы координат имеет в первой системе координаты $(-1, 3, 5)$. Вектор $\mathbf{e}'_1$ образует углы, равные $60°$, с векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ и острый угол с вектором $\mathbf{e}_3$. Вектор $\mathbf{e}'_2$ компланарен с векторами $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ и образует с вектором $\mathbf{e}_2$ острый угол. Системы координат одинаково ориентированы. Найти координаты (x, y, z) точки пространства в первой системе координат, если известны ее координаты (x', y', z') во второй системе.

23.71. В пространстве даны две прямоугольные системы координат $\{O;\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$ и $\{O';\ \mathbf{e}'_1,\ \mathbf{e}'_2,\ \mathbf{e}'_3\}$. Точки O и O' различны, а концы векторов $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}'_i$, отложенных соответственно из точек O и O', совпадают $(i = 1, 2, 3)$. Найти координаты (x, y, z) точки пространства в первой системе координат, если известны ее координаты (x', y', z') во второй системе.

23.72. Координаты (x, y, z) каждой точки пространства в первой системе координат выражаются через координаты (x', y', z') этой же точки во второй системе координат соотношениями

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} + C \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}, \ C \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Первая систем координат является прямоугольной декартовой. При каком необходимом и достаточном условии вторая система также является прямоугольной декартовой?

23.73. В основании призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит ромб с острым углом A, равным $60°$. Точка K лежит на продолжении ребра AB за точку B, причем угол ADK прямой. Найти координаты (x, y, z) точки пространства в системе координат $\{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA_1}\}$, если известны ее координаты (x', y', z') в системе координат $\{K; \overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KD}, \overrightarrow{KC_1}\}$.

23.74. В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка M – точка пересечения медиан грани $A_1B_1C_1$. Найти координаты (x, y, z) точки пространства в системе координат $\{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB_1}\}$, если известны ее координаты (x', y', z') в системе координат $\{A_1; \overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{A_1C}, \overrightarrow{A_1M}\}$.

23.75. В тетраэдре $ABCD$ точка M – точка пересечения медиан грани BCD. Найти координаты (x, y, z) точки пространства в системе координат $\{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\}$, если известны ее координаты (x', y', z') в системе координат $\{M; \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}\}$.

23.76. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ с вершиной S точка M является центром основания. Найти координаты (x, y, z) точки пространства в системе координат $\{A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AS}\}$, если известны ее координаты (x', y', z') в системе координат $\{S; \overrightarrow{SC}, \overrightarrow{SD}, \overrightarrow{SM}\}$.

23.77. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти координаты (x, y, z) точки пространства в системе координат $\{A; \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{AA_1}\}$, если известны ее координаты (x', y', z') в системе координат $\{D_1; \overrightarrow{D_1D}, \overrightarrow{D_1C_1}, \overrightarrow{D_1B}\}$.

§24. Скалярное произведение

Скалярным произведением $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ненулевых *векторов* $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}).$$

Если один из векторов $\mathbf{a}$ или $\mathbf{b}$ нулевой, то скалярное произведение этих векторов по определению считается равным нулю.

Из определения следует, что $|\mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})}$, $\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b})/(|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}|)$.

Величина $(\mathbf{a}, \mathbf{a})$ называется *скалярным квадратом* вектора $\mathbf{a}$ и обозначается $\mathbf{a}^2$. Очевидно, что $\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2$.

Обозначим через $\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{b}$ ортогональную проекцию вектора $\mathbf{b}$ на ось, определенную вектором $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$.

Теорема 24.1. *Если* $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, *то для любого вектора* $\mathbf{b}$

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}|\, (\mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{b}) = (\mathbf{a}, \mathrm{pr}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{b}).$$

Теорема 24.2. *Для любых векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *и числа* $\alpha \in \mathbb{R}$

1) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a})$;

2) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c})$;

3) $(\alpha\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{b})$;

4) $(\mathbf{a},\, \mathbf{a}) \geq 0$, *причем*

$(\mathbf{a},\, \mathbf{a}) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Из свойств 1–3 следует, что *скалярное произведение линейно и по второму множителю:*

$$(\mathbf{a},\, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a},\, \mathbf{b}) + (\mathbf{a},\, \mathbf{c}), \quad (\mathbf{a}, \alpha\, \mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a},\, \mathbf{b}).$$

Скалярное произведение векторов может быть вычислено по их координатам, если известна "таблица умножения" базисных векторов: если $\mathbf{a} = \sum\limits_{i=1}^{3} \alpha_i\, \mathbf{e}_i$, $\mathbf{b} = \sum\limits_{i=1}^{3} \beta_i\, \mathbf{e}_i$, то $(\mathbf{a},\, \mathbf{b}) = \sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{3} \alpha_i\beta_j(\mathbf{e}_i,\, \mathbf{e}_j)$.

Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называются *ортогональными*, если $(\mathbf{a},\, \mathbf{b}) = 0$. Из определения следует, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ортогональны тогда и только тогда, когда либо один из них нулевой, либо они перпендикулярны. В терминах ортогональности векторов ортонормированность базиса $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, где $n = 1, 2, 3$, означает, что

$$(\mathbf{e}_i,\, \mathbf{e}_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Матрица

$$G(\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2,\, \mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} (\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2) & (\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_3) \\ (\mathbf{e}_2,\, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_2,\, \mathbf{e}_2) & (\mathbf{e}_2,\, \mathbf{e}_3) \\ (\mathbf{e}_3,\, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_3,\, \mathbf{e}_2) & (\mathbf{e}_3,\, \mathbf{e}_3) \end{bmatrix}$$

называется *матрицей Грама* системы векторов $\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2,\, \mathbf{e}_3$, а ее элементы $g_{ij} = (\mathbf{e}_i,\, \mathbf{e}_j)$ – *метрическими коэффициентами.*

Теорема 24.3. *Координаты* $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ *вектора* $\mathbf{a}$ *в базисе* $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ *вычисляются по правилу*

$$\alpha_i = (\mathbf{a},\, \mathbf{e}_i), \quad i = \overline{1,3},$$

тогда и только тогда, когда этот базис ортонормированный.

Направляющими косинусами вектора (луча) называются косинусы углов, образованных этим вектором (соответственно лучом) с осями координат.

Если $\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2,\, \mathbf{e}_3$ – ортонормированный базис и $\mathbf{e}$ – единичный вектор, то

$$(\mathbf{e},\, \mathbf{e}_1) = \cos(\widehat{\mathbf{e},\, \mathbf{e}_1}),\ (\mathbf{e},\, \mathbf{e}_2) = \cos(\widehat{\mathbf{e},\, \mathbf{e}_2}),\ (\mathbf{e},\, \mathbf{e}_3) = \cos(\widehat{\mathbf{e},\, \mathbf{e}_3}),$$

и следовательно, в силу теоремы 24.3 направляющие косинусы вектора $\mathbf{e}$ являются его координатами в этом базисе.

Теорема 24.4. *Скалярное произведение векторов* $\mathbf{a} = \alpha_1\, \mathbf{e}_1 + \alpha_2\, \mathbf{e}_2 + \alpha_3\, \mathbf{e}_3$ *и* $\mathbf{b} = \beta_1\, \mathbf{e}_1 + \beta_2\, \mathbf{e}_2 + \beta_3\, \mathbf{e}_3$ *равно сумме попарных произведений координат*

$$(\mathbf{a},\, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i\beta_i$$

тогда и только тогда, когда $\mathbf{e}_1,\, \mathbf{e}_2,\, \mathbf{e}_3$ *– ортонормированный базис.*

Следствие 1. Если векторы $\mathbf{a} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, $\mathbf{b} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ *заданы координатами в ортонормированном базисе, то*

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2};\ \cos(\widehat{\mathbf{a},\, \mathbf{b}}) = \frac{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}.$$

Следствие 2. В прямоугольной декартовой системе координат расстояние $\rho(A, B)$ *между точками* $A(x_1, y_1, z_1)$ *и* $B(x_2, y_2, z_2)$ *равно*

$$\rho(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Пример 24.1. Пусть A, B, C и D – произвольные точки плоскости или пространства.

а) Доказать, что

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD}) = 0. \tag{24.1}$$

б) Используя тождество (24.1), показать, что в любом треугольнике высоты пересекаются в одной точке.

Решение. а) Выразим все участвующие в левой части (24.1) векторы через векторы $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{CD}$ и воспользуемся линейностью скалярного произведения по обоим его сомножителям:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) + (-\mathbf{a} - \mathbf{b}, \mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{a}) + |\mathbf{b}|^2 + \\ +(\mathbf{b}, \mathbf{c}) - (\mathbf{a}, \mathbf{b}) - |\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{c}) - (\mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0.$$

б) Пусть теперь точка D – точка пересечения высот, проведенных из вершин A и C треугольника ABC. Тогда первые два слагаемых в левой части (24.1) равны нулю как скалярные произведения ортогональных векторов, и значит, $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD}) = 0$. Таким образом, прямая (BD) содержит высоту треугольника, проведенную из вершины B. ■

Пример 24.2. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 2, точка K – центр грани ABB_1A_1. Найти длину перпендикуляра, опущенного из вершины C_1 на прямую DK.

Решение. Единичные векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ на ребрах $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{BC}$ образуют ортонормированный базис пространства. Пусть точка P – основание перпендикуляра, опущенного из точки C_1 на прямую DK, а точка M – основание перпендикуляра, опущенного из точки K на AB. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{PC_1}$ в базисе $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Имеем: $\overrightarrow{DK} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MK} = -2\mathbf{c} - \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\overrightarrow{DP} = \alpha\overrightarrow{DK} = -\alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b} - 2\alpha\mathbf{c}$, $\overrightarrow{PC_1} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DC_1} = (\alpha\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b} + 2\alpha\mathbf{c}) + (-2\mathbf{a} + 2\mathbf{b}) = (\alpha - 2)\mathbf{a} + (2 - \alpha)\mathbf{b} + 2\alpha\mathbf{c}$. Из ортогональности векторов $\overrightarrow{PC_1}$ и $\overrightarrow{DP}$ следует, что $(\overrightarrow{PC_1}, \overrightarrow{DP}) = 0$. С учетом ортонормированности базиса $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ получаем, что $-\alpha(\alpha - 2) + \alpha(2 - \alpha) - 4\alpha^2 = 0$, откуда находим $\alpha = \frac{2}{3}$. Следовательно, $\overrightarrow{PC_1} = -\frac{4}{3}\mathbf{a} + \frac{4}{3}\mathbf{b} + \frac{4}{3}\mathbf{c}$ и $|\overrightarrow{PC_1}| = \frac{4}{3}\sqrt{3}$.

В §25 (пример 25.1) дано другое решение этой задачи. ■

Пример 24.3. Найти вектор $\mathbf{x}$, перпендикулярный вектору $\mathbf{a} = \{2, -3, 3\}$ и образующий с вектором $\mathbf{b} = \{-1, 1, 0\}$ угол $\pi/4$, если известно, что с осью Oy он образует острый угол, а его длина равна длине вектора $\mathbf{b}$. Система координат прямоугольная.

Решение. По условию задачи

$$\begin{cases} (\mathbf{x}, \mathbf{a}) = 0, \\ (\mathbf{x}, \mathbf{b}) = |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{b}|/\sqrt{2}, \\ |\mathbf{x}| = |\mathbf{b}|, \\ (\mathbf{x}, \mathbf{e}_2) > 0. \end{cases} \tag{24.2}$$

Пусть $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$. Так как $|\mathbf{b}| = \sqrt{2}$, то равенства (24.2) в координатной форме имеют вид

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0, \\ -x_1 + x_2 = 1, \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 2, \\ x_2 > 0. \end{cases} \tag{24.3}$$

Из первых двух уравнений следует, что

$$x_1 = 3 - 3x_2, \quad x_2 = 3x_3 - 2, \quad x_3 \in \mathbb{R}.$$

Подставляя эти соотношения в третье уравнение (24.3), получим: $x_3 = 1$ или $x_3 = \frac{11}{19}$, и следовательно,

$$\mathbf{x} = \{0, 1, 1\} \quad \text{или} \quad \mathbf{x} = \left\{\frac{24}{19}, -\frac{5}{19}, \frac{11}{19}\right\}.$$

Последнему условию в (24.3) удовлетворяет лишь первый вектор. Таким образом, $\mathbf{x} = \{0, 1, 1\}$. ∎

П р и м е р 24.4. Векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ таковы, что $|\mathbf{a}| = 1$, $|\mathbf{b}| = |\mathbf{c}| = 2$, причем векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ перпендикулярны, а вектор $\mathbf{c}$ образует с каждым из векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ угол $\pi/3$. Найти угол между наибольшей и наименьшей внутренними диагоналями параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Р е ш е н и е. Из правила сложения векторов следует, что диагонали параллелепипеда совпадают с векторами $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $-\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$. Возьмем в качестве базисных векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Матрица Грама этих векторов имеет вид: $G(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$. Пользуясь этой "таблицей" скалярных произведений, найдем квадраты длин диагоналей:

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}|^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2 + 2(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \\ + 2(\mathbf{b}, \mathbf{c}) + 2(\mathbf{a}, \mathbf{c}) = 15.$$

Аналогично:

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}|^2 = 3, \quad |\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}|^2 = 7, \quad |-\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}|^2 = 11.$$

Таким образом, наибольшей является диагональ $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, а наименьшей – диагональ $\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$.

Для вычисления угла между ними, найдем скалярное произведение:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}) = |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 - |\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{c}|^2 = 1.$$

Тем самым, косинус угла между этими диагоналями равен

$$\frac{(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c})}{|\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}||\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}|} = \frac{1}{3\sqrt{5}}. \quad ∎$$

П р и м е р 24.5. В параллелограмме $ABCD$: $AB = 3$, $BC = 4$, $\widehat{BAC} = 60°$, точка M – середина стороны BC, точка N делит отрезок DC в отношении 2. Найти тупой угол между прямыми AM и BN.

Решение. Введем базисные векторы $\mathbf{a} = \overrightarrow{CM}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{CN}$. Матрица Грама этой системы векторов имеет вид: $G(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BN}$ в базисе $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$: $\overrightarrow{AM} = -\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$, $\overrightarrow{BN} = -2\mathbf{a} + \mathbf{b}$, так что $\overrightarrow{AM} = \{-1, -3\}$, $\overrightarrow{BN} = \{-2, 1\}$. Пользуясь "таблицей" $G(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ скалярных произведений базисных векторов, получаем, что $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}) = 2 \cdot 4 + 6 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 10$, $|\overrightarrow{AM}|^2 = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 1 + 9 \cdot 1 = 19$, $|\overrightarrow{BN}|^2 = 4 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 13$. Отсюда следует, что $\cos(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BN}}) = \dfrac{10}{\sqrt{247}}$. Таким образом, тупой угол между прямыми AM и BN равен $\pi - \arccos\dfrac{10}{\sqrt{247}}$. ∎

Пример 24.6. Найти ортогональную проекцию вектора $\mathbf{a} = \{4, 0, 1\}$ на ось, определяемую вектором $\mathbf{b} = \{-2, 1, 2\}$. Система координат прямоугольная.

Решение. Найдем сначала величину ортогональной проекции вектора $\mathbf{a}$ на указанную ось. Согласно теореме 24.1, она равна

$$(\mathrm{pr}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a}) = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{b}|} = -2.$$

Сама же ортогональная проекция равна произведению своей величины на единичный вектор, сонаправленный с вектором $\mathbf{b}$:

$$\mathrm{pr}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a} = (\mathrm{pr}_{\mathbf{b}}\,\mathbf{a})\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \left\{\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right\}. \quad ∎$$

Пример 24.7. Даны два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Найти ортогональную проекцию вектора $\mathbf{b}$ на ось, определяемую вектором $\mathbf{a}$.

Решение. Отложим векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ от точки O, пусть $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, точка C – основание перпендикуляра, опущенного из точки B на прямую OA. Тогда $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CB}$ или $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{a} + \overrightarrow{CB}$, где $\overrightarrow{OC} = \alpha\mathbf{a}$ – искомый вектор. Умножив обе части этого равенства скалярно на вектор $\mathbf{a}$, найдем α: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a}, \mathbf{a})$ или $\alpha = (\mathbf{a}, \mathbf{b})/|\mathbf{a}|^2$. Следовательно,

$$\overrightarrow{OC} = \frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}. \quad ∎$$

ЗАДАЧИ

В задачах этого параграфа считается, что координаты векторов заданы в прямоугольной декартовой системе координат. Случай произвольной аффинной системы координат оговаривается особо.

24.1. Является ли скалярное произведение алгебраической операцией на множестве V_3 геометрических векторов пространства?

24.2. Является ли бинарное отношение $\mathcal{R}$ отношением эквивалентности на множестве V_3 геометрических векторов пространства, если:

а) $\mathbf{x}\mathcal{R}\,\mathbf{y} \iff (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$;

б) $\mathbf{x}\mathcal{R}\,\mathbf{y} \iff (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$;

в) $\mathbf{x}\mathcal{R}\,\mathbf{y} \iff |\mathbf{x}| = |\mathbf{y}|$;

г) $\mathbf{x}\mathcal{R}\,\mathbf{y} \iff (\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{a}) = 0$, где $\mathbf{a} \in V_3$ – заданный вектор?

24.3. Задает ли скалярное произведение биективное отображение $V_3 \times V_3$ в $\mathbb{R}$? $V_2 \times V_2$ в $\mathbb{R}$?

24.4. Найти скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в каждом из нижеследующих случаев:

а) $|\mathbf{a}| = 8$, $|\mathbf{b}| = 5$, $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = 60°$;

б) $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1$, $(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = 135°$;

в) $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$;

г) $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 6$, $\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$;

д) $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 1$, $\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}$.

24.5. Доказать тождество

$$|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 + |\mathbf{a} - \mathbf{b}|^2 = 2\left(|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2\right)$$

и дать его геометрическое толкование.

24.6. Даны единичные векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, удовлетворяющие условию $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$. Вычислить $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\mathbf{c}, \mathbf{a})$.

24.7. Даны векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, удовлетворяющие условию $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$. Зная, что $|\mathbf{a}| = 3$, $|\mathbf{b}| = 1$, $|\mathbf{c}| = 4$, вычислить $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c}) + (\mathbf{c}, \mathbf{a})$.

24.8. Доказать, что векторы $\mathbf{p} = (\mathbf{b}, \mathbf{c})\,\mathbf{a} - (\mathbf{a}, \mathbf{c})\,\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ ортогональны.

24.9. Какой угол образуют единичные векторы $\mathbf{s}$ и $\mathbf{t}$, если известно, что векторы $\mathbf{p} = \mathbf{s} + 2\,\mathbf{t}$ и $\mathbf{q} = 5\,\mathbf{s} - 4\,\mathbf{t}$ взаимно перпендикулярны?

24.10. Доказать, что из пяти векторов всегда можно выбрать два так, чтобы длина их суммы на превосходила длины суммы оставшихся трех векторов.

24.11. В треугольнике ABC известны длины сторон $BC = 5$, $CA = 6$, $AB = 7$. Найти скалярное произведение $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.

24.12. Найти тупой угол α между медианами равнобедренного прямоугольного треугольника, проведенными из вершин острых углов.

24.13. Найти угол α при вершине равнобедренного треугольника, зная, что медианы, проведенные из концов основания этого треугольника, взаимно перпендикулярны.

24.13.1. Пусть A, B, C и D – произвольные точки плоскости или пространства.

а) Доказать, что

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD}) = 0.$$

б) Используя это тождество, показать, что в любом треугольнике высоты пересекаются в одной точке.

24.14. Найти длину диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $2\mathbf{p} + \mathbf{q}$ и $\mathbf{p} - 2\mathbf{q}$, если $|\mathbf{p}| = \sqrt{2}$, $|\mathbf{q}| = 2$, $(\widehat{\mathbf{p}, \mathbf{q}}) = \pi/4$.

24.15. Найти угол между внутренними диагоналями куба.

24.16. Найти углы между внутренними диагоналями прямоугольного параллелепипеда, если из трех его ребер, выходящих из одной вершины, два ребра одинаковы по длине, а третье вдвое длиннее остальных.

24.17. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 2, точка K – центр грани ABB_1A_1. Найти угол между $\overrightarrow{DK}$ и $\overrightarrow{BD_1}$.

24.18. Высота в правильном прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ в два раза меньше стороны основания. Найти наибольшее значение угла A_1MC_1, где M – точка на ребре AB.

24.19. Найти угол между скрещивающимися медианами двух боковых граней правильного тетраэдра.

24.20. Доказать, что если биссектрисы двух плоских углов трехгранного угла перпендикулярны, то биссектриса третьего плоского угла перпендикулярна каждой из них.

24.21. Доказать, что если в тетраэдре два ребра соответственно перпендикулярны своим противоположным, то и остальные два ребра взаимно перпендикулярны.

24.22. Доказать, что в тетраэдре все грани являются равными треугольниками тогда и только тогда, когда отрезки, соединяющие середины противоположных ребер, перпендикулярны.

24.23. Доказать, что сумма квадратов длин ребер тетраэдра в четыре раза больше, чем сумма квадратов расстояний между серединами его скрещивающихся ребер.

24.24. Доказать, что в параллелепипеде все внутренние диагонали одинаковы тогда и только тогда, когда этот параллелепипед прямоугольный.

24.25. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Найти длину наименьшего отрезка, концы которого расположены на прямых AB_1 и BC_1 и который образует угол $60°$ с плоскостью грани $ABCD$.

24.26. В треугольнике ABC точка D делит сторону AB в отношении λ. Выразить длину отрезка CD через длины $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ трех сторон треугольника и число λ.

24.27. В прямоугольном треугольнике ABC опущен перпендикуляр CH на гипотенузу AB. Выразить вектор $\overrightarrow{CH}$ через векторы $\mathbf{a} = \overrightarrow{CB}$ и $\mathbf{b} = \overrightarrow{CA}$.

24.28. В треугольнике ABC проведена высота AH. Выразить вектор $\overrightarrow{AH}$ через векторы $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$ и $\mathbf{c} = \overrightarrow{AC}$.

24.29. Зная векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, на которых построен параллелограмм, выразить через них вектор, совпадающий с высотой параллелограмма, перпендикулярной к стороне $\mathbf{a}$.

24.30. В тетраэдре $OABC$ из вершины O опущена высота OH на противоположную грань. Выразить вектор $\overrightarrow{OH}$ через векторы $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$ и $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$.

24.31. Дан прямоугольник $ABCD$ и точка M (которая может лежать как в плоскости прямоугольника, так и вне ее). Показать, что:

а) скалярное произведение векторов, идущих от точки M к двум несмежным вершинам прямоугольника, равно скалярному произведению векторов, идущих от той же точки к двум другим вершинам:

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}) = (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MD});$$

б) сумма квадратов длин векторов одной пары равна сумме квадратов длин векторов другой пары: $|\overrightarrow{MA}|^2 + |\overrightarrow{MC}|^2 = |\overrightarrow{MB}|^2 + |\overrightarrow{MD}|^2$.

24.32. Дан параллелограмм $ABCD$. Доказать, что величина $AX^2 + CX^2 - BX^2 - DX^2$ не зависит от выбора точки X.

24.33. Пусть O – центр окружности, описанной около треугольника ABC, а точка H обладает тем свойством, что $\overrightarrow{OH} =$

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Доказать, что H – точка пересечения высот треугольника ABC.

24.34. Доказать, что сумма квадратов расстояний от точки X до вершин заданного треугольника минимальна тогда и только тогда, когда точка X совпадает с точкой пересечения медиан в треугольнике.

24.34.1. Доказать, что сумма квадратов расстояний от точки X до вершин заданного тетраэдра минимальна тогда и только тогда, когда точка X совпадает с точкой пересечения середин его противоположных ребер.

24.34.2. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ – произвольное множество точек пространства. Доказать, что существует и притом только одна такая точка X, для которой выражение $|XA_1|^2 + \ldots + |XA_n|^2$ достигает своего минимального значения.

24.35. В выпуклом четырехугольнике сумма квадратов двух противоположных сторон равна сумме квадратов двух других противоположных сторон. Найти угол между диагоналями четырехугольника.

24.36. Доказать, что в произвольном четырехугольнике $ABCD$ выполнено равенство

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2,$$

где M и N – середины диагоналей AC и BD соответственно (*теорема Эйлера*).

24.37. Точки A, B, C и D таковы, что для любой точки M числа $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ и $(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD})$ различны. Доказать, что $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$.

24.38. Пусть R – радиус окружности, описанной около правильного n-угольника. Найти:

а) сумму квадратов длин всех сторон и всех диагоналей этого многоугольника, выходящих из одной его вершины;

б) сумму квадратов длин всех сторон и всех диагоналей этого многоугольника.

24.39. Правильный многоугольник $A_1 \ldots A_n$ вписан в окружность радиуса R с центром O; X – произвольная точка. Доказать, что $A_1X^2 + \ldots + A_nX^2 = n(R^2 + OX^2)$.

24.40. Точки $A_1, \ldots, A_n$ лежат на окружности с центром O, причем $\overrightarrow{OA_1} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} = \mathbf{0}$. Доказать, что для любой точки X справедливо неравенство $XA_1 + \ldots + XA_n \geq nR$, где R – радиус окружности.

24.41. Доказать, что сумма расстояний от произвольной точки X до вершин правильного n-угольника будет минимальной тогда и только тогда, когда X – центр n-угольника.

24.42. Вычислить скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, заданных своими координатами, в каждом из нижеследующих случаев:

а) $\mathbf{a} = \{3, 5, 7\}$, $\mathbf{b} = \{-2, 6, 1\}$; б) $\mathbf{a} = \{3, 0, -6\}$, $\mathbf{b} = \{2, -4, 0\}$; в) $\mathbf{a} = \{2, 5, 1\}$, $\mathbf{b} = \{3, -2, 4\}$; г) $\mathbf{a} = \{9, 8, 5\}$, $\mathbf{b} = \{-9, 8, 3\}$.

24.43. Определить угол α между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, заданными своими координатами, в каждом из нижеследующих случаев:

а) $\mathbf{a} = \{8, 4, 1\}$, $\mathbf{b} = \{2, -2, 1\}$; б) $\mathbf{a} = \{1, 1, 1\}$, $\mathbf{b} = \{3, 3, -3\}$; в) $\mathbf{a} = \{2, 5, 4\}$, $\mathbf{b} = \{6, 0, -3\}$; г) $\mathbf{a} = \{1, 0, 1\}$, $\mathbf{b} = \{2, -2, 0\}$.

24.44. Даны векторы: $\mathbf{a} = \{2, -2, 1\}$, $\mathbf{b} = \{1, 1, -1\}$, $\mathbf{c} = \{-1, 1, 2\}$. Вычислить:

а) $2\,\mathbf{a}^2 + 6(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - 2\,\mathbf{c}^2$; б) $2\,\mathbf{a}^2 - 3\,\mathbf{b}^2 + 3\,\mathbf{c}^2$;
в) $4(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - 3(\mathbf{b}, \mathbf{c}) - 5(\mathbf{a}, \mathbf{c})$; г) $\mathbf{a}^2(\mathbf{b}, \mathbf{c}) + \mathbf{b}^2(\mathbf{c}, \mathbf{a}) + \mathbf{c}^2(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

24.45. Даны векторы: $\mathbf{a} = \{3, 1, 2\}$, $\mathbf{b} = \{2, 1, -2\}$, $\mathbf{c} = \{2, 1, 2\}$. Найти координаты векторов:

а) $(\mathbf{a}, \mathbf{b})\,\mathbf{c} - \mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{c})$; б) $\mathbf{a}^2\,\mathbf{b} + \mathbf{b}^2\,\mathbf{c} + \mathbf{c}^2\,\mathbf{a}$;
в) $(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2\,\mathbf{c} + (\mathbf{b} - \mathbf{c})^2\,\mathbf{a} + (\mathbf{a} - \mathbf{c})^2\,\mathbf{b}$.

24.46. Найти направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(-2, 1, 3)$ и $B(0, -1, 2)$.

24.47. Луч образует с двумя осями координат углы в $60°$. Под каким углом он наклонен к третьей оси?

24.48. Найти углы, образуемые вектором $\overrightarrow{OB} = \{6, 2, 9\}$ с плоскостями координат Oyz, Ozx, Oxy.

24.49. Найти угол между биссектрисами координатных углов xOz и yOz.

24.50. Найти угол между лучом, лежащим в плоскости Oxy и образующим с осью Ox угол $30°$, и лучом, лежащим в плоскости Oxz и образующим с осью Ox угол $60°$.

24.51. Треугольник ABC задан своими вершинами $A(3, 2, -3)$, $B(5, 1, -1)$, $C(1, -2, 1)$. Определить его внешний угол при вершине A.

24.52. Найти внутренние углы треугольника ABC, если $A(9, 2, 4)$, $B(2, 3, -1)$, $C(5, -1, -6)$.

24.53. Вычислить длину d диагонали OD параллелепипеда, зная длины $a = OA$, $b = OB$, $c = OC$ трех его ребер, выходящих из одной вершины O, и углы $\alpha = \widehat{BOC}$, $\beta = \widehat{COA}$, $\gamma = \widehat{AOB}$ между ними. Найти также косинусы углов, образуемых диагональю OD с ребрами OA, OB, OC.

24.54. Одна из вершин параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ находится в точке $A(1,2,3)$, а концы выходящих из нее ребер – в точках $B(9,6,4)$, $D(3,0,4)$, $A_1(5,2,6)$. Найти длину d диагонали AC_1 этого параллелепипеда и угол, образуемый этой диагональю с ребром AB.

24.55. Вычислить углы φ_1, φ_2, φ_3, образованные противоположными ребрами тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(3,-1,0)$, $B(0,-7,3)$, $C(-2,1,-1)$, $D(3,2,6)$.

24.56. Найти вектор $\mathbf{x}$, коллинеарный вектору $\mathbf{a} = \{12,-16,-15\}$, если известно, что $|\mathbf{x}| = 50$ и вектор $\mathbf{x}$ образует с осью Oz острый угол.

24.57. Найти вектор $\mathbf{x}$, перпендикулярный векторам $\mathbf{a} = \{2,3,-1\}$ и $\mathbf{b} = \{1,-2,3\}$, зная, что он образует с осью Oy тупой угол и что $|\mathbf{x}| = 3\sqrt{3}$.

24.58. Даны два вектора $\mathbf{a} = \{8,4,1\}$ и $\mathbf{b} = \{2,-2,1\}$. Найти вектор $\mathbf{c}$, компланарный векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, перпендикулярный вектору $\mathbf{a}$, равный ему по длине и образующий с вектором $\mathbf{b}$ тупой угол.

24.59. Даны два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Представить вектор $\mathbf{b}$ в виде суммы двух векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ так, чтобы вектор $\mathbf{x}$ был коллинеарен вектору $\mathbf{a}$, а вектор $\mathbf{y}$ ортогонален вектору $\mathbf{a}$.

24.60. Даны два неколлинеарных вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Найти вектор $\mathbf{x}$, компланарный векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и удовлетворяющий системе уравнений $(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = 1$, $(\mathbf{b}, \mathbf{x}) = 0$.

24.61. Даны три некомпланарных вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Найти вектор $\mathbf{x}$, удовлетворяющий системе уравнений $(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = 1$, $(\mathbf{b}, \mathbf{x}) = 0$, $(\mathbf{c}, \mathbf{x}) = 0$.

24.62. Даны векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{n}$. Найти ортогональную проекцию вектора $\mathbf{a}$ на плоскость, перпендикулярную вектору $\mathbf{n}$.

24.63. Найти ортогональную проекцию вектора $\{-14,2,5\}$ на ось, определяемую вектором $\{2,-2,1\}$.

24.64. Найти величину ортогональной проекции вектора $\{5,2,5\}$ на ось, определенную вектором $\{2,-1,2\}$.

24.65. Найти величину ортогональной проекции вектора $\mathbf{a} = \{4,-3,2\}$ на ось, составляющую с координатными осями равные острые углы.

24.66. Найти ортогональную проекцию вектора $\{8, 4, 1\}$ на плоскость, перпендикулярную вектору $\{2, -2, 1\}$.

24.67. Даны векторы $\mathbf{a} = \{8, 4, 1\}$, $\mathbf{b} = \{2, -2, 1\}$, $\mathbf{c} = \{1, 1, 9\}$. Найти ортогональную проекцию вектора $\mathbf{c}$ на плоскость, параллельную векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

24.68. Найти сумму векторов, являющихся ортогональными проекциями вектора $\mathbf{a}$ на стороны равностороннего треугольника ABC.

24.69. Известны величины ортогональных проекций векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ на ось, определенную вектором $\mathbf{e}$: $(\mathrm{pr}_{\mathbf{e}}\, \mathbf{a}) = 5$, $(\mathrm{pr}_{\mathbf{e}}\, \mathbf{b}) = -3$, $(\mathrm{pr}_{\mathbf{e}}\, \mathbf{c}) = -8$, $(\mathrm{pr}_{\mathbf{e}}\, \mathbf{d}) = 6$. Образуют ли векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ замкнутую ломаную?

24.70. Десять векторов таковы, что длина суммы любых девяти из них меньше длины суммы всех десяти векторов. Доказать, что существует ось, величина проекции на которую каждого из десяти векторов положительна.

24.71. Векторы $\mathbf{a} = \{0, 1, 2\}$, $\mathbf{b} = \{1, 0, 1\}$, $\mathbf{c} = \{2, 1, 0\}$ являются ребрами параллелепипеда, выходящими из одной вершины. Найти ортогональную проекцию меньшей внутренней диагонали параллелепипеда на грань, параллельную векторам $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

Скалярное произведение в аффинных координатах

24.72. Выразить через метрические коэффициенты g_{11}, g_{12}, g_{22} базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ на плоскости:

а) длины базисных векторов;

б) угол ω между базисными векторами;

в) площадь параллелограмма, построенного на базисных векторах.

24.73. Зная матрицу Грама $G = (g_{ij})$ базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ на плоскости, найти:

а) скалярное произведение векторов $\mathbf{a} = \{a_1, a_2\}$ и $\mathbf{b} = \{b_1, b_2\}$;

б) длину вектора $\mathbf{a} = \{a_1, a_2\}$ и его направляющие косинусы;

в) угол между векторами $\mathbf{a} = \{a_1, a_2\}$ и $\mathbf{b} = \{b_1, b_2\}$.

24.74. В аффинной системе координат дан вектор $\mathbf{a} = \{7, -8\}$. Найти вектор $\mathbf{b}$ единичной длины, перпендикулярный вектору $\mathbf{a}$ и направленный так, что пара векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ имеет положительную ориентацию, при этом $g_{11} = 4$, $g_{12} = 8$, $g_{22} = 25$.

24.75. Зная длины базисных векторов $|\mathbf{e}_1| = 2$, $|\mathbf{e}_2| = 3$ и угол между ними $\omega = \pi/3$, найти длину вектора $\mathbf{a} = \{-4, 6\}$.

24.76. Известны длины базисных векторов аффинной системы координат $|\mathbf{e}_1| = 4$, $|\mathbf{e}_2| = 2$ и угол между ними $\omega = \pi/3$. Относительно этой системы координат заданы вершины треугольника $A(1,3)$, $B(1,0)$, $C(2,1)$. Определить длины сторон AB и AC этого треугольника и угол A между ними.

24.77. Относительно аффинной системы координат дан треугольник ABC с вершинами $A(1,1)$, $B(5,3)$, $C(3,5)$, длины сторон которого суть $AB = \sqrt{52}$, $AC = 4$, $BC = \sqrt{28}$. Определить длины базисных векторов этой системы координат и угол между ними.

24.78. Относительно аффинной системы координат дан прямоугольный треугольник ABC с вершинами в точках $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(3,2)$, прямым углом при вершине C и катетами $CA = 2$, $CB = 3$. Определить длины базисных векторов этой системы координат и угол между ними.

24.79. Относительно аффинной системы координат дан прямоугольный треугольник ABC с вершинами в точках $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(3,2)$, прямым углом при вершине C и катетами $CA = 2$, $CB = 3$. Определить длины сторон A_1B_1 и A_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$ и угол A_1 между ними, если вершины этого треугольника имеют координаты $A_1(1,1)$, $B_1(2,2)$, $C_1(2,4)$.

24.79.1. Доказать, что скалярный квадрат вектора $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e_1} + \alpha_2\mathbf{e_2} + \alpha_3\mathbf{e_3}$ вычисляется через его координаты в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e_2}$, $\mathbf{e_3}$ по правилу

$$\mathbf{a}^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$$

тогда и только тогда, когда этот базис ортонормированный.

24.80. Базисы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ на плоскости называются *взаимными* (*биортогональными*), если

$$(\mathbf{e}_1,\, \mathbf{f}_1) = (\mathbf{e}_2,\, \mathbf{f}_2) = 1,\ (\mathbf{e}_1,\, \mathbf{f}_2) = (\mathbf{e}_2,\, \mathbf{f}_1) = 0.$$

Зная матрицу Грама $G = (g_{ij})$ базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, найти:

а) матрицу Грама взаимного базиса;

б) координаты векторов взаимного базиса $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$;

в) длины векторов взаимного базиса;

г) угол между векторами $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$ взаимного базиса.

24.81. Вектор $\mathbf{a} = \{a_1, a_2\}$ задан своими координатами в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, а вектор $\mathbf{b} = \{b_1, b_2\}$ – своими координатами во взаимном базисе $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$. Доказать, что их скалярное произведение вычисляется по формуле

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

24.82. 1) Найти векторы $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, полученные поворотом на угол φ векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ соответственно, если известны метрические коэффициенты g_{11}, g_{12}, g_{22} базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$.

2) Рассмотреть частный случай поворота на угол $\varphi = \pi/2$.

24.83. Найти вектор $\mathbf{a}'$, полученный поворотом вектора $\mathbf{a} = \{a_1, a_2\}$ на угол φ, зная метрические коэффициенты g_{11}, g_{12}, g_{22} базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, в котором заданы координаты вектора $\mathbf{a}$.

24.84. 1) Найти векторы $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$, полученные поворотом на угол φ векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ соответственно, если $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = 1$, а угол между векторами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ равен ω.

2) Рассмотреть частный случай поворота на угол $\varphi = \pi/2$.

24.85. Выразить через метрические коэффициенты $g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ в пространстве:

а) длины базисных векторов;

б) углы $\omega_{ij} = (\widehat{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j})$ между базисными векторами.

24.86. Пусть $G = (g_{ij})$ – матрица Грама базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ в пространстве, a_e, b_e – координатные столбцы векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ соответственно в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Доказать, что скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ вычисляется по формуле

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_e^T G b_e.$$

24.87. Зная матрицу Грама $G = (g_{ij})$ базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ в пространстве, найти:

а) длину вектора $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$;

в) угол между векторами $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$.

24.88. Найти направляющие косинусы вектора $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, заданного своими координатами в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, если:

а) известны метрические коэффициенты $g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ этого базиса;

б) известно, что базисные векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ по длине равны 1, а углы между ними равны: $\omega_{12} = (\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2})$, $\omega_{13} = (\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3})$, $\omega_{23} = (\widehat{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3})$.

24.89. Базисы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ в пространстве называются *взаимными* (*биортогональными*), если

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{f}_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Найти матрицу перехода от базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ к его взаимному базису $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$, если известна матрица Грама G базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

24.90. Вектор $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ задан своими координатами в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, а вектор $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ – своими координатами во взаимном базисе $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$. Доказать, что их скалярное произведение вычисляется по формуле

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

24.91. Известна матрица Грама G базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Доказать, что матрица Грама базиса, взаимного с базисом $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, является матрицей, обратной к матрице G.

24.92. Вектор $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ задан своими координатами в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ с метрическими коэффициентами g_{ij}. Найти координаты вектора $\mathbf{a}$ в базисе, взаимном с базисом $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

24.93. Длины векторов базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ равны единице, а углы между ними равны $\pi/3$. Найти длины векторов $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ базиса, взаимного с $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

24.94. Пусть $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ – взаимные базисы пространства. Найти углы θ_i между векторами $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{f}_i$ $(i = \overline{1,3})$, если векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ по длине равны единице, а углы между ними равны: $\omega_{12} = (\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2})$, $\omega_{13} = (\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3})$, $\omega_{23} = (\widehat{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3})$.

24.95. Доказать, что матрица C является матрицей перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису тогда и только тогда, когда C – ортогональная матрица.

§25. Векторное и смешанное произведения

Векторное произведение. Пусть в пространстве V_3 выбрана ориентация. Базисы, задающие эту ориентацию, назовем правыми (положительными).

Векторным произведением ненулевых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется вектор $\mathbf{c}$ такой, что:

1) $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \sin(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}})$,

2) $\mathbf{c}$ ортогонален каждому из векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$

и если $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$, то

3) $\mathbf{c}$ направлен так, что упорядоченная тройка $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ – правая.

Если один из векторов $\mathbf{a}$ или $\mathbf{b}$ нулевой, то векторное произведение считается равным $\mathbf{0}$. Обозначение: $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Теорема 25.1 (критерий коллинеарности). *Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{0}$.*

Теорема 25.2. *Векторное произведение антикоммутативно:*

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}],\ \forall \mathbf{a}, \mathbf{b}.$$

Теорема 25.3. *Векторное произведение линейно по каждому из сомножителей.*

Смешанное произведение. *Смешанным произведением* векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ называется число, равное скалярному произведению векторного произведения $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ на вектор $\mathbf{c}$. Обозначение: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. Итак, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = ([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c})$.

Теорема 25.4 (критерий компланарности). *Векторы* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *компланарны тогда и только тогда, когда* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$.

Теорема 25.5. *Смешанное произведение некомпланарных векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{c}$ *равно по абсолютной величине объему* V *параллелепипеда, построенного на приведенных к общему началу векторах* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. *Причем*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{cases} V, & \text{если } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ – правая тройка;} \\ -V, & \text{если } \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \text{ – левая тройка.} \end{cases}$$

Теорема 25.6. *Для любых векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *выполнено равенство*

$$([\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]).$$

Следствие 1. *Для любых векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *имеют место равенства*

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}).$$

Следствие 2. *Смешанное произведение линейно по каждому из сомножителей.*

Векторное и смешанное произведения в прямоугольных координатах. Пусть $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ – ортонормированный базис пространства и пусть $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ – правая тройка.

1. Если векторы $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ заданы своими координатами в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, то

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3,$$

или, в условной записи в виде мнемонического определителя,

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

(имеется в виду разложение этого определителя по первой строке).

2. Если векторы $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, $\mathbf{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$ заданы своими координатами в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, то

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Замечание. Если исходный базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ отрицательно ориентирован, то

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{e}_3 \right),$$

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = -\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Пример 25.1. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 2, точка K – центр грани ABB_1A_1. Найти расстояние $\rho(C_1, DK)$ от точки C_1 до прямой DK.

Решение. Из определения векторного произведения следует, что

$$\rho(C_1, DK) = \frac{|[\overrightarrow{DK}, \overrightarrow{DC_1}]|}{|\overrightarrow{DK}|}.$$

Найдем координаты векторов $\overrightarrow{DK}$ и $\overrightarrow{DC_1}$ в ортонормированном базисе $\mathbf{a} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$, $\mathbf{b} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}$, $\mathbf{c} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Имеем: $\overrightarrow{DK} = \{-1, 1, -2\}$ (см. пример 24.2), $\overrightarrow{DC_1} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DD_1} = -2\,\mathbf{a} + 2\,\mathbf{b}$, так что $\overrightarrow{DC_1} = \{-2, 2, 0\}$. Отсюда

$$[\overrightarrow{DK}, \overrightarrow{DC_1}] = \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \{4, -4, 0\},$$
$$|[\overrightarrow{DK}, \overrightarrow{DC_1}]| = 4\sqrt{2},$$
$$|\overrightarrow{DK}| = \sqrt{6}.$$

Следовательно, $\rho(C_1, DK) = 4\sqrt{3}/3$. ∎

Пример 25.2. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 2, точка K – центр грани ABB_1A_1. Найти расстояние между прямыми DK и CC_1.

Решение. Заметим, что DK и CC_1 – скрещивающиеся прямые и расстояние между ними равно расстоянию между параллельными плоскостями, в которых они лежат, т.е. высоте h параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{DK}$, $\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{DD_1}$ ($\overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{CC_1}$). Из свойств смешанного и векторного произведений следует, что

$$h = \frac{|(\overrightarrow{DK}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DD_1})|}{|[\overrightarrow{DK}, \overrightarrow{DC}]|}.$$

В ортонормированном базисе $\mathbf{a} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$, $\mathbf{b} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1}$, $\mathbf{c} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ векторы $\overrightarrow{DK}$, $\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{DD_1}$ имеют координаты

$$\overrightarrow{DK} = \{-1, 1, -2\}, \quad \overrightarrow{DC} = \{-2, 0, 0\}, \quad \overrightarrow{DD_1} = \{0, 2, 0\},$$

поэтому

$$(\overrightarrow{DK}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DD_1}) = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 8,$$
$$[\overrightarrow{DK}, \overrightarrow{DC}] = \begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \{0, -4, 2\},$$
$$|[\overrightarrow{DK}, \overrightarrow{DC}]| = 2\sqrt{5}.$$

Следовательно, $h = 4\sqrt{5}/5$. ∎

Пример 25.3. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 2, точка K – центр грани ABB_1A_1. Среди треугольников KTD, где точка T лежит на прямой CC_1, найти треугольник наименьшей площади.

Решение. Имеем $S_{KTD} = \frac{1}{2}DK \cdot h$, где h – высота треугольника KTD. Площади всех таких треугольников определяются длинами высот. Среди всех высот h наименьшую длину имеет общий перпендикуляр к прямым DK и CC_1, т.е. его длина совпадает с расстоянием между ближайшими точками этих прямых. Из примера 25.2 следует, что $h_{\min} = \rho(DK, CC_1) = 4\sqrt{5}/5$, $DK = \sqrt{6}$. Таким образом, $S_{\min} = 2\sqrt{30}/5$. ∎

Пример 25.4. Дан треугольник ABC. Найти все такие точки P, что площади треугольников ABP, BCP и ACP равны.

Решение. Так как площади треугольников ABP, BCP и ACP равны, то векторы $[\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}]$, $[\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}]$, $[\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PA}]$ одинаковы по длине. Из определения векторного произведения следует, что векторы $[\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}]$, $[\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}]$, $[\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PA}]$ перпендикулярны плоскости треугольника ABC и сонаправлены. Таким образом,

$$[\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}] = [\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC}] = [\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PA}]. \tag{25.1}$$

Выразим векторы $\overrightarrow{PB}$ и $\overrightarrow{PC}$ через векторы $\mathbf{p} = \overrightarrow{AP}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$ и $\mathbf{c} = \overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{PB} = \mathbf{b} - \mathbf{p}, \quad \overrightarrow{PC} = \mathbf{c} - \mathbf{p}.$$

Подставим эти соотношения в (25.1) и преобразуем получившиеся равенства в соответствие со свойствами векторного произведения:

$$\begin{cases} [-\mathbf{p}, \mathbf{b} - \mathbf{p}] = [\mathbf{b} - \mathbf{p}, \mathbf{c} - \mathbf{p}], \\ [-\mathbf{p}, \mathbf{b} - \mathbf{p}] = [\mathbf{c} - \mathbf{p}, -\mathbf{p}] \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} [-\mathbf{p}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{p}] - [\mathbf{p}, \mathbf{c}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}], \\ [-\mathbf{p}, \mathbf{b}] = -[\mathbf{c}, \mathbf{p}] \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} [2\mathbf{b} - \mathbf{c}, \mathbf{p}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}], \\ [\mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{p}] = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Из второго равенства последней системы следует, что векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ коллинеарны и потому $\mathbf{p} = \alpha(\mathbf{b} + \mathbf{c})$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда из первого равенства системы получим:

$$[2\mathbf{b} - \mathbf{c}, \alpha\mathbf{b} + \alpha\mathbf{c}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}] \iff (1 - 3\alpha)[\mathbf{b}, \mathbf{c}] = \mathbf{0}.$$

Вектор $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$ не нулевой и, тем самым, $\alpha = 1/3$. Следовательно, $\mathbf{p} = \frac{1}{3}(\mathbf{b} + \mathbf{c})$.

Так как конец вектора $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\mathbf{p} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c})$ делит сторону BC треугольника пополам, то AM – медиана треугольника, а точка P делит эту медиану в отношении $2:1$, считая от вершины A. Поэтому P – точка пересечения медиан в треугольнике ABC. ∎

Пример 25.5. Доказать, что векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ не компланарны тогда и только тогда, когда не компланарны векторы $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$, $[\mathbf{c}, \mathbf{a}]$, $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Решение. Пусть векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ не компланарны. Рассмотрим равенство

$$\alpha[\mathbf{b}, \mathbf{c}] + \beta[\mathbf{c}, \mathbf{a}] + \gamma[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \mathbf{0}.$$

Умножая скалярно обе части этого равенства на вектор $\mathbf{a}$, в силу свойств смешанного произведения получим $\alpha = 0$. Аналогичным образом доказывается, что $\beta = \gamma = 0$. Это означает линейную независимость (т.е. некомпланарность) системы векторов $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$, $[\mathbf{c}, \mathbf{a}]$, $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Пусть теперь $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$, $[\mathbf{c}, \mathbf{a}]$, $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ не компланарны. Рассмотрим равенство

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

Умножая скалярно обе части этого равенства на вектор $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$, в силу свойств смешанного произведения получим $\alpha = 0$. Аналогичным образом доказывается, что $\beta = \gamma = 0$. Это означает некомпланарность векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. ∎

Две тройки векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ и $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ называются *взаимными* (*биортогональными*), если векторы этих троек связаны соотношениями

$$(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_j) = \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ 1, & \text{если } i = j. \end{cases}$$

В решении задачи из примера 25.5 фактически показано, что если $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 1$, то тройка $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$, $[\mathbf{c}, \mathbf{a}]$, $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ является взаимной к тройке векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

Пример 25.6. Доказать, что для любых векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ пространства выполнено тождество

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Решение. Выберем правый ортонормированный базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, взяв в качестве вектора $\mathbf{e}_1$ вектор единичной длины, коллинеарный вектору $\mathbf{b}$, в качестве вектора $\mathbf{e}_2$ – вектор, компланарный $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, и $\mathbf{e}_3 = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$. В этом базисе векторы $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{a}$ имеют координаты:

$$\mathbf{b} = \{b, 0, 0\}, \quad \mathbf{c} = \{c_1, c_2, 0\}, \quad \mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}.$$

Тогда

$$[\mathbf{b}, \mathbf{c}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ b & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & 0 \end{vmatrix} = \{0, 0, bc_2\},$$

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \{a_2 bc_2, -a_1 bc_2, 0\},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) &= \{(a_1c_1 + a_2c_2)b, 0, 0\} - \{c_1a_1b, c_2a_1b, 0\} = \\ &= \{a_2c_2b, -c_2a_1b, 0\} = [\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]]. \quad ∎ \end{aligned}$$

Пример 25.7. Найти объем V параллелепипеда, построенного на тройке базисных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, если известна матрица Грама $G = G(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

Решение. Пусть $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ – ортонормированный базис, одинаково ориентированный с тройкой $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, и пусть векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ в этом базисе имеют координаты: $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, $\mathbf{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$. Тогда

$$V = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

$$V^2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

откуда получаем, что

$$V = \sqrt{|G(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|}. \quad ∎$$

ЗАДАЧИ

В задачах этого параграфа считается, что координаты векторов заданы в прямоугольной декартовой системе координат, тройка $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ базисных векторов которой – правая. Случаи других систем координат оговариваются особо.

25.1. Является ли векторное произведение алгебраической операцией на множестве V_3 геометрических векторов пространства?

25.2. Является ли бинарное отношение $\mathcal{R}$ отношением эквивалентности на множестве V_3 геометрических векторов пространства, если:

а) $\mathbf{x}\mathcal{R}\mathbf{y} \iff [\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \mathbf{0}$;

б) $\mathbf{x}\mathcal{R}\mathbf{y} \iff [\mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{a}] = \mathbf{0}$, где $\mathbf{a} \in V_3$ – заданный ненулевой вектор;

в) $\mathbf{x}\mathcal{R}\mathbf{y} \iff (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{a}) = 0$, где $\mathbf{a} \in V_3$ – заданный ненулевой вектор;

г) $\mathbf{x}\mathcal{R}\mathbf{y} \iff (\mathbf{x}-\mathbf{y}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$, где $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V_3$ – заданные неколлинеарные векторы?

25.3. Пусть $\mathbf{a}$ – заданный ненулевой вектор. Является ли отображение $\mathbf{x} \mapsto [\mathbf{x}, \mathbf{a}]$ пространства V_3 на себя биективным?

25.4. Даны векторы $\mathbf{a} = \{1, 3, -2\}$, $\mathbf{b} = \{2, 4, -1\}$, $\mathbf{c} = \{1, 4, -4\}$. Найти координаты векторов $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$, $[\mathbf{c}, \mathbf{a}]$, $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ и выяснить, образуют ли найденные векторы тройку, взаимную к векторам $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

25.5. Зная два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, найти:

1) $[\mathbf{a}, \mathbf{a}+\mathbf{b}]$; 2) $[\mathbf{a}+\mathbf{b}, \mathbf{a}-\mathbf{b}]$; 3) $[2(\mathbf{a}+\mathbf{b}), 2\mathbf{b}-\mathbf{a}]$.

25.6. Показать, что $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]^2 + (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2$.

25.7. При каком значении $\alpha \in \mathbb{R}$ векторы $\mathbf{p} = \alpha\mathbf{a} + 5\mathbf{b}$ и $\mathbf{q} = 3\mathbf{a} - \mathbf{b}$ коллинеарны, если известно, что $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны?

25.8. Доказать, что для любых векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ векторы $[\mathbf{a}, \mathbf{p}]$, $[\mathbf{a}, \mathbf{q}]$, $[\mathbf{a}, \mathbf{r}]$ компланарны.

25.9. Доказать, что если векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ не коллинеарны, то равенство $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{c}, \mathbf{a}]$ выполняется в том и только в том случае, когда $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$.

25.10. Доказать, что для точки O внутри треугольника ABC площади треугольников OAB, OBC и OCA равны тогда и только тогда, когда O – точка пересечения медиан.

25.11. Из одной точки проведены три некомпланарных вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Показать, что плоскость, проходящая через концы этих векторов, перпендикулярна вектору $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] + [\mathbf{b}, \mathbf{c}] + [\mathbf{c}, \mathbf{a}]$.

25.12. Векторы $\mathbf{r}_B$, $\mathbf{r}_C$ и $\mathbf{r}_D$ являются радиус-векторами трех вершин тетраэдра $ABCD$. Доказать, что вектор

$$\mathbf{n} = [\mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C] + [\mathbf{r}_C, \mathbf{r}_D] + [\mathbf{r}_D, \mathbf{r}_B]$$

перпендикулярен грани BCD тетраэдра и равен по длине удвоенной площади этой грани.

25.13. Квадрат $ABCD$ служит основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти наибольшую возможную величину угла между прямой BD_1 и плоскостью BDC_1.

25.13.1. Доказать, что векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ не компланарны тогда и только тогда, когда не компланарны векторы $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$, $[\mathbf{c}, \mathbf{a}]$, $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

25.14. Найти острый угол между высотами, опущенными из двух вершин правильного тетраэдра на противоположные грани.

25.15. Доказать, что сумма векторов, перпендикулярных к граням тетраэдра, равных по длине площадям этих граней и направленных в сторону вершин, противолежащих граням, равна нулю.

25.16. Показать, что если векторы $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$, $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$, $[\mathbf{c}, \mathbf{a}]$ компланарны, то они коллинеарны.

25.17. Три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ связаны соотношениями $\mathbf{a} = [\mathbf{b}, \mathbf{c}]$, $\mathbf{b} = [\mathbf{c}, \mathbf{a}]$, $\mathbf{c} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Найти длины этих векторов и углы между ними.

25.18. Вычислить площадь треугольника, вершины которого находятся в точках $A(-1, 0, -1)$, $B(0, 2, -3)$, $C(4, 4, 1)$.

25.19. Доказать, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, вычисляется по формуле

$$S = \sqrt{\begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{a}) & (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \\ (\mathbf{b}, \mathbf{a}) & (\mathbf{b}, \mathbf{b}) \end{vmatrix}}.$$

25.20. Доказать, что для любой точки O, лежащей внутри треугольника ABC, выполнено равенство

$$S_{AOB} \cdot \overrightarrow{OC} + S_{BOC} \cdot \overrightarrow{OA} + S_{COA} \cdot \overrightarrow{OB} = \mathbf{0}.$$

25.21. На сторонах AD и CD параллелограмма $ABCD$ взяты точки M и N так, что $MN \parallel AC$. Доказать, что площади треугольников ABM и CBN равны.

25.22. На продолжениях сторон треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1 так, что $\overrightarrow{AB_1} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC_1} = 2\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA_1} = 2\overrightarrow{CA}$. Найти площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если известно, что площадь треугольника ABC равна S.

25.23. На сторонах треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1 так, что $(BCA_1) = (CAB_1) = (ABC_1) = 2$. В результате взаимного пересечения отрезков AA_1, BB_1 и CC_1 получается новый треугольник PQR. Найти отношение площадей треугольников PQR и ABC.

25.24. Используя векторное произведение, вычислить площадь плоского четырехугольника $ABCD$ с вершинами:

а) $A(-1,2)$, $B(4,3)$, $C(5,-1)$, $D(2,0)$;

б) $A(1,1)$, $B(4,3)$, $C(5,5)$, $D(5,0)$;

в) $A(-1,0,1)$, $B(0,1,2)$, $C(-2,2,5)$, $D(-4,0,3)$;

г) $A(1,1,0)$, $B(5,1,-4)$, $C(0,2,2)$, $D(-5,4,9)$.

25.25. Найти площадь выпуклого пятиугольника $ABCDE$ с вершинами $A(-3,-2)$, $B(-2,3)$, $C(3,5)$, $D(6,0)$, $E(2,-3)$.

25.26. Доказать, что площадь выпуклого плоского четырехугольника $ABCD$ в пространстве равна половине длины векторного произведения $[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}]$.

25.27. Доказать, что выпуклые плоские четырехугольники $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ имеют равную площадь тогда и только тогда, когда

$$[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}] = \pm[\overrightarrow{A_1C_1}, \overrightarrow{B_1D_1}].$$

25.28. Диагонали четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Доказать, что площади треугольников AOB и COD равны тогда и только тогда, когда стороны BC и AD параллельны.

25.29. На стороне AB четырехугольника $ABCD$ взяты точки A_1 и B_1, а на стороне CD – точки C_1 и D_1, причем $AA_1 = BB_1 = \lambda AB$ и $CC_1 = DD_1 = \lambda CD$, где $\lambda < 1/2$. Доказать, что отношение площадей четырехугольников $A_1B_1C_1D_1$ и $ABCD$ равно $1 - 2\lambda$.

25.30. Точки A, B, C, D являются последовательными вершинами выпуклого четырехугольника. Доказать, что соотношение

$$[\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B] = [\mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C] = [\mathbf{r}_C, \mathbf{r}_D] = [\mathbf{r}_D, \mathbf{r}_A],$$

связывающее радиус-векторы его вершин, выполнено в том и только в том случае, когда один из векторов $\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_C$ или $\mathbf{r}_B + \mathbf{r}_D$ нулевой.

25.31. Используя результат предыдущей задачи, доказать, что в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ существует точка O, для которой площади треугольников OAB, OBC, OCD, ODA

равны, тогда и только тогда, когда одна из диагоналей этого четырехугольника содержит середину другой диагонали.

25.32. Доказать, что в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ точка O обладает свойством $S_{AOB} + S_{COD} = S_{BOC} + S_{DOA}$ тогда и только тогда, когда она лежит на прямой, проходящей через середины диагоналей четырехугольника.

25.33. На продолжениях сторон DA, AB, BC, CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ взяты точки A_1, B_1, C_1, D_1 так, что $\overrightarrow{DA_1} = 2\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AB_1} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC_1} = 2\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD_1} = 2\overrightarrow{CD}$. Найти площадь получившегося четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$, если известно, что площадь четырехугольника $ABCD$ равна S.

25.34. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ стороны BC, CD, DE и AE параллельны соответственно диагоналям AD, BE, AC и BD. Доказать, что $AB \parallel CE$.

25.35. Даны два вектора $\mathbf{a} = \{11, 10, 2\}$ и $\mathbf{b} = \{4, 0, 3\}$. Найти единичный вектор $\mathbf{c}$, перпендикулярный векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и направленный так, чтобы тройка векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ была правой.

25.36. Даны два вектора $\mathbf{a} = \{1, 1, 1\}$ и $\mathbf{b} = \{1, 0, 0\}$. Найти единичный вектор $\mathbf{c}$, перпендикулярный вектору $\mathbf{a}$, образующий с вектором $\mathbf{b}$ угол в 60° и направленный так, чтобы тройка векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ была левой.

25.37. Даны два вектора $\mathbf{a} = \{8, 4, 1\}$ и $\mathbf{b} = \{2, -2, 1\}$. Найти вектор $\mathbf{c}$, перпендикулярный вектору $\mathbf{a}$, равный ему по длине, компланарный с векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и образующий с вектором $\mathbf{b}$ острый угол.

25.38. Даны три вектора $\mathbf{a} = \{-2, -2, -4\}$, $\mathbf{b} = \{5, 1, 6\}$, $\mathbf{c} = \{-3, 0, 2\}$. Найти вектор $\mathbf{x}$, удовлетворяющий системе уравнений:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = 40, \ (\mathbf{b}, \mathbf{x}) = 0, \ (\mathbf{c}, \mathbf{x}) = 0.$$

25.39. Даны три некомпланарных вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Найти вектор $\mathbf{x}$, удовлетворяющий системе уравнений

$$(\mathbf{a}, \mathbf{x}) = \alpha, \ (\mathbf{b}, \mathbf{x}) = \beta, \ (\mathbf{c}, \mathbf{x}) = \gamma.$$

25.40. Даны три вектора $\mathbf{a} = \{8, 4, 1\}$, $\mathbf{b} = \{2, 2, 1\}$, $\mathbf{c} = \{1, 1, 1\}$. Найти единичный вектор $\mathbf{d}$, образующий с векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равные углы, перпендикулярный вектору $\mathbf{c}$ и направленный так, чтобы упорядоченные тройки векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{d}$ имели одинаковую ориентацию.

25.41. Даны три вектора $\mathbf{a} = \{8, 4, 1\}$, $\mathbf{b} = \{2, 2, 1\}$, $\mathbf{c} = \{1, 1, 1\}$. Найти единичный вектор $\mathbf{d}$, компланарный векторам $\mathbf{a}$

8—4271

и $\mathbf{b}$, перпендикулярный вектору $\mathbf{c}$ и направленный так, чтобы упорядоченные тройки векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и $\mathbf{a}$, $\mathbf{d}$, $\mathbf{c}$ имели противоположную ориентацию.

25.42. Даны три вектора $\mathbf{a} = \{8, 4, 1\}$, $\mathbf{b} = \{2, -2, 1\}$, $\mathbf{c} = \{4, 0, 3\}$. Найти единичный вектор $\mathbf{d}$, перпендикулярный векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и направленный так, чтобы упорядоченные тройки векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{d}$ имели одинаковую ориентацию.

25.43. Даны два луча. Первый луч составляет с осями координат углы $\pi/4$, $\pi/3$, $2\pi/3$, а второй – равные между собой тупые углы. Найти направляющие косинусы третьего луча, перпендикулярного двум данным лучам и образующего с ними правую тройку.

25.44. Даны три вектора $\overrightarrow{OA} = \{8, 4, 1\}$, $\overrightarrow{OB} = \{2, -2, 1\}$, $\overrightarrow{OC} = \{4, 0, 3\}$, отложенные от одной точки O. Найти направляющие косинусы луча, выходящего из точки O и образующего с ребрами $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ трехгранного угла $OABC$ равные острые углы. Установить, лежит ли этот луч внутри или вне трехгранного угла $OABC$.

25.45. Даны три некомпланарных вектора $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$. Внутри углов AOB, BOC и COA взяты соответственно ненулевые векторы $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$ и $\overrightarrow{OF}$. Установить, будут ли упорядоченные тройки векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF}$ иметь одинаковую или противоположную ориентацию.

25.46. Даны три некомпланарных вектора $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$, отложенных от одной точки O. Найти вектор $\overrightarrow{OD} = \mathbf{d}$, отложенный от той же точки O и образующий с векторами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ равные между собой острые углы.

25.47. Из начала координат выходят два направленных отрезка $\overrightarrow{OM_1}$ и $\overrightarrow{OM_2}$, образующие с осями координат углы α_1, β_1, γ_1 и α_2, β_2, γ_2 соответственно. Найти направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{OM}$, выходящего из начала координат, перпендикулярного обоим заданным направленным отрезкам и расположенного так, что тройка векторов $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{OM}$ правая.

25.48. Одна из вершин параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ находится в точке $A(1, 2, 3)$, а концы выходящих из нее ребер – в точках $B(9, 6, 4)$, $D(3, 0, 4)$, $A_1(5, 2, 6)$. Найти угол φ между диагональю AC_1 и плоскостью грани $ABCD$ этого параллелепипеда.

25.49. Вычислить объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, зная его вершину $A(1,2,3)$ и концы выходящих из нее ребер $B(9,6,4)$, $D(3,0,4)$, $A_1(5,2,6)$.

25.50. Вычислить объем параллелепипеда, зная длины $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ трех его ребер, выходящих из одной вершины O, и углы $\widehat{BOC} = \alpha$, $\widehat{COA} = \beta$, $\widehat{COA} = \gamma$ между этими ребрами.

25.51. Три некомпланарных вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ являются ребрами тетраэдра, выходящими из одной его вершины. Показать, что объем тетраэдра равен $\frac{1}{6}|(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|$.

25.52. Вычислить объем тетраэдра $ABCD$, зная координаты его вершин: $A(2,-2,1)$, $B(3,0,2)$, $C(5,-1,3)$, $D(1,3,1)$.

25.53. Вычислить объем четырехугольной пирамиды $OABCD$, зная координаты ее вершины $O(3,2,1)$ и координаты вершин основания $A(-1,1,1)$, $B(-1,2,3)$, $C(0,1,4)$, $D(0,-1,0)$.

25.54. Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 – точки пересечения медиан граней BCD, CDA, ABD и ABC тетраэдра $ABCD$. Найти отношение объема тетраэдра $A_1B_1C_1D_1$ к объему тетраэдра $ABCD$.

25.55. Точки A, B, C, D являются вершинами тетраэдра $ABCD$. Доказать, что их радиус-векторы удовлетворяют соотношениям

$$(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_B, \mathbf{r}_C) = (\mathbf{r}_D, \mathbf{r}_B, \mathbf{r}_A) = (\mathbf{r}_C, \mathbf{r}_B, \mathbf{r}_D) = (\mathbf{r}_C, \mathbf{r}_D, \mathbf{r}_A)$$

в том и только в том случае, когда $\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_C + \mathbf{r}_D = \mathbf{0}$.

25.56. Пользуясь предыдущей задачей, доказать, что для точки O внутри тетраэдра $ABCD$ объемы тетраэдров $OABC$, $ODBA$, $OCBD$ и $OCDA$ равны тогда и только тогда, когда O лежит на пересечении отрезков, соединяющих вершины тетраэдра $ABCD$ с точками пересечения медиан противоположных им граней.

25.57. Даны три некомпланарных вектора $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, $\mathbf{n} = \{n_1, n_2, n_3\}$. Найти площадь параллелограмма, являющегося ортогональной проекцией на плоскость, перпендикулярную к вектору $\mathbf{n}$, параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

25.58. В тетраэдре $ABCD$ ребро CD перпендикулярно плоскости ABC, M – середина DB, N – середина AB, K – точка на ребре CD такая, что $CD = 3CK$. Доказать, что расстояние между прямыми BK и CN равно расстоянию между прямыми AM и CN.

25.59. Доказать, что в произвольном трехгранном угле биссектрисы двух плоских углов и угла, смежного к третьему плоскому углу, лежат в одной плоскости.

25.60. В ориентированном пространстве даны два перпендикулярных друг другу вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{n}$, причем $|\mathbf{n}| = 1$. В плоскости, положительная ориентация которой определяется упорядоченной парой векторов $\mathbf{a}$, $[\mathbf{n}, \mathbf{a}]$, найти вектор $\mathbf{b}$, полученный из вектора $\mathbf{a}$ поворотом в этой плоскости на угол φ.

25.61. Даны три некомпланарных вектора $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$, отложенных от одной точки O. Найти вектор $\overrightarrow{OH}$, где H – ортогональная проекция точки O на плоскость (ABC).

25.62. Доказать тождества:

а) $[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$;

б) $[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}] = -\mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{c}) + \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c})$.

25.63. Доказать тождества:

а) $([\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]) = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{c}) & (\mathbf{a}, \mathbf{d}) \\ (\mathbf{b}, \mathbf{c}) & (\mathbf{b}, \mathbf{d}) \end{vmatrix}$;

б) $[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]] = \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}) - \mathbf{d}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}) - \mathbf{a}(\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$;

в) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})\mathbf{d} = (\mathbf{d}, \mathbf{b}, \mathbf{c})\mathbf{a} + (\mathbf{d}, \mathbf{c}, \mathbf{a})\mathbf{b} + (\mathbf{d}, \mathbf{a}, \mathbf{b})\mathbf{c}$;

г) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \begin{vmatrix} (\mathbf{x}, \mathbf{a}) & (\mathbf{x}, \mathbf{b}) & (\mathbf{x}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{y}, \mathbf{a}) & (\mathbf{y}, \mathbf{b}) & (\mathbf{y}, \mathbf{c}) \\ (\mathbf{z}, \mathbf{a}) & (\mathbf{z}, \mathbf{b}) & (\mathbf{z}, \mathbf{c}) \end{vmatrix}$;

д) $([\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}], [\mathbf{e}, \mathbf{f}]) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d})(\mathbf{c}, \mathbf{e}, \mathbf{f}) - (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})(\mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f})$.

25.64. Найти условие, необходимое и достаточное для выполнения равенства

$$[[\mathbf{a}, \mathbf{b}], \mathbf{c}] = [\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]].$$

25.64.1. Найти условие, необходимое и достаточное для выполнения равенства

$$([\mathbf{a}, \mathbf{b}], [\mathbf{c}, \mathbf{d}]) = ([\mathbf{a}, \mathbf{c}], [\mathbf{b}, \mathbf{d}]).$$

25.65. а) Найти необходимое и достаточное условие для того, чтобы уравнение $[\mathbf{a}, \mathbf{x}] = \mathbf{b}$, где $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, имело решение.

б) Найти общее решение этого уравнения.

25.66. а) Показать, что условие $(\mathbf{a}_2, \mathbf{b}) = 0$ необходимо для того, чтобы система уравнений

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{x}) = \alpha, \quad [\mathbf{a}_2, \mathbf{x}] = \mathbf{b}$$

имела решение.

б) Найти это решение, если $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \neq 0$.

в) Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \neq \mathbf{0}$ и $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = 0$. Найти необходимое и достаточное условие разрешимости системы в этом случае и построить ее общее решение.

25.67. Рассматривается система уравнений

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{x}] = \mathbf{b}_1, \quad [\mathbf{a}_2, \mathbf{x}] = \mathbf{b}_2,$$

в которой $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ – заданные векторы, причем $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ не коллинеарны.

а) Показать, что условия

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_1) = 0, (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_2) = 0, (\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2) + (\mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1) = 0$$

необходимы для разрешимости этой системы.

б) При выполнении указанных условий и условия $(\mathbf{a}_1, \mathbf{b}_2) \neq 0$ найти общее решение системы.

25.68. Ненулевые векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ удовлетворяют условию $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$. Найти векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из системы уравнений

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{a}, \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = p, \quad [\mathbf{x}, \mathbf{y}] = \mathbf{b}.$$

25.69. Даны плоские углы $\widehat{BOC} = \alpha$, $\widehat{COA} = \beta$, $\widehat{AOB} = \gamma$ трехгранного угла $OABC$.

а) Вычислить косинусы его внутренних двугранных углов A, B, C, противолежащих граням BOC, COA, AOB.

б) Доказать, что

$$\frac{\sin\alpha}{\sin A} = \frac{\sin\beta}{\sin B} = \frac{\sin\gamma}{\sin C}.$$

25.70. Ребра трехгранного угла OA, OB и OC определяются единичными векторами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ соответственно. Доказать, что точка P равноудалена от граней трехгранного угла тогда и только тогда, когда

$$\overrightarrow{OP} \uparrow\uparrow \sin\alpha \cdot \mathbf{a} + \sin\beta \cdot \mathbf{b} + \sin\gamma \cdot \mathbf{c},$$

где $\alpha = \widehat{BOC}$, $\beta = \widehat{COA}$, $\gamma = \widehat{AOB}$ – плоские углы рассматриваемого трехгранного угла.

25.71. Ребра трехгранного угла OA, OB и OC определяются соответствующими единичными векторами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, образующими правую тройку. Доказать, что точка P равноудалена от ребер трехгранного угла тогда и только тогда, когда

$$\overrightarrow{OP} \uparrow\uparrow [\mathbf{b}, \mathbf{c}] + [\mathbf{c}, \mathbf{a}] + [\mathbf{a}, \mathbf{b}].$$

Векторное и смешанное произведения в аффинных координатах

25.72. Выразить через метрические коэффициенты g_{ij} базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ в пространстве объем параллелепипеда, построенного на базисных векторах.

25.73. Зная метрические коэффициенты g_{ij} базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, найти объем V параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, $\mathbf{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$.

25.74. Объем параллелепипеда, построенного на базисных векторах $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, равен V. Найти объем параллелепипеда, построенного на базисных векторах взаимного базиса.

25.75. Доказать, что векторы

$$\mathbf{f}_1 = \frac{[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}, \qquad \mathbf{f}_2 = \frac{[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}, \qquad \mathbf{f}_3 = \frac{[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]}{(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)}$$

образуют базис, взаимный к базису $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и имеющий ту же ориентацию.

25.75.1. Пусть тройка базисных векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ – правая и V_e – объем параллелепипеда, построенного на этих базисных векторах. Доказать, что для векторов $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, $\mathbf{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$, заданных своими координатами в этом базисе, выполнено равенство

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = V_e \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

25.75.2. Пусть $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ и $\{O'; \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3\}$ – две аффинные системы координат и C – матрица перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$, причем $\det C > 0$. Доказать, что объемы V_e и $V_{e'}$ параллелепипедов, построенных на соответствующих базисных векторах, связаны соотношением

$$V_{e'} = V_e \cdot \det C.$$

25.76. Векторы $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$ и $\mathbf{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$ заданы своими координатами в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$. Найти координаты векторного произведения $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ в базисе, взаимном с базисом $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

Глава VII. **Прямая на плоскости и плоскость в пространстве**

§26. Составление уравнений по различным заданиям

Канонические уравнения. Ненулевой вектор, коллинеарный прямой, называется ее *направляющим вектором.*

Теорема 26.1. *На плоскости в аффинной системе координат Oxy уравнение прямой l, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$, с направляющим вектором $\mathbf{a} = \{m, n\}$ имеет вид*

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ m & n \end{vmatrix} = 0 \tag{26.1}$$

или

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \tag{26.2}$$

Уравнение (26.2) означает лишь пропорциональность и в случае, когда $m = 0$ или $n = 0$, равносильно уравнению $x - x_0 = 0$ или $y - y_0 = 0$ соответственно.

Уравнения (26.1), (26.2) называются *каноническими уравнениями прямой на плоскости.*

Следствие. Уравнение прямой, проходящей через две различные точки $M_0(x_0, y_0)$ и $M_1(x_1, y_1)$, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Два неколлинеарных вектора, параллельных плоскости, называются ее *направляющими векторами.*

Теорема 26.2. *В пространстве в аффинной системе координат $Oxyz$ уравнение плоскости π, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, с направляющими векторами $\mathbf{p}_1 = \{m_1, n_1, k_1\}$ и $\mathbf{p}_2 = \{m_2, n_2, k_2\}$ имеет вид*

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{26.3}$$

Уравнение (26.3) называется *каноническим уравнением плоскости.*

Следствие. Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_0(x_0,\ y_0, z_0)$, $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, не лежащие на одной прямой, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Параметрические уравнения.

Теорема 26.3. *Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(\mathbf{r}_0)$ с направляющим вектором $\mathbf{a}$ имеет вид*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{a}, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{26.4}$$

или, в координатной форме, в системе координат Oxy

$$\begin{cases} x = x_0 + tm, \\ y = y_0 + tn, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{26.5}$$

Число t в уравнениях (26.4) и (26.5) является координатой точки $M(x, y)$ прямой на самой прямой, если за начало координат принимается точка $M_0(x_0, y_0)$, а за базисный вектор – вектор $\mathbf{a} = \{m, n\}$.

Уравнения (26.4), (26.5) называются *параметрическими уравнениями прямой* на плоскости в векторной и координатной формах соответственно.

Теорема 26.4. *Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(\mathbf{r}_0)$ с направляющими векторами $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ имеет вид*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + u\,\mathbf{p}_1 + v\,\mathbf{p}_2, \quad u, v \in \mathbb{R}, \tag{26.6}$$

или, в координатной форме, в системе координат $Oxyz$

$$\begin{cases} x = x_0 + um_1 + vm_2, \\ y = y_0 + un_1 + vn_2, \\ z = z_0 + uk_1 + vk_2, \quad u, v \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{26.7}$$

Числа u, v в уравнениях (26.6) и (26.7) являются координатами точки $M(x, y)$ плоскости на самой плоскости, если за начало координат принимается точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, а за базисные векторы – векторы $\mathbf{p}_1 = \{m_1, n_1, k_1\}$, $\mathbf{p}_2 = \{m_2, n_2, k_2\}$.

Уравнения (26.6), (26.7) называются *параметрическими уравнениями плоскости* в векторной и координатной формах соответственно.

Общие уравнения.

Теорема 26.5. *Линия на плоскости является прямой тогда и только тогда, когда она является алгебраической линией первого порядка, т.е. определяется уравнением*

$$Ax + By + C = 0, \quad \text{где} \quad A^2 + B^2 \neq 0. \tag{26.8}$$

Уравнение (26.8) называется *общим уравнением прямой на плоскости.* Вектор $\mathbf{n} = \{A, B\}$ называется *вектором нормали к прямой относительно уравнения* (26.8).

Теорема 26.6. *Поверхность в пространстве является плоскостью тогда и только тогда, когда она является алгебраической поверхностью первого порядка, т.е. определяется уравнением*

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad \text{где} \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0. \tag{26.9}$$

Уравнение (26.9) называется *общим уравнением плоскости* в пространстве. Вектор $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$ называется *вектором нормали к плоскости относительно уравнения* (26.9).

Общее уравнение прямой (плоскости) называется *полным*, если все коэффициенты A, B, C (соответственно A, B, C, D) отличны от нуля.

Теорема 26.7. *В аффинной системе координат Oxy на плоскости ($Oxyz$ в пространстве) вектор $\mathbf{a} = \{m, n\}$ (соответственно $\mathbf{a} = \{m, n, k\}$) параллелен прямой (плоскости), заданной общим уравнением* (26.8) (*соответственно* (26.9)), *тогда и только тогда, когда*

$$Am + Bn = 0, \tag{26.10}$$

(соответственно

$$Am + Bn + Ck = 0). \tag{26.11}$$

Следствие 1. *Вектор* $\mathbf{a} = \{-B, A\} \neq \mathbf{0}$ *параллелен прямой* (26.8).

Следствие 2. *Векторы* $\mathbf{a}=\{0, -C, B\}$, $\mathbf{b}=\{-C, 0, A\}$, $\mathbf{c}=\{-B, A, 0\}$ *компланарны плоскости* (26.9).

Следствие 3. *В прямоугольной декартовой системе координат вектор нормали* $\mathbf{n} = \{A, B\}$ *к прямой* (26.8) (*соответственно* $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$ *к плоскости* (26.9)) *перпендикулярен этой прямой (плоскости).*

Уравнения в отрезках. Полные уравнения (26.8) и (26.9) прямой на плоскости и плоскости в пространстве могут быть записаны в виде:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \qquad \text{и} \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Эти уравнения называются *уравнениями* прямой и соответственно плоскости *в отрезках.* Числа a, b, c в этих уравнениях называются *отрезками, которые отсекает прямая (плоскость) на осях координат.*

Векторные уравнения. Параметрические уравнения (26.4) и (26.6) представляют собой векторные уравнения прямой (как на плоскости, так и в пространстве) и плоскости.

Уравнение (26.6) порождает другую форму векторного уравнения плоскости:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \mathbf{0} \quad \text{или} \quad (\mathbf{r}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = D, \tag{26.12}$$

где $D = (\mathbf{r}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$.

Теорема 26.8. *Уравнение прямой на плоскости (плоскости в пространстве), проходящей через точку $M_0(\mathbf{r}_0)$ перпендикулярно вектору $\mathbf{n}$, имеет вид*

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = 0$$

или, что то же самое,

$$(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D,$$

где D – константа, равная $(\mathbf{r}_0, \mathbf{n})$.

Пример 26.1. В треугольнике ABC даны уравнения сторон AB: $3x - 2y + 1 = 0$, BC: $x - y + 1 = 0$ и медианы CM: $2x - y - 1 = 0$. Составить каноническое, общее и параметрическое уравнения стороны AC. Система координат аффинная.

Решение. Из систем уравнений

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ 3x - 2y + 1 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3x - 2y + 1 = 0, \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases}$$

находим координаты точек B, M и C: $B(1,2)$, $M(3,5)$, $C(2,3)$. Так как точка M – середина отрезка AB, то координаты (x,y) точки A находятся из соотношений $\frac{x+1}{2}=3$, $\frac{y+2}{2}=5$, так что $A(5,8)$. Каноническое уравнение AC как прямой, проходящей через точки A и C, имеет вид

$$\frac{x-2}{5-2}=\frac{y-3}{8-3} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{5}.$$

Отсюда легко получить общее уравнение: $5x-3y-1=0$. Параметрическое уравнение AC как прямой с направляющим вектором $\overrightarrow{AC}=\{3;5\}$, проходящей через точку $C(2,3)$, имеет вид

$$x=2+3t,\ y=3+5t, \quad t\in\mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

Пример 26.2. Зная вершину $A(3,-4)$ треугольника ABC и уравнения двух его высот BH: $7x-2y-1=0$, CP: $2x-7y-6=0$, написать уравнение стороны BC. Система координат прямоугольная.

Решение. Из системы уравнений

$$\begin{cases} 7x-2y=1, \\ 2x-7y=6 \end{cases}$$

найдем координаты точки Q пересечения высот треугольника: $Q(-\frac{1}{9},-\frac{8}{9})$. Вектор $\overrightarrow{AQ}=\{-\frac{28}{9},\frac{28}{9}\}$ перпендикулярен прямой BC, поэтому вектор $\mathbf{n}=\{1,-1\}$ можно взять за вектор нормали прямой BC. Тогда общее уравнение прямой BC будет иметь вид

$$x-y+c=0. \tag{26.13}$$

Чтобы найти коэффициент c, найдем координаты точки B: вектор $\{2,-7\}$ – направляющий вектор прямой AB, поэтому прямая AB определяется уравнением $\frac{x-3}{2}=\frac{y+4}{-7}$ или $7x+2y-13=0$, а точка B определяется системой уравнений

$$\begin{cases} 7x+2y-13=0, \\ 7x-2y-1=0. \end{cases}$$

Подставив найденные отсюда координаты $(1,3)$ точки B в (26.13), находим $c=2$ и искомое уравнение

$$x-y+2=0. \quad \blacksquare$$

Пример 26.3. На прямых l_1: $x+y-2=0$ и l_2: $5x+y-14=0$ найти точки $A\in l_1$, $B\in l_2$ такие, что прямая AB имеет угловой коэффициент, равный 3, и что длина отрезка AB равна $\sqrt{10}$. Система координат прямоугольная.

Решение. Уравнение прямой AB имеет вид $y=3x+b$, поэтому вектор $\{1,3\}$ является направляющим вектором этой прямой. Следовательно, если (x,y) – координаты точки A, то точка B имеет координаты $(x+t,y+3t)$, $t\in\mathbb{R}$. Параметр t находим из условия, что $|AB|=\sqrt{10}$: $t=\pm1$, так что точка B имеет координаты $(x\pm1,y\pm3)$. Подставляя координаты точек A и B в уравнения прямых l_1 и l_2 соответственно, находим искомые точки: $A_1(1,1)$, $B_1(2,4)$ и $A_2(5,-3)$, $B_2(4,-6)$. $\blacksquare$

Пример 26.4. Составить параметрические уравнения плоскости треугольника с вершинами в точках $A(2,5,1)$, $B(6,3,2)$, $C(1,1,1)$.

Решение. Векторы $\overrightarrow{CA} = \{1,4,0\}$ и $\overrightarrow{CB} = \{5,2,1\}$ – направляющие векторы плоскости, поэтому ее параметрические уравнения имеют вид

$$\begin{cases} x = 1 + u + 5v, \\ y = 1 + 4u + 2v, \\ z = 1 + v, \qquad u, v \in \mathbb{R}. \end{cases} \blacksquare$$

ЗАДАЧИ

В задачах этого параграфа считается, что система координат произвольная аффинная. Случай прямоугольной декартовой системы координат оговаривается особо.

Уравнения прямой на плоскости

26.1. Написать уравнение прямой:

1) проходящей через точку $(3,-2)$ параллельно оси Oy;

2) проходящей через точку $(7,0)$ параллельно вектору $\{-4,2\}$.

26.2. Написать уравнение прямой:

1) проходящей через две точки $(2,3)$ и $(-4,-6)$;

2) проходящей через начало координат и через точку $(1,8)$.

26.3. Написать уравнение прямой:

1) проходящей через точку $(2,3)$ и имеющей угловой коэффициент, равный -5;

2) проходящей через точку $(-2,7)$ и имеющей тот же угловой коэффициент, что и прямая $3x + y - 5 = 0$.

26.4. Написать уравнение прямой:

1) имеющей угловой коэффициент 3 и отсекающей на оси ординат отрезок, равный 4;

2) отсекающей на осях Ox и Oy отрезки, равные 3 и -5 соответственно;

3) отсекающей на оси Ox отрезок 3 и проходящей через точку $(-5,3)$.

26.5. Выяснить, под каким углом к оси Ox наклонена прямая, проходящая через точки $(1,4)$ и $(3,5)$. Система координат прямоугольная.

26.6. Написать уравнения сторон равнобочной трапеции, зная, что основания ее соответственно равны 10 и 6, а боковые стороны образуют с основанием угол в $60°$. Ось Ox содержит большее основание трапеции, за ось Oy берется ось симметрии трапеции, а за положительное направление оси Oy берется направление луча, проведенного от большего основания к меньшему. Система координат прямоугольная.

26.7. Через точку $M(-4, 10)$ провести прямые, отсекающие на осях координат ненулевые отрезки равной длины. Система координат прямоугольная.

26.8. Через точку $M(2, -1)$ провести прямую, отрезок которой между осями координат делился бы в данной точке пополам.

26.9. Определить площадь треугольника, заключенного между осями координат и прямой $x + 2y - 6 = 0$. Система координат прямоугольная.

26.10. Через точку $M(4, -3)$ провести прямую так, чтобы площадь треугольника, образованного ею и осями, была равна 3. Система координат прямоугольная.

26.11. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $(5, -3)$ параллельно вектору $\{2, -4\}$.

26.12. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку $(-6, -4)$ и имеющей угловой коэффициент $k = -\frac{3}{7}$.

26.13. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через начало координат и наклоненной к оси ординат под углом в $150°$. Система координат прямоугольная.

26.14. Составить параметрические уравнения прямой, отсекающей на осях Ox и Oy отрезки 3 и -5.

26.15. Составить параметрические уравнения прямых:

1) $3x + 6y + 5 = 0$; 2) $y = -3x + 5$; 3) $y = -3$;
4) $x - 2y - 4 = 0$; 5) $x = 2$; 6) $2x + 3y = 0$.

26.16. Составить общие уравнения прямых:

1) $x = t$, $y = 1 - 3t$; 2) $x = 2 + 5t$, $y = 4 - 7t$;
3) $x = 3 - 2t$, $y = -8 + 6t$; 4) $x = 3 - 2t$, $y = 3$.

26.17. Даны две прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$. Найти геометрическое место середин отрезков, высекаемых данными прямыми на прямых, параллельных осям координат.

26.18. Даны вершины треугольника: $A(-2, 3)$, $B(4, -7)$, $C(6, 5)$. Написать уравнения прямых, равноудаленных от всех вершин треугольника.

26.19. Дан треугольник ABC: $A(-2, 3)$, $B(4, 1)$, $C(6, -5)$. Написать уравнение медианы треугольника, проведенной из вершины A.

26.20. Даны уравнения двух сторон треугольника $2x - y = 0$,

$5x-y=0$ и уравнение $3x-y=0$ одной из его медиан. Составить уравнение третьей стороны треугольника, зная, что на ней лежит точка $(3,9)$, и найти координаты его вершин.

26.21. Дано уравнение $x-2y+7=0$ стороны AB треугольника ABC и уравнения $x+y-5=0$, $2x+y-11=0$ медиан, выходящих из вершин A и B соответственно. Составить уравнения двух других сторон треугольника.

26.22. Через точку $P(-3,-5)$ провести прямую, отрезок которой между прямыми $2x+3y-15=0$, $4x-5y-12=0$ в точке P делился бы пополам.

26.23. Дана точка $(0,2)$ пересечения медиан треугольника и уравнения двух его сторон $5x-4y+15=0$, $4x+y-9=0$. Найти координаты вершин треугольника и уравнение его третьей стороны.

26.24. Точка пересечения медиан треугольника лежит в начале координат. Известны уравнения двух его сторон: $x+y-4=0$ и $2x+y-1=0$. Найти вершины треугольника и уравнение его третьей стороны.

26.25. Даны уравнения $4x+5y=0$, $x-3y=0$ медиан треугольника и его вершина $(2,-5)$. Составить уравнения сторон треугольника и найти остальные его вершины.

26.26. В треугольнике ABC углы A и B при его основании AB острые, а боковые стороны AC и BC не равны между собой. Найти геометрическое место точек пересечения диагоналей прямоугольников, вписанных в треугольник так, что две вершины прямоугольника лежат на основании данного треугольника, а две другие – на его боковых сторонах.

26.27. Найти геометрическое место точек пересечения диагоналей параллелограммов, вписанных в данный четырехугольник так, что стороны этих параллелограммов параллельны диагоналям четырехугольника.

Уравнения плоскости в пространстве

26.28. Составить уравнения плоскостей, проходящих через точку $(2,6,-3)$ параллельно плоскостям координат.

26.29. Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки M_1, M_2, M_3, если:

1) $M_1(2,3,1)$, $M_2(3,1,4)$, $M_3(2,1,5)$;
2) $M_1(2,0,-1)$, $M_2(-2,4,1)$, $M_3(0,2,-1)$.

26.30. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и через точки $M_1(2, 1, 1)$ и $M_2(-3, 0, 4)$.

26.31. Даны вершины тетраэдра $A(2, 1, 0)$, $B(1, 3, 5)$, $C(6, 3, 4)$, $D(0, -7, 8)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через ребро AB и середину ребра CD.

26.32. Даны вершины тетраэдра $A(3, 5, -1)$, $B(7, 5, 3)$, $C(9, -1, 5)$, $D(5, 3, -3)$. Написать уравнения плоскостей, равноудаленных от всех вершин тетраэдра.

26.33. Составить уравнение плоскости, отсекающей на осях Ox и Oy отрезки 5 и -7 и проходящей через точку $(1, 1, 2)$.

26.34. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $(3, 5, -7)$ и отсекающей на осях координат ненулевые отрезки равной длины. Система координат прямоугольная.

26.35. Написать уравнение плоскости, проходящей через две точки $A(3, 5, 1)$ и $B(7, 7, 8)$ и отсекающей на осях Ox и Oy ненулевые отрезки равной длины. Система координат прямоугольная.

26.36. Составить уравнение плоскости, отсекающей на осях координат отрезки, равные 3, 5 и -7 соответственно.

26.37. Определить отрезки, отсекаемые на осях координат плоскостью $x - y + 7z - 4 = 0$.

26.38. Определить объем тетраэдра, ограниченного координатными плоскостями и плоскостью $2x+3y+6z-18 = 0$. Система координат прямоугольная.

26.39. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oy и точку $(2, -5, 1)$.

26.40. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $(3, 7, 2)$ и параллельной двум векторам $\{4, 1, 2\}$ и $\{5, 3, 1\}$.

26.41. Составить параметрические уравнения плоскости, проходящей через точку $(2, 3, -5)$ и параллельной векторам $\{-5, 6, 4\}$, $\{4, -2, 0\}$.

26.42. Составить уравнения плоскостей, проходящих через оси координат и параллельных вектору $\{2, 1, -4\}$,

26.43. Написать уравнения плоскостей, проходящих через оси координат и через точку $(3, -5, 1)$.

26.44. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oy и равноудаленной от точек $(2, 7, 3)$ и $(-1, 1, 0)$.

26.45. Составить уравнение плоскости, проходящей через две точки $(4, 5, 2)$, $(6, 2, 4)$ и параллельной вектору $\{1, 2, 1\}$.

26.46. Составить параметрические уравнения плоскости, проходящей через две точки $(1, 7, 8)$, $(2, -6, -6)$ и параллельной оси Oz.

26.47. Даны вершины тетраэдра $A(5, 1, 3)$, $B(1, 6, 2)$, $C(5, 0, 4)$, $D(4, 0, 6)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через ребро AB параллельно ребру CD.

26.48. В плоскости, проходящей через три точки $A(2, 1, 3)$, $B(2, 4, 0)$, $C(-3, 0, 4)$, выбрана аффинная система координат с началом в точке A и базисными векторами $\overrightarrow{AB} = \mathbf{e}_1$ и $\overrightarrow{AC} = \mathbf{e}_2$. Найти:

1) пространственные координаты (x, y, z) точки M, имеющей в плоскостной системе координаты $u = 5$, $v = 3$;

2) плоскостные координаты u и v точки пересечения данной плоскости с осью Oz.

26.49. В плоскости $2x + 3y - 4z + 12 = 0$ выбрана аффинная система координат, начало которой находится в точке C пересечения этой плоскости с осью Oz, а концы базисных векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ соответственно в точках A и B пересечения плоскости с осями Ox и Oy.

1) Найти пространственные координаты (x, y, z) точки E этой плоскости с плоскостными координатами $u = 1$, $v = 1$;

2) Написать в плоскостной системе координат уравнения прямых AB, BC и CA пересечения данной плоскости с координатными плоскостями пространственной системы.

3) Написать в плоскостной системе уравнение линии пересечения данной плоскости с плоскостью $5x + 3z - 8 = 0$.

26.50. Написать общее уравнение плоскости по ее параметрическим уравнениям в каждом из следующих случаев:

1) $x = 2 + 3u - 4v,\ y = 4 - v,\ z = 2 + 3u$;
2) $x = u + v,\ y = u - v,\ z = 5 + 6u - 4v$;
3) $x = 1 + 2v,\ y = -2,\ z = 1 - u$;
4) $x = u - v,\ y = 1 - 4u,\ z = 7 + 2u$.

§27. Задачи взаимного расположения прямых на плоскости и плоскостей в пространстве

Необходимые и достаточные условия того, что две прямые

$$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0, \tag{27.1}$$

заданные общими уравнениями в аффинной системе координат, совпадают, параллельны или пересекаются, приводятся в следующей таблице (в ней приняты обозначения: $G = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$):

Расположение прямых	Условие	Равносильное условие
Совпадают	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$	$\operatorname{rg} F = 1$
Параллельны	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$	$\begin{cases} \operatorname{rg} G = 1 \\ \operatorname{rg} F = 2 \end{cases}$
Пересекаются	$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$	$\operatorname{rg} G = 2$

Если уравнения (27.1) относятся к прямоугольной декартовой системе координат, то необходимым и достаточным условием перпендикулярности прямых l_1 и l_2 является условие

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \tag{27.2}$$

Необходимые и достаточные условия того, что две плоскости

$$\pi_1 : A_1x+B_1y+C_1z+D_1 = 0 \quad \text{и} \quad \pi_2 : A_2x+B_2y+C_2z+D_2 = 0, \tag{27.3}$$

заданные общими уравнениями в аффинной системе координат, совпадают, параллельны или пересекаются, приводятся в следующей таблице (в ней приняты обозначения: $G=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$):

Расположение плоскостей	Условие	Равносильное условие
Совпадают	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$	$\operatorname{rg} F = 1$
Параллельны	$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$	$\begin{cases} \operatorname{rg} G = 1 \\ \operatorname{rg} F = 2 \end{cases}$
Пересекаются	Строки матрицы A не пропорциональны	$\operatorname{rg} G = 2$

Если уравнения (27.3) относятся к прямоугольной декартовой системе координат, то необходимым и достаточным условием перпендикулярности плоскостей π_1 и π_2 является условие

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \tag{27.4}$$

Множество $\pi(M_0)$ всех прямых плоскости, проходящих через данную точку M_0, называется *пучком (собственным) прямых* с центром в точке M_0. Пусть l_1 и l_2 – две несовпадающие прямые пучка $\pi(M_0)$, заданные уравнениями (27.1) в некоторой аффинной системе координат Oxy. Положим $F_i(x,y) = A_i x + B_i y + C_i$, где $i = 1, 2$.

Теорема 27.1. *Прямая принадлежит пучку $\pi(M_0)$ тогда и только тогда, когда она определяется уравнением*

$$\alpha F_1(x,y) + \beta F_2(x,y) = 0 \qquad (27.5)$$

при некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, одновременно не равных нулю.

Каждая пара чисел α, β, где $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, определяет единственную прямую пучка. Уравнение (27.5) называется *уравнением пучка прямых*, проходящих через точку пересечения прямых (27.1).

Уравнение пучка $\pi(M_0)$ с центром $M_0(x_0, y_0)$ может быть записано в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0,$$

где A и B принимают все действительные значения, одновременно не равные нулю.

Множество $\pi(l)$ всех плоскостей пространства, проходящих через прямую l, называется *пучком плоскостей* с осью l. Пусть π_1 и π_2 – две пересекающиеся плоскости пучка $\pi(l)$, заданные уравнениями (27.3) в некоторой аффинной системе координат $Oxyz$. Положим $F_i(x,y,z) = A_i x + B_i y + C_i z + D_i$, где $i = 1, 2$.

Теорема 27.2. *Плоскость принадлежит пучку $\pi(l)$ тогда и только тогда, когда она определяется уравнением*

$$\alpha F_1(x,y,z) + \beta F_2(x,y,z) = 0 \qquad (27.6)$$

при некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, одновременно не равных нулю.

Уравнение (27.6) называется *уравнением пучка плоскостей*, проходящих через прямую пересечения плоскостей (27.3).

Пример 27.1. Найти необходимое и достаточное условие того, что прямая $l_3 : A_3 x + B_3 y + C_3 = 0$ принадлежит пучку прямых с центром в точке пересечения прямых $l_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ и $l_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$. Система координат аффинная.

Решение. Факт пересечения прямых l_1 и l_2 равносилен условию $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Тот факт, что прямая l_3 принадлежит пучку прямых, определенному прямыми l_1 и l_2, равносилен условию совпадения прямых

$$\alpha(A_1 x + B_1 y + C_1) + \beta(A_2 x + B_2 y + C_2) = 0 \quad \text{и} \quad l_2 : A_3 x + B_3 y + C_3 = 0$$

при некоторых α и β или условию

$$\frac{\alpha A_1 + \beta A_2}{A_3} = \frac{\alpha B_1 + \beta B_2}{B_3} = \frac{\alpha C_1 + \beta C_2}{C_3}.$$

Это означает, что третья строка матрицы $\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{bmatrix}$ является линейной комбинацией двух первых ее строк. Следовательно, искомое условие имеет вид

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0, \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0. \quad \blacksquare \qquad (27.7)$$

Пример 27.2. Найти необходимое и достаточное условие того, что три прямые $A_kx+B_ky+C_k=0$, $k=1,2,3$, пересекаются в одной точке. Система координат аффинная.

Решение. Тот факт, что три прямые пересекаются в одной точке означает, что каждые две из них пересекаются (т.е. каждый из определителей $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ B_1 & B_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix}$ отличен от нуля) и что третья прямая принадлежит пучку прямых с центром в точке пересечения двух других (т.е. $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$, как и в (27.7)).

Таким образом, искомое условие имеет вид

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} A_1 & A_3 \\ B_1 & B_3 \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix} \neq 0. \quad \blacksquare$$

Пример 27.3. Через точку пересечения прямых $3x-y=0$, $x+4y-2=0$ провести прямую, перпендикулярную к прямой $2x+7y=0$. Система координат прямоугольная.

Решение. Искомая прямая принадлежит пучку прямых, проходящих через точку пересечения прямых $3x-y=0$ и $x+4y-2=0$ (эти прямые, действительно, пересекаются, так как $\frac{3}{1} \neq \frac{-1}{4}$), поэтому она определяется уравнением

$$\alpha(3x-y)+\beta(x+4y-2)=0$$

при некоторых α, β, одновременно не равных нулю. Следовательно, общее уравнение искомой прямой имеет вид

$$(3\alpha+\beta)x+(4\beta-\alpha)y-2\beta=0.$$

Условие перпендикулярности прямых приводит к уравнению относительно α и β:

$$2(3\alpha+\beta)+7(4\beta-\alpha)=0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha=30\beta.$$

Положив $\beta=1$, получим искомое уравнение

$$91x-26y-2=0. \quad \blacksquare$$

ЗАДАЧИ

В задачах этого параграфа считается, что система координат произвольная аффинная. Случай прямоугольной декартовой системы координат оговаривается особо.

Прямые на плоскости

27.1. Установить, какие из следующих пар прямых совпадают, параллельны или пересекаются; в последнем случае найти точку пересечения:

1) $x + y - 3 = 0, \quad 2x + 3y - 8 = 0;$
2) $x - y + 5 = 0, \quad 2x - 2y + 3 = 0;$
3) $x - 2y + 4 = 0, \quad -2x + 4y - 8 = 0;$
4) $x + y + 5 = 0, \quad 2x + 3y + 10 = 0;$
5) $2x + 3y - 1 = 0, \quad 4x + 6y - 7 = 0;$
6) $7x + 9y - 62 = 0, \quad 8x + 3y + 2 = 0.$

27.2. Даны две прямые, из которых одна задана своим общим уравнением $Ax + By + C = 0$, а другая – параметрически: $x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt$. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы эти прямые: 1) пересекались; 2) были параллельны; 3) совпадали.

27.3. Две прямые заданы своими параметрическими уравнениями: $x = x_1 + a_1t$, $y = y_1 + b_1t$ и $x = x_2 + a_2t$, $y = y_2 + b_2t$. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы эти прямые: 1) пересекались; 2) были параллельны; 3) совпадали.

27.4. Установить, какие из следующих пар прямых совпадают, параллельны или пересекаются; в последнем случае найти точку пересечения:

1) $3x + 4y + 5 = 0; \quad x = -3 + 4t,\ y = 1 - 3t;$
2) $2x - 5y - 7 = 0; \quad x = 2 + t,\ y = -9 - t;$
3) $6x - 3y + 5 = 0; \quad x = 5 + t,\ y = -3 + 2t;$
4) $2x + 5y - 38 = 0; \quad x = -2 + 2t,\ y = -9 + 5t;$
5) $3x + 9y - 6 = 0; \quad x = 2 + 3t,\ y = -t.$

27.5. Установить, какие из следующих пар прямых совпадают, параллельны или пересекаются; в последнем случае найти точку пересечения:

1) $x = 3 + t,\ y = 2 - t; \quad x = 3t,\ y = -2t;$
2) $x = 5 + 4t,\ y = -2 - 2t; \quad x = 1 - 2t,\ y = 7 + t;$
3) $x = 4 - 8t,\ y = 2 + 6t; \quad x = -4 + 4t,\ y = 8 - 3t.$

27.6. Через точку $(7, 4)$ провести прямую, параллельную прямой $3x - 2y + 4 = 0$.

27.7. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $(-8, 1)$ параллельно прямой $x + y + 7 = 0$.

27.8. Через точку $M(2, 5)$ провести прямую, равноудаленную от точек $P(-1, 2)$ и $Q(5, 4)$.

27.9. Даны середины $M_1(2, 3)$, $M_2(-1, 2)$ и $M_3(4, 5)$ сторон треугольника. Составить уравнения сторон.

27.10. Зная уравнения двух сторон параллелограмма $x - 3y =$

0, $2x + 5y + 6 = 0$ и одну из его вершин $C(4, -1)$, составить уравнения двух других сторон параллелограмма.

27.11. Даны вершины треугольника $A(-1, 2)$, $B(3, -1)$ и $C(0, 4)$. Через каждую из них провести прямую, параллельную противолежащей стороне треугольника.

27.12. Написать уравнение прямой, параллельной прямой $2x+5y = 0$ и образующей вместе с осями координат треугольник, площадь которого равна 5. Система координат прямоугольная декартова.

27.13. Составить уравнение прямой, параллельной и равноудаленной от параллельных прямых $x + y - 1 = 0$, $x + y - 13 = 0$.

27.14. Доказать, что условие

$$Ax_1 + By_1 + C = Ax_2 + By_2 + C$$

необходимо и достаточно для того, чтобы прямая $Ax+By+C = 0$ была коллинеарна прямой, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, т.е. была ей параллельна или с ней совпадала.

27.15. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $x-y-1 = 0$, $x - 2y = 0$ и точка пересечения его диагоналей $M(3, -1)$. Написать уравнения двух других сторон параллелограмма.

27.16. Составить уравнения сторон параллелограмма $ABCD$, зная, что его диагонали пересекаются в точке $M(1, 6)$, а стороны AB, BC, CD и DA проходят соответственно через точки $P(3, 0)$, $Q(6, 6)$, $R(5, 9)$, $S(-5, 4)$.

27.17. Даны вершины треугольника $A(0, 1)$, $B(-2, 5)$, $C(4, 9)$. Составить уравнения сторон ромба, вписанного в данный треугольник, если одна из его вершин совпадает с точкой A, стороны, выходящие из вершины A, лежат на сторонах AC и AB данного треугольника, а вершина, противолежащая вершине A, расположена на стороне BC. Система координат прямоугольная.

27.18. В параллелограмме $ABCD$ даны уравнения сторон AB: $3x + 4y - 12 = 0$ и AD: $5x - 12y - 6 = 0$ и точка $E(-2, \frac{13}{6})$ – середина стороны BC. Найти уравнения двух других сторон параллелограмма.

27.19. Определить взаимное расположение трех прямых в каждом из следующих случаев:

1) $2x + y - 3 = 0$, $3x - 2y + 5 = 0$, $5x - y + 2 = 0$;
2) $x - 2y + 3 = 0$, $2x - 4y + 7 = 0$, $3x - 6y + 4 = 0$;
3) $x + 4y - 5 = 0$, $x - 2y + 7 = 0$, $x + 3 = 0$;
4) $x - y + 3 = 0$, $2x - 2y + 7 = 0$, $4x - 4y + 1 = 0$;

5) $2x + 3y + 5 = 0$, $x - y + 1 = 0$, $3x - 4y - 12 = 0$;
6) $3x + 2y + 6 = 0$, $9x + 6y - 5 = 0$, $5x - y + 3 = 0$.

27.20. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку пересечения прямых $2x + y - 3 = 0$, $7x - 4y + 2 = 0$.

27.21. Написать уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $7x - y + 3 = 0$, $3x + 5y - 4 = 0$ и через точку $A(2, -1)$.

27.22. Через точку пересечения прямых $3x - 5y + 2 = 0$, $5x - 2y + 4 = 0$ провести прямую, параллельную прямой $2x - y + 4 = 0$.

27.23. Через точку пересечения прямых $2x - 6y + 3 = 0$, $5x + y - 2 = 0$ провести прямые, параллельные осям координат.

27.24. Через точку пересечения прямых $x + y - 6 = 0$, $2x + y - 13 = 0$ провести прямую, отсекающую на осях координат ненулевые отрезки равной длины. Система координат прямоугольная.

27.25. Составить уравнение прямой, проходящей через точки пересечения пар прямых $2x - y = 0$, $x + 4y - 2 = 0$ и $x + 2y = 0$, $3x - 7y + 4 = 0$.

27.26. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы три прямые $A_k x + B_k y + C_k = 0$, $k = 1, 2, 3$, образовывали треугольник.

27.27. Стороны треугольника заданы уравнениями $A_k x + B_k y + C_k = 0$, $k = 1, 2, 3$. Написать уравнение его медианы, проведенной из точки пересечения первой и второй сторон.

27.28. Даны уравнения двух пересекающихся прямых $A_k x + B_k y + C_k = 0$, $k = 1, 2$, и точка $E(x_0, y_0)$, не лежащая ни на одной из этих прямых. Прямая $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ принимается за новую ось ординат, прямая $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$ – за новую ось абсцисс, причем точка E в новой системе имеет координаты $(1, 1)$. Найти выражения новых координат x', y' произвольной точки M плоскости через ее старые координаты x, y.

Плоскости в пространстве

27.29. Установить, какие из следующих пар плоскостей пересекаются, параллельны или совпадают:

1) $2x + 3y + 4z - 12 = 0$, $3x - 6y + 1 = 0$;
2) $3x - 4y + 6z + 9 = 0$, $6x - 8y - 10z + 15 = 0$;
3) $3x - 2y - 3z + 5 = 0$, $9x - 6y - 9z - 5 = 0$;
4) $x + y + z - 1 = 0$, $2x + 2y - 2z + 3 = 0$;
5) $2x - y - z - 3 = 0$, $10x - 5y - 5z - 15 = 0$.

27.30. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$: 1) была параллельна плоскости Oxy; 2) пересекала плоскость Oxy; 3) совпадала с плоскостью Oxy.

27.31. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$: 1) пересекала ось Oz; 2) была параллельна оси Oz; 3) проходила через ось Oz.

27.32. Установить, какие из следующих пар плоскостей пересекаются, параллельны или совпадают:

$$1)\ \begin{cases} x = 1 + u + v, \\ y = 2 + u, \\ z = 3 + u - v; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3 + 2u, \\ y = 2 - 2u + 4v, \\ z = 1 + u + 3v; \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} x = 1 + u + v, \\ y = 2 + u, \\ z = 3 + u - v; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1 + 4u, \\ y = 3u + v, \\ z = 4 + 2u + 2v; \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} x = 1 + u + v, \\ y = 2 + u, \\ z = 3 + u - v; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 + 2u + v, \\ y = u + 2v, \\ z = 1 + 3v. \end{cases}$$

27.33. Две плоскости заданы своими параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = x_1 + a_1u + a_2v, \\ y = y_1 + b_1u + b_2v, \\ z = z_1 + c_1u + c_2v; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = x_2 + a_3u + a_4v, \\ y = y_2 + b_3u + b_4v, \\ z = z_2 + c_3u + c_4v. \end{cases}$$

С помощью рангов матриц

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & x_2 - x_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & y_2 - y_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & z_2 - z_1 \end{bmatrix}$$

выразить условия, необходимые и достаточные для того, чтобы эти плоскости: 1) пересекались; 2) были параллельны; 3) совпадали.

27.34. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $(3, -5, 1)$ и параллельной плоскости $x - 2y + 4z = 0$.

27.35. Даны уравнения трех граней параллелепипеда $2x + 3y + 4z - 12 = 0$, $x + 3y - 6 = 0$, $z + 5 = 0$ и одна из его вершин $(6, -5, 1)$. Составить уравнения трех остальных граней параллелепипеда.

27.36. Составить уравнения плоскостей, равноудаленных от точек $A(1, 3, -4)$, $B(1, 1, 2)$, $C(-3, -1, 2)$ и проходящих через начало координат.

27.37. Даны три плоскости: $A_k x + B_k y + C_k z + D_k = 0$, $k = 1, 2, 3$. С помощью матриц

$$G = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad F = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{bmatrix}$$

выразить условия, необходимые и достаточные для того, чтобы:

1) эти плоскости имели единственную общую точку;

2) эти плоскости были попарно различны и имели единственную общую прямую;

3) эти плоскости попарно пересекались и линия пересечения каждых двух плоскостей была параллельна третьей плоскости (т.е. плоскости образовывали призму);

4) две плоскости были параллельны, а третья плоскость их пересекала;

5) эти плоскости были попарно параллельны;

6) две плоскости совпадали, а третья их пересекала;

7) две плоскости совпадали, а третья плоскость была им параллельна;

8) эти плоскости совпадали.

27.38. Определить взаимное расположение трех плоскостей в каждом из следующих случаев:

1) $2x - 4y + 5z - 21 = 0$, $6x + y + z - 30 = 0$, $x - 3z + 18 = 0$;

2) $2x + 4y - 6z - 1 = 0$, $3x + 6y - 9z - 5 = 0$, $x + 2y - 3z = 0$;

3) $15x + 8y - z - 2 = 0$, $7x + 2y + z = 0$, $3x - y + 2z + 1 = 0$;

4) $5x - 2y + 4 = 0$, $3x + z - 5 = 0$, $8x - 2y + z + 7 = 0$;

5) $6x + 2y + 12z - 3 = 0$, $5y - 7z - 10 = 0$, $3x + y + 6z + 12 = 0$.

27.39. Написать уравнение плоскости, проходящей через начало координат и через линию пересечения плоскостей $2x + 5y - 6z + 4 = 0$ и $3y + 2z + 6 = 0$.

27.40. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $(-3, 1, 0)$ и через прямую пересечения плоскостей $x + 2y - z + 4 = 0$ и $3x - y + 2z - 1 = 0$.

27.41. Через линию пересечения плоскостей $6x - y + z = 0$, $5x + 3z - 10 = 0$ провести плоскость, параллельную оси Ox.

27.42. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $x + 2y + 3z - 4 = 0$, $3x + z - 5 = 0$ и отсекающей на осях Oy и Oz ненулевые отрезки равной длины. Система координат прямоугольная.

27.43. В тетраэдр, ограниченный плоскостями координат и плоскостью $2x - 3y + 4z + 18 = 0$, вписан куб так, что одна из его вершин лежит в начале координат, три ребра, выходящих из этой вершины, направлены по осям координат, а вершина, противоположная началу координат, лежит в данной плоскости. Определить длину ребра куба. Система координат прямоугольная.

27.44. Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $2x - z = 0$, $x + y - z + 5 = 0$ и перпендикулярной к плоскости $7x - y + 4z - 3 = 0$. Система координат прямоугольная.

27.45. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат, точку $(1, 2, 3)$ и перпендикулярной к плоскости $x - y + 2z - 4 = 0$. Система координат прямоугольная.

27.46. Составить уравнение плоскости, перпендикулярной к плоскости $x + 3y + 5z - 10 = 0$ и проходящей через линию пересечения данной плоскости с плоскостью Oxy. Система координат прямоугольная.

27.47. В пучке, определяемом плоскостями $2x + y - 3z + 2 = 0$ и $5x + 5y - 4z + 3 = 0$, найти две перпендикулярные друг к другу плоскости, из которых одна проходит через точку $(4, -3, 1)$. Система координат прямоугольная.

27.48. В пучке, определяемом плоскостями $3x + y - 2z - 6 = 0$ и $x - 2y + 5z - 1 = 0$, найти плоскости, перпендикулярные к этим плоскостям. Система координат прямоугольная.

27.49. Даны уравнения граней тетраэдра $ABCD$:

$$(ABC):\ x + 2y + z + 2 = 0, \qquad (ABD):\ x + y - 1 = 0,$$
$$(ACD):\ x - y - z = 0, \qquad (BCD):\ 3x + z + 1 = 0.$$

Написать уравнение плоскости, проходящей через ребро AB и середину ребра CD.

27.50. Показать, что три плоскости $x + 2y - z - 4 = 0$, $3x - 2y + 3z - 6 = 0$, $4y - 3z + 3 = 0$ образуют призму, и написать уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения первых двух граней призмы и параллельной ее третьей грани.

27.51. Даны уравнения граней тетраэдра $ABCD$:

$(ABC): x + 2y - 3z - 6 = 0,\qquad (ABD): 2y + 5z - 4 = 0,$
$(ACD): 3x + z + 1 = 0,\qquad (BCD): x + 2y = 0.$

Написать уравнение плоскости, проходящей через ребро AB и параллельной противоположному ребру CD.

27.52. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку пересечения плоскостей $x - y = 0$, $x + y - 2z + 1 = 0$, $2x + z - 4 = 0$ и

1) содержащей ось Oy;

2) параллельной плоскости Oxz;

3) проходящей через начало координат и точку $(2, 1, 7)$.

27.53. При каком необходимом и достаточном условии четыре плоскости $A_k x + B_k y + C_k z + D_k = 0$, $k = \overline{1, 4}$, пересекаются в одной точке?

27.54. При каком необходимом и достаточном условии четыре плоскости $A_k x + B_k y + C_k z + D_k = 0$, $k = \overline{1, 4}$, образуют тетраэдр?

§28. Полуплоскости и полупространства

Пусть прямая l в аффинной системе координат Oxy задана уравнением

$$Ax + By + C = 0. \tag{28.1}$$

Теорема 28.1. *Точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ принадлежат разным полуплоскостям относительно прямой l тогда и только тогда, когда*

$$(Ax_1 + By_1 + C)(Ax_2 + By_2 + C) < 0. \tag{28.2}$$

Полуплоскость, для точек $M(x, y)$ которой $Ax + By + C > 0$, называется *положительной полуплоскостью* относительно уравнения (28.1) прямой l и обозначается символом l_+, а полуплоскость, для точек которой $Ax + By + C < 0$, – *отрицательной полуплоскостью* и обозначается l_-.

Теорема 28.2. *Вектор нормали $\mathbf{n} = \{A, B\}$ к прямой l: $Ax + By + C = 0$, отложенный от любой точки прямой, направлен в сторону положительной полуплоскости.*

Пусть плоскость π в аффинной системе координат $Oxyz$ задана уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{28.3}$$

Теорема 28.3. *Точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ принадлежат разным полупространствам относительно плоскости π тогда и только тогда, когда*

$$(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D) < 0.$$

Полупространство, для точек $M(x, y, z)$ которого $Ax + By + Cz + D > 0$, называется *положительным полупространством* относительно уравнения (28.3) плоскости π и обозначается символом π_+, а полупространство, для точек которого $Ax+By+Cz+D<0$, – *отрицательным полупространством* и обозначается π_-.

Теорема 28.4. *Вектор нормали* $\mathbf{n}=\{A,B,C\}$ *к плоскости* π: $Ax+By+Cz+D=0$, *отложенный от любой точки плоскости, направлен в сторону положительного полупространства.*

Пример 28.1. Дан треугольник ABC: $A(3,1)$, $B(-2,4)$, $C(1,0)$ и прямая $l: x-7y+5=0$. Установить, пересекает ли эта прямая стороны треугольника или их продолжения.

Решение. Выясним, в каких полуплоскостях относительно уравнения данной прямой находятся вершины треугольника:

$$3-7+5>0 \Longrightarrow A\in l_+;\ -2-28+5<0 \Longrightarrow B\in l_-;\ 1-0+5>0 \Longrightarrow C\in l_+.$$

Так как точки A и B находятся по разные стороны от прямой l, то эта прямая пересекает сторону AB. Аналогично приходим к выводу, что прямая l пересекает сторону BC. ∎

Пример 28.2. Установить, при каком необходимом и достаточном условии точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ лежит между двумя параллельными плоскостями $Ax+By+Cz+D_1=0$ и $Ax+By+Cz+D_2=0$.

Решение. Так как нормали к плоскостям совпадают: $\mathbf{n}_1=\mathbf{n}_2=\{A,B,C\}$, то точка M_0 лежит между этими плоскостями тогда и только тогда, когда она принадлежит разноименным полупространствам относительно уравнений этих плоскостей, т.е.

$$(Ax_0+By_0+Cz_0+D_1)(Ax_0+By_0+Cz_0+D_2)<0. \quad \blacksquare$$

Пример 28.3. Плоскости $\pi_1: 5x+y+2z-7=0$, $\pi_2: 7x+y+3z-4=0$, $\pi_3: 2x+z-3=0$ образуют призму. Расположена ли точка $M_0(-1,0,4)$ внутри этой призмы?

Решение. На каждом ребре призмы укажем по точке, взяв, например, в качестве ее абсциссы $x=0$:

$$\pi_1\cap\pi_2: \begin{cases} 5x+y+2z-7=0, \\ 7x+y+3z-4=0, \\ x=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=0, \\ y=13, \\ z=-3 \end{cases} \Longrightarrow M_{12}(0,13,-3);$$
$$\pi_1\cap\pi_3: \begin{cases} 5x+y+2z-7=0, \\ 2x+z-3=0, \\ x=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=0, \\ y=1, \\ z=3 \end{cases} \Longrightarrow M_{13}(0,1,3);$$
$$\pi_2\cap\pi_3: \begin{cases} 7x+y+3z-4=0, \\ 2x+z-3=0, \\ x=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x=0, \\ y=-5, \\ z=3 \end{cases} \Longrightarrow M_{23}(0,-5,3).$$

Точка M_0 лежит внутри призмы тогда и только тогда, когда она расположена в тех же полупространствах относительно уравнений граней призмы, что и точки, лежащие на противоположных ребрах:

$$\begin{array}{ll} 0-3-3<0 \Rightarrow M_{12}\in(\pi_3)_-; & -2+4-3<0 \Rightarrow M_0\in(\pi_3)_-; \\ 0+1+9-4>0 \Rightarrow M_{13}\in(\pi_2)_+; & -7+0+12-4>0 \Rightarrow M_0\in(\pi_2)_+; \\ 0-5+6-7<0 \Rightarrow M_{23}\in(\pi_1)_-; & -5+0+8-7<0 \Rightarrow M_0\in(\pi_1)_-. \end{array}$$

Таким образом, точка M_0 расположена внутри призмы. ∎

ЗАДАЧИ

В задачах этого параграфа считается, что система координат произвольная аффинная.

Прямая на плоскости

28.1. Даны две прямые (AC) : $2x + 3y - 5 = 0$, (BD) : $x - y - 1 = 0$ и пять точек $P(3, 1)$, $Q(2, 2)$, $R(-2, 1)$, $S(1, -1)$, $T(4, 0)$. Обозначая через $\angle AMB$ тот из четырех углов, образованных данными прямыми, в котором лежит точка P, а через $\angle CMD$ – угол, ему вертикальный, установить, в каких углах лежат остальные четыре точки.

28.2. В каждом из следующих случаев определить, принадлежат ли две данные точки одному углу, смежным углам или вертикальным углам, образованным прямыми, заданными своими уравнениями:

1) $(3, 5)$, $(-2, 1)$, $3x - y + 8 = 0$, $2x + 5y - 6 = 0$;
2) $(6, -2)$, $(5, 2)$, $x + y - 3 = 0$, $2x + 3y = 0$;
3) $(2, -2)$, $(3, 6)$, $x - 2y + 1 = 0$, $2x + 6y - 9 = 0$.

28.3. Две параллельные прямые $2x-5y+6 = 0$ и $2x-5y-7 = 0$ делят плоскость на три области: полосу, заключенную между этими прямыми, и две полуплоскости вне этой полосы. Установить, каким областям принадлежат точки $A(2, 1)$, $B(3, 2)$, $C(1, 1)$, $D(2, 8)$, $E(7, 1)$, $F(-4, 6)$.

28.4. Даны две точки $A(-3, 1)$, $B(5, 4)$ и прямая $x-2y+1 = 0$. Установить, пересекает ли данная прямая отрезок AB или его продолжение за точку A или за точку B.

28.5. Доказать, что прямая $5x - y - 5 = 0$ пересекает отрезок прямой $3x - 2y - 6 = 0$, заключенный между осями координат.

28.6. Даны четыре точки $A(5, 3)$, $B(1, 2)$, $C(3, 0)$, $D(2, 4)$. Установить, принадлежит ли точка M пересечения прямых AB и CD отрезкам AB и CD или их продолжениям.

28.7. В каком отношении прямая $2x-y+5 = 0$ делит отрезок, начало которого находится в точке $(-5, 4)$, а конец – в точке $(2, 1)$?

28.8. При каких значениях параметра u точки прямой $x = 2+5u$, $y = -1+u$ принадлежат отрезку этой прямой, заключенному между двумя прямыми $x + 4y - 1 = 0$, $x + y = 0$?

28.9. При каком необходимом и достаточном условии точка

(x_0, y_0) лежит между двумя параллельными прямыми $Ax + By + C_1 = 0$ и $Ax + By + C_2 = 0$?

28.10. Даны три прямые $Ax + By + C_1 = 0$, $Ax + By + C_2 = 0$, $Ax + By + D = 0$. Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы третья прямая лежала в полосе, образованной первой и второй прямыми.

28.11. Стороны треугольника ABC заданы уравнениями AB: $2x - y + 2 = 0$, $BC : x + y - 4 = 0$, AC: $2x + y = 0$. Определить положение точек $M(3, 1)$, $N(7, -6)$, $P(3, 2)$ относительно этого треугольника.

28.12. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы точка (x_0, y_0) лежала внутри треугольника, образованного прямыми $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, $A_3x + B_3y + C_3 = 0$.

28.13. Стороны треугольника ABC заданы уравнениями AB: $3x - y + 4 = 0$, BC: $2x - y + 1 = 0$, CA: $x - 2y = 0$. Определить положение прямой $2x - y + 3 = 0$ относительно этого треугольника.

Плоскость в пространстве

28.14. Определить положение точек $A(2, 5, 1)$, $B(2, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$, $D(0, 1, -9)$, $E(-1, -3, 0)$ относительно плоскости $2x + 2y + z + 2 = 0$.

28.15. Даны две плоскости $2x + z = 0$, $x + y + 3z - 5 = 0$ и точки $A(2, 1, 1)$, $B(1, 0, 3)$, $C(0, 0, 1)$, $D(-1, 5, 1)$, $E(1, 4, -3)$. Установить, какие из точек B, C, D, E лежат в одном двугранном угле с точкой A, какие в смежных с ним углах и какие в угле, к нему вертикальном.

28.16. Даны две параллельные плоскости $3x + 4y + 2z - 10 = 0$, $3x + 4y + 2z + 5 = 0$ и точки $A(1, 1, 1)$, $B(2, 0, 0)$, $C(5, 6, 1)$, $D(-4, 0, 1)$. Определить положение этих точек относительно данных плоскостей.

28.17. Даны две точки $A(-3, 1, 5)$, $B(5, 4, 2)$ и плоскость $2x - 4y + z + 14 = 0$. Установить, пересекает ли данная плоскость отрезок AB или его продолжение за точку A или за точку B.

28.18. Даны две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы данная плоскость пересекала: 1) прямую M_1M_2; 2) отрезок M_1M_2 в его внутренней точке; 3) продолжение отрезка M_1M_2 за точку M_1; 4) продолжение отрезка M_1M_2 за точку M_2.

28.19. При каком необходимом и достаточном условии плоскость $Ax + By + Cz + E = 0$ лежит между параллельными плоскостями $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ и $Ax + By + Cz + D_2 = 0$?

28.20. Даны две точки $A(3, 5, 1)$, $B(2, -6, 3)$. Найти отношение, в котором делит отрезок AB точка C пересечения прямой AB с плоскостью $2x - 3y + 6z - 1 = 0$.

28.21. Три плоскости $A_kx + B_ky + C_kz + D_k = 0$, $k = 1, 2, 3$, образуют призму. При каком необходимом и достаточном условии точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежит внутри призмы?

28.22. Грани тетраэдра заданы уравнениями $A_kx + B_ky + C_kz + D_k = 0$, $k = \overline{1, 4}$. Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вершина тетрадра, противолежащая грани $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, лежали по разные стороны от этой грани.

28.23. Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежала внутри тетраэдра, образованного плоскостями $A_kx + B_ky + C_kz + D_k = 0$, $k = \overline{1, 4}$.

§29. Метрические задачи в прямоугольной декартовой системе координат

Если Oxy – прямоугольная декартова система координат, то угловой коэффициент k прямой $y = kx + b$ есть тангенс угла от положительного направления оси Ox до этой прямой. При этом, если φ – угол от прямой с угловым коэффициентом k_1 до прямой с угловым коэффициентом k_2 (при условии, что эти прямые не перпендикулярны), то

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}.$$

Прямые с угловыми коэффициентами k_1 и k_2 перпендикулярны тогда и только тогда, когда

$$k_1k_2 = -1.$$

Теорема 29.1. *В прямоугольной декартовой системе координат Oxy расстояние $\rho(M_0, l)$ от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $l : Ax + By + C = 0$ определяется формулой*

$$\rho(M_0, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Теорема 29.2. *В прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $\pi : Ax + By + Cz + D = 0$ определяется формулой*

$$\rho(M_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Теорема 29.3. *В прямоугольной декартовой системе координат Oxy угол φ между прямыми $l_k: A_kx+B_ky+C_k=0$, $k=1,2$, совпадающий с углом между их нормалями, определяется формулой*

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Теорема 29.4. *В прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ угол φ между плоскостями $\pi_k: A_kx+B_ky+C_kz+D_k=0$, $k=1,2$, совпадающий с углом между их нормалями, определяется формулой*

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Пример 29.1. Даны две пересекающиеся прямые $l_k: A_kx+B_ky+C_k=0$, $k=1,2$, и точка $M_0(x_0,y_0)$, не лежащая ни на одной из них. Написать уравнение биссектрисы того угла между прямыми, в котором лежит точка M_0. Система координат прямоугольная.

Решение. Точка $M(x,y)$ лежит на биссектрисе тогда и только тогда, когда $\rho(M,l_1)=\rho(M,l_2)$, т.е.

$$\frac{|A_1x+B_1y+C_1|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}} = \frac{|A_2x+B_2y+C_2|}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}. \tag{29.1}$$

Тот факт, что точки $M(x,y)$ и $M_0(x_0,y_0)$ лежат внутри одного угла между прямыми l_1 и l_2 означает, что они находятся в одинаковых полуплоскостях как относительно прямой l_1, так и относительно прямой l_2. Следовательно,

$$\begin{gathered}(A_1x+B_1y+C_1)(A_1x_0+B_1y_0+C_1)>0,\\ (A_2x+B_2y+C_2)(A_2x_0+B_2y_0+C_2)>0.\end{gathered}$$

Отсюда и из (29.1) следует, что уравнение искомой биссектрисы имеет вид

$$\begin{aligned}&\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}} = \frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}},\\ &\qquad\text{если } (A_1x_0+B_1y_0+C_1)(A_2x_0+B_2y_0+C_2)>0,\\ &\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}} = -\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}},\\ &\qquad\text{если } (A_1x_0+B_1y_0+C_1)(A_2x_0+B_2y_0+C_2)<0. \quad \blacksquare\end{aligned} \tag{29.2}$$

Пример 29.2. Даны две пересекающиеся прямые $l_k: A_kx+B_ky+C_k=0$, $k=1,2$, и точка $M_0(x_0,y_0)$, не лежащая ни на одной из них. Вычислить косинус того угла между этими прямыми, в котором лежит точка M_0. Система координат прямоугольная.

Решение. Опустим из точки M_0 на данные прямые перпендикуляры M_0M_1 и M_0M_2 (рис. 1–4). Обозначим через α искомый угол, а через φ – угол между нормалями $\mathbf{n}_1=\{A_1,B_1\}$ и $\mathbf{n}_2=\{A_2,B_2\}$ к прямым l_1 и l_2. Так как вектор нормали к прямой l_k направлен в сторону положительной полуплоскости относительно данной прямой, то возможен один из указанных на рис. 1–4 вариантов расположения точки M_0.

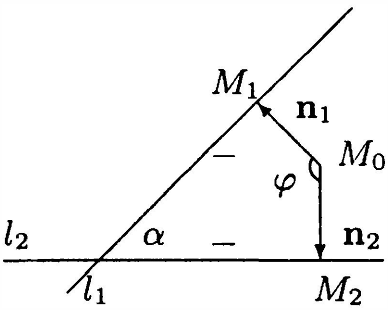


Рис. 1

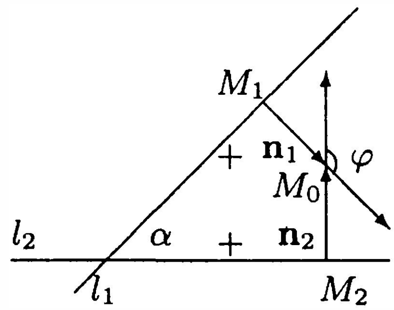


Рис. 2

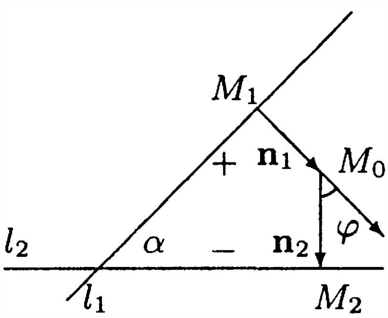


Рис. 3

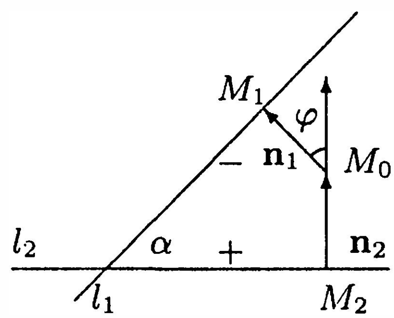


Рис. 4

Как видно из рисунков, если угол, в котором лежит точка M_0, образован полуплоскостями (относительно прямых l_1 и l_2) одинакового знака (рис. 1, рис. 2), то $\alpha = \pi - \varphi$. Если же полуплоскости имеют разные знаки (рис. 3, рис. 4), то $\alpha = \varphi$. Таким образом,

$$\alpha = \begin{cases} \varphi, & \text{если } (A_1x_0 + B_1y_0 + C_1)(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2) < 0, \\ \pi - \varphi, & \text{если } (A_1x_0 + B_1y_0 + C_1)(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2) > 0, \end{cases} \tag{29.3}$$

при этом

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} && \text{в первом случае;} \\ \cos\alpha &= -\frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} && \text{во втором случае.} \end{aligned} \tag{29.4}$$

■

Пример 29.3. Стороны треугольника ABC заданы своими уравнениями

$$AB: 7x - y - 3 = 0, \quad AC: x + y - 5 = 0, \quad BC: x - y - 9 = 0.$$

Составить уравнение биссектрисы внутреннего угла A треугольника.

Решение. В силу (29.1) уравнение биссектрис угла между прямыми AB и AC имеет вид

$$\frac{|7x - y - 3|}{\sqrt{50}} = \frac{|x + y - 5|}{\sqrt{2}}.$$

Найдем координаты точек B и C:

$$\begin{cases} 7x - y - 3 = 0, \\ x - y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(-1, -10), \quad \begin{cases} x + y - 5 = 0, \\ x - y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(7, -2).$$

Так как искомая прямая является биссектрисой внутреннего угла треугольника, то вершины B и C лежат относительно нее в разных полуплоскостях. Для точки B: $\begin{cases} 7x - y - 3 = 0, \\ x + y - 5 = -16 < 0, \end{cases}$ для точки C: $\begin{cases} 7x - y - 3 = 48 > 0, \\ x + y - 5 = 0. \end{cases}$ Поэтому искомая биссектриса имеет вид

$$\frac{7x - y - 3}{5} = -(x + y - 5) \quad \text{или} \quad 3x + y - 7 = 0. \quad \blacksquare$$

Пример 29.4. Составить уравнение биссекторной плоскости тупого двугранного угла между плоскостями $\pi_1 : 3x+5y-4z+1 = 0$ и $\pi_2 : x-z-5 = 0$. Система координат прямоугольная.

Решение. Уравнение биссекторных плоскостей имеет вид (см. пример 29.1 в очевидной модификации для плоскостей)

$$\frac{|3x + 5y - 4z + 1|}{\sqrt{50}} = \frac{|x - z - 5|}{\sqrt{2}}. \tag{29.5}$$

Пусть α – тупой угол между плоскостями π_1 и π_2, а φ – угол между их нормалями $\mathbf{n}_1 = \{3, 5, -4\}$ и $\mathbf{n}_2 = \{1, 0, -1\}$. Так как $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = 5 > 0$, то угол φ – острый. Следовательно, $\alpha = \pi - \varphi$ и согласно (29.3) для всех точек искомой биссекторной плоскости $(3x + 5y - 4z + 1)(x - z - 5) > 0$, поэтому уравнение (29.5) приобретет вид

$$\frac{3x + 5y - 4z + 1}{5} = x - z - 5 \quad \text{или} \quad 2x - 5y - z - 26 = 0. \quad \blacksquare$$

Пример 29.5. Через точку $(3, -1)$ провести прямую, отстоящую от точки $(2, -3)$ на расстоянии $9/\sqrt{17}$.

Решение. Пусть $Ax + By + C = 0$ – общее уравнение искомой прямой. Найдем коэффициенты A, B, C, пользуясь условиями задачи. Имеем

$$\begin{cases} 3A - B + C = 0, \\ \dfrac{|2A - 3B + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \dfrac{9}{\sqrt{17}}. \end{cases} \tag{29.6}$$

Так как A, B, C определены с точностью до постоянного множителя, то можно считать, что $A^2 + B^2 = 17$, $2A - 3B + C > 0$. Тогда система (29.6) перейдет в систему

$$\begin{cases} 3A - B + C = 0, \\ 2A - 3B + C = 9, \\ A^2 + B^2 = 17, \end{cases}$$

из которой находим, что $A_1 = 1$, $B_1 = 4$, $C_1 = 3$ и $A_2 = \dfrac{13}{5}$, $B_2 = \dfrac{16}{5}$, $C_2 = -\dfrac{23}{5}$. Таким образом, искомые прямые имеют уравнения $x + 4y + 3 = 0$ и $13x + 16y - 23 = 0$. $\blacksquare$

Пример 29.6. Основанием равнобедренного треугольника служит прямая $x + 2y = 0$, а одной из боковых сторон – прямая $x - y + 5 = 0$. Составить уравнение другой боковой стороны, зная, что она проходит через точку $M(4, 2)$.

Решение. 1-й способ. Обозначим через k_1, k_2, k_3 угловые коэффициенты основания, данной и искомой боковых сторон соответственно, через α и β – углы от основания до данной и искомой боковых сторон. Так как $k_1 = -1/2$, $k_2 = 1$, $\beta = -\alpha$, то

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = 3, \quad \operatorname{tg}\beta = -3.$$

С другой стороны,

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{k_3 - k_1}{1 + k_1 k_3}.$$

Отсюда $k_3 = 7$ и уравнение искомой прямой имеет вид

$$y - 2 = k_3(x - 4) \quad \Longleftrightarrow \quad 7x - y - 26 = 0.$$

2-й способ. Так как $\operatorname{tg}\alpha = 3$, то α – острый угол и $\sin\alpha = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$; следовательно, $\sin\beta = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$. Направляющий вектор $\mathbf{a} = \{m, n\}$ может быть получен поворотом направляющего вектора основания $\{-2, 1\}$ на угол β, поэтому

$$\mathbf{a} = \left\{-2 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} + 1 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}}; 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} + 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}\right\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{10}}; \frac{7}{\sqrt{10}}\right\}.$$

Так как $\mathbf{a} \parallel \{1, 7\}$, то искомое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - 4 & y - 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 7x - y - 26 = 0.$$

3-й способ. Пусть $Ax + By + C = 0$ – уравнение искомой прямой. Тогда

$$\cos\beta = \frac{A + 2B}{\sqrt{5}\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Так как A и B определены с точностью до постоянного множителя, то можно считать, что $A^2 + B^2 = 2$. Следовательно,

$$\begin{cases} A + 2B = 1, \\ A^2 + B^2 = 2. \end{cases}$$

Отсюда находим две пары (A, B): $(-1, 1)$ и $\left(\frac{7}{5}, -\frac{1}{5}\right)$, которые отвечают прямым, образующим с основанием угол, косинус которого равен $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$. Первая пара $(-1, 1)$ соответствует данной боковой стороне, а вторая пара $\left(\frac{7}{5}, -\frac{1}{5}\right)$ – искомой. Таким образом, искомое уравнение имеет вид $7x - y + C = 0$ или (с учетом того, что прямая проходит через точку $M(4, 2)$) $7x - y - 26 = 0$. ■

Пример 29.7. Составить уравнение прямой, отстоящей от точки $M(1, 1)$ на расстояние 5 и образующей с прямой $l: 3x + y + 2 = 0$ угол $\alpha = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Решение. Поворачивая вектор $\{3, 1\}$ нормали к прямой l на угол α и $-\alpha$, получим нормальные векторы $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ к искомым прямым:

$$\mathbf{n}_1 = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{10} \end{bmatrix}, \ \mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, уравнения искомых прямых имеют вид $y + C = 0$ и $3x - 4y + D = 0$. Так как $\rho(M, l) = 5$, то

$$\frac{|C+1|}{1} = 5 \quad \text{и} \quad \frac{|3 - 4 + D|}{5} = 5,$$

отсюда находим $C_1 = 4$, $C_2 = -6$, $D_1 = 26$, $D_2 = -24$ и уравнения искомых прямых

$$y + 4 = 0, \quad y - 6 = 0, \quad 3x - 4y + 26 = 0, \quad 3x - 4y - 24 = 0. \quad \blacksquare$$

ЗАДАЧИ

В задачах этого параграфа считается, что система координат прямоугольная декартова.

Прямая на плоскости

29.1. Даны вершины треугольника $A(4, 6)$, $B(-4, 0)$ и $C(-1, -4)$. Составить уравнение высоты, опущенной из вершины A на сторону BC.

29.2. Найти проекцию точки $(-5, 6)$ на прямую $7x - 13y - 105 = 0$.

29.3. Найти точку, симметричную точке $M(-2, 9)$ относительно прямой $2x - 3y + 18 = 0$.

29.4. Составить уравнения высот треугольника, зная уравнения его сторон: $AB : 2x - y + 3 = 0$, $BC : x + 5y - 7 = 0$, $AC : 3x - 2y + 6 = 0$.

29.5. Даны две вершины треугольника $A(-6, 2)$, $B(2, -2)$ и точка $H(1, 2)$ пересечения его высот. Вычислить координаты третьей вершины C.

29.6. В треугольнике ABC известны сторона AB: $4x + y - 12 = 0$, высота BH: $5x - 4y - 15 = 0$ и высота AL: $2x + 2y - 9 = 0$. Написать уравнения двух остальных сторон и третьей высоты CK этого треугольника.

29.7. Точка пересечения высот треугольника лежит в начале координат. Известны уравнения двух сторон этого треугольника:

$x + 3y - 1 = 0$, $3x + 5y - 6 = 0$. Составить уравнение третьей стороны.

29.8. Составить уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $A(3, -4)$ и уравнения двух высот: $7x - 2y - 1 = 0$ и $2x - 7y - 6 = 0$.

29.9. Даны две вершины треугольника $A(2, -3)$ и $B(5, 1)$, уравнение стороны BC: $x+2y-7 = 0$ и медианы AM: $5x-y-13 = 0$. Составить уравнение высоты, опущенной из вершины C на сторону AB.

29.10. На прямой $x-3y+1 = 0$ найти точку, равноудаленную от двух точек $(-3, 1)$ и $(5, 4)$.

29.11. Написать уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин $(1, 7)$ и уравнения $2x + 3y - 10 = 0$, $x - 2y + 3 = 0$ перпендикуляров, восстановленных в серединах сторон, выходящих из этой вершины.

29.12. Найти общую вершину M двух равнобедренных треугольников AMB и CMD, зная концы их оснований $A(0, 0)$, $B(0, 1)$, $C(-2, 1)$, $D(1, 1)$.

29.13. Дано уравнение стороны прямоугольника $2x+3y-6 = 0$ и точка пересечения его диагоналей $(5, 7)$. Написать уравнения остальных сторон прямоугольника, зная, что одна из них проходит через точку $(-2, 1)$.

29.14. На прямой $x + y - 3 = 0$ найти точку M такую, чтобы лучи MA и MB, выходящие из этой точки и проходящие через точки $A(-2, -1)$ и $B(1, 3)$, образовывали с данной прямой равные углы.

29.15. Написать уравнения прямых, проходящих соответственно через точки $(15, 10)$ и $(10, 5)$, зная, что прямая $x+2y = 0$ делит пополам углы, образуемые искомыми прямыми.

29.16. Вершина треугольника находится в точке $(-2, 9)$, а биссектрисами двух его углов служат прямые $2x - 3y + 18 = 0$, $y + 2 = 0$. Написать уравнение стороны треугольника, противолежащей данной вершине.

29.17. Написать уравнения сторон равнобедренной трапеции, зная середины ее оснований $(1, 1)$, $(2, 8)$ и точки $(4, -3)$, $(-15, 14)$ на ее боковых сторонах.

29.18. Дано уравнение стороны ромба $x+3y-8 = 0$ и уравнение его диагонали $2x + y + 4 = 0$. Написать уравнение остальных сторон ромба, зная, что точка $(-9, -1)$ лежит на стороне, параллельной данной.

29.19. Через точку $(3,1)$ провести прямые, наклоненные к прямой $2x+3y-1=0$ под углом $45°$.

29.20. Через начало координат провести прямые, образующие с прямой $5x-6y+2=0$ углы, тангенсы которых равны $7/6$ и $-7/6$.

29.21. Даны две точки $A(3,3)$ и $B(0,2)$. На прямой $x+y-4=0$ найти точку, из которой отрезок AB виден под углом $45°$.

29.22. Для каждой из следующих пар прямых найти тангенс угла от первой прямой до второй прямой:

1) $2x+3y=0$, $\quad x-y+5=0$;
2) $x-3y+2=0$, $\quad 2x+y=0$;
3) $2x+5y-3=0$, $\quad 5x+2y-6=0$;
4) $3x+4y-12=0$, $\quad 5x-12y+60=0$.

29.23. Основанием равнобедренного треугольника служит прямая $2x+3y=0$, его вершина находится в точке $(2,6)$, тангенс угла при основании равен $3/2$. Написать уравнения боковых сторон треугольника.

29.24. Вершина равнобедренного треугольника находится в точке $(-7,15)$, а середина его основания – в точке $(1,3)$. Составить уравнения сторон треугольника, зная, что тангенс угла при основании равен 4.

29.25. Даны уравнения основания равнобедренного треугольника $x+y-1=0$ и боковой его стороны $x-2y-2=0$, точка $(-2,0)$ лежит на другой боковой стороне. Найти уравнение третьей стороны треугольника.

29.26. Основанием равнобедренного треугольника служит прямая $2x+3y=0$, а боковой стороной – прямая $5x-12y=0$. Написать уравнение другой боковой стороны треугольника, зная, что она проходит через точку $(2,6)$.

29.27. Концы основания равнобедренного треугольника находятся в точках $A(-3,4)$, $B(6,-2)$, тангенс угла при основании равен $3/2$. Найти координаты вершины C, зная, что начало координат и точка C лежат по разные стороны от прямой AB.

29.28. Даны вершина $B(-3,-1)$ равнобедренного треугольника, вершина $C(2,1)$ в его основании и $\cos\varphi=\frac{3}{5}$ угла φ при вершине B. Составить уравнения сторон треугольника.

29.29. Точка $A(2,0)$ является вершиной правильного треугольника, а противолежащая ей сторона лежит на прямой $x+$

$y - 1 = 0$. Составить уравнения двух других сторон.

29.30. Зная уравнения двух сторон треугольника AB: $2x + 3y - 6 = 0$, AC: $x + 2y - 5 = 0$ и угол при вершине B, равный 45°, написать уравнение высоты, опущенной из вершины A на сторону BC треугольника.

29.31. Даны две вершины $A(1, 2)$ и $B(3, 4)$ треугольника и косинусы внутренних углов A и B, прилежащих к данным вершинам: $\cos A = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos B = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Составить уравнения сторон треугольника и найти его третью вершину.

29.32. Дана вершина $C(-3, 2)$ треугольника ABC, тангенсы его внутренних углов: $\operatorname{tg} A = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} B = \frac{4}{3}$ и уравнение $2x - y - 2 = 0$ стороны AB. Составить уравнения двух других сторон треугольника.

29.33. Даны две прямые: $x + 3y = 0$ и $x - y + 8 = 0$. Найти третью прямую так, чтобы вторая из данных прямых была биссектрисой угла между первой из данных прямых и искомой прямой.

29.34. Зная уравнение стороны треугольника $x + 7y - 6 = 0$ и уравнения биссектрис $x + y - 2 = 0$, $x - 3y - 6 = 0$, выходящих из концов этой стороны, найти координаты вершины, противолежащей данной стороне.

29.35. Даны уравнения сторон треугольника $3x + y - 3 = 0$, $3x + 4y = 0$ и уравнение $x - y + 5 = 0$ биссектрисы одного из внутренних углов этого треугольника. Составить уравнение третьей стороны.

29.36. Определить тангенсы внутренних углов треугольника, стороны которого заданы уравнениями $x + 2y = 0$, $3x - y = 0$, $x + y - 1 = 0$.

29.37. Найти косинус того угла между двумя прямыми l_1 и l_2, в котором лежит точка M, если:

1) $l_1 : x + 5y - 2 = 0, \quad l_2 : 10x + 2y + 1 = 0, \quad M(1, 1)$;

2) $l_1 : 2x - 6y - 3 = 0, \quad l_2 : x + 7y + 5 = 0, \quad M(4, 1)$.

29.38. В каком (остром или тупом) угле, образованном прямыми $2x - y + 3 = 0$, $x - 4y = 0$, лежит точка $(2, -1)$?

29.39. Даны три прямые $A_k x + B_k y = 0$, $k = 1, 2, 3$, проходящие через начало координат. При каком необходимом и достаточном условии третья прямая расположена в остром угле, образованном двумя первыми прямыми?

29.40. Составить уравнения прямых, параллельных прямой

$5x + 12y - 1 = 0$ и отстоящих от нее на расстоянии, равном 5.

29.41. Найти расстояние между параллельными прямыми $Ax + By + C_1 = 0$ и $Ax + By + C_2 = 0$.

29.42. Составить уравнения двух параллельных прямых, зная, что расстояние между ними равно $4/\sqrt{5}$ и что на оси Ox они отсекают отрезки, равные соответственно -3 и -7.

29.43. Составить уравнения биссектрис углов между следующими прямыми:

1) $3x - y + 5 = 0$, $3x + y - 4 = 0$;
2) $3x - 4y + 2 = 0$, $5x + 12y - 3 = 0$;
3) $x - y = 0$, $x + y = 0$;
4) $x + 2y = 0$, $3x + 4y = 0$.

29.44. Составить уравнение биссектрисы острого угла между прямыми:

1) $x - 3y = 0$, $3x - y + 5 = 0$;
2) $x - 5y = 0$, $-10x + 2y + 1 = 0$.

29.45. Написать уравнение биссектрисы того угла между прямыми l_1 и l_2, внутри которого лежит точка M, если:

1) $l_1 : x + 7y = 0$, $l_2 : x - y - 4 = 0$, $M(1, 1)$;
2) $l_1 : 10x - 2y + 3 = 0$, $l_2 : x + 5y = 0$, $M(3, 1)$.

29.46. Даны две прямые $l_1 : 3x+4y-2 = 0$, $l_2 : 5x-12y-4 = 0$ и точка $(1, 1)$. Внутри угла, образованного данными прямыми и содержащего данную точку, найти такую точку, чтобы ее расстояния до прямых l_1 и l_2 были равны соответственно 3 и 1.

29.47. Найти точки, равноудаленные от обеих биссектрис координатных углов и от точки $(1, \sqrt{2})$.

29.48. Найти точку, находящуюся на равных расстояниях от точек $(4, 1)$ и $(8, -3)$ и от прямой $3x - 4y = 0$.

29.49. На прямой $x + y - 8 = 0$ найти точки, равноудаленные от точки $(2, 8)$ и от прямой $x - 3y + 2 = 0$.

29.50. На осях координат найти точки, равноудаленные от прямых $5x - y + 6 = 0$ и $5x + y - 3 = 0$.

29.51. На прямой $x+2y-12 = 0$ найти точки, равноудаленные от прямых $x + y - 5 = 0$ и $7x - y + 11 = 0$.

29.52. На прямой $x - 3y + 13 = 0$ найти точки, отстоящие от прямой $x + 2y + 3 = 0$ на расстоянии, равном $\sqrt{5}$.

29.53. Найти точку, отстоящую от каждой из прямых $4x - 3y + 20 = 0$ и $3x + 4y - 60 = 0$ на расстоянии, равном 5.

29.54. Составить уравнения прямых, перпендикулярных прямой $2x + 6y - 3 = 0$ и отстоящих от точки $(5, 4)$ на расстоянии, равном $\sqrt{10}$.

29.55. Найти касательные к окружности с центром $(1, 1)$ и радиусом 3, параллельные прямой $5x - 12y = 0$.

29.56. Написать уравнения касательных к окружности с центром $(1, 1)$ и радиусом 2, проведенных из точки $(7, -1)$.

29.57. Найти общие касательные к двум окружностям, центры которых находятся в точках $(1, 1)$ и $(2, 3)$, а радиусы соответственно равны 2 и 4.

29.58. Составить уравнение прямой, параллельной оси Oy и отстоящей от точки $(3, 5)$ на расстоянии, равном 7.

29.59. Через начало координат провести прямую, отстоящую от точки $(3, -2)$ на расстоянии, равном 1.

29.60. Составить уравнения прямых, отстоящих от точки $(1, 9)$ на расстоянии, равном 5, и наклоненных к прямой $x-7y = 0$ под углом $45°$. Найти вершины квадрата, образованного этими прямыми.

29.61. Внутри треугольника, образованного прямыми (AB) : $7x+y-2 = 0$, (BC) : $5x+5y-4 = 0$ и (AC) : $2x-2y+5 = 0$, найти точку, равноудаленную от двух его сторон AB и BC и отстоящую от третьей стороны AC на расстоянии, равном $3\sqrt{2}/4$.

29.62. Найти центр и радиус окружности, проходящей через точку $(-1, 3)$ и касающейся прямых $7x + y = 0$, $x - y + 8 = 0$.

29.63. Найти центр круга, вписанного в треугольник, ограниченный осями координат и прямой $3x - 4y - 5 = 0$.

29.64. Найти центр круга, вписанного в треугольник, стороны которого заданы уравнениями $x + y + 12 = 0$, $7x + y = 0$, $7x - y + 28 = 0$.

29.65. Составить уравнения биссектрис внутренних углов треугольника, стороны которого заданы уравнениями $3x - 4y = 0$, $4x - 3y = 0$, $5x + 12y - 10 = 0$.

29.66. Написать уравнение биссектрисы наибольшего из внутренних углов треугольника со сторонами $3x - 4y - 2 = 0$, $4x - 3y - 5 = 0$, $5x + 12y + 27 = 0$.

29.67. Написать уравнения сторон квадрата, описанного около окружности с центром $(1, 9)$ и радиусом 5, зная, что одна из его диагоналей параллельна прямой $x - 7y = 0$.

29.68. Основанием равнобедренного треугольника служит прямая $x+2y+6 = 0$, а боковой стороной – прямая $2x+y = 0$. Написать уравнение другой боковой стороны треугольника, зная, что ее расстояние от точки пересечения данных сторон равно $\sqrt{5}$.

29.69. Написать уравнения сторон прямоугольника, зная уравнения его диагоналей $7x - y + 4 = 0$, $x + y - 2 = 0$ и внутреннюю точку $(3, 5)$ одной из его сторон.

29.70. Центр симметрии квадрата находится в точке $(-1, 0)$, а одна из его сторон задается уравнением $x \mp 3y - 5 = 0$. Составить уравнения трех других сторон квадрата.

29.71. Даны уравнения $x + y - 5\sqrt{2} = 0$, $x + y = 0$ параллельных сторон ромба и точки $(3, 5)$ и $(1, 0)$, лежащие на двух других его сторонах. Составить уравнения двух других сторон ромба.

29.72. Составить уравнения сторон квадрата, две параллельные стороны которого проходят через точки $(2, 1)$ и $(3, 5)$, а две другие – через точки $(0, 1)$ и $(-3, -1)$.

29.73. Составить уравнения сторон квадрата, зная его центр $(1, 6)$ и точки на двух непараллельных сторонах: $(4, 9)$ на стороне AB, $(-5, 4)$ на стороне BC.

29.74. Даны уравнения боковых сторон равнобедренного треугольника $7x - y + 4 = 0$, $x + y - 2 = 0$ и точка $(3, 5)$ на его основании. Составить уравнение основания.

29.75. Написать уравнения сторон ромба, зная точку $M(1, 6)$ пересечения его диагоналей и по одной точке на трех его сторонах: $P(3, 0)$ на стороне AB, $Q(6, 6)$ на стороне BC, $R(5, 9)$ на стороне CD.

29.76. Вершины острых углов прямоугольных треугольников перемещаются по двум параллельным прямым, а вершина прямого угла – по прямой, к ним перпендикулярной. Какую линию описывает при этом основание перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу прямоугольного треугольника?

29.77. Найти геометрическое место точек, сумма расстояний которых до катетов CA и CB прямоугольного треугольника ABC равна расстоянию до его гипотенузы AB.

29.78. Найти множество точек плоскости, отношение расстояний от которых до двух пересекающихся прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ есть постоянная величина, равная k.

Плоскость в пространстве

29.79. Через точку $M(-5, 16, 12)$ проведены две плоскости: одна из них содержит ось Ox, другая – ось Oy. Вычислить острый угол между этими плоскостями.

29.80. Через начало координат провести плоскость, перпендикулярную к плоскости $5x - 2y + 5z - 10 = 0$ и образующую с плоскостью $x - 4y - 8z + 12 = 0$ угол $45°$.

29.81. Через линию пересечения плоскостей $x + 5y + z = 0$ и $x - z + 4 = 0$ провести плоскость, образующую угол $45°$ с плоскостью $x - 4y - 8z = 1$.

29.82. Вычислить косинусы внутренних двугранных углов тетраэдра, образованного плоскостями координат и плоскостью $2x + 3y + 6z - 12 = 0$.

29.82.1. Плоскость задана уравнением $z = ax + by + c$. Найти тангенс острого двугранного угла, образованного этой плоскостью и координатной плоскостью Oxy.

29.83. Найти косинус того угла между плоскостями:

1) $3x + y - 2z + 4 = 0$ и $x - 7y + 2z = 0$;

2) $8x + 4y + z + 1 = 0$ и $2x - 2y + z + 1 = 0$,

в котором лежит точка $(1, 1, 1)$.

29.84. Грани тетраэдра заданы уравнениями: $2x - 2y + z + 2 = 0$, $8x + 4y + z - 16 = 0$, $x + y + z - 5 = 0$, $4x + 3y = 0$. Вычислить косинус внутреннего двугранного угла тетраэдра, ребром которого служит линия пересечения первых двух плоскостей.

29.85. Проверить, что три плоскости $11x + 10y + 2z = 0$, $3x + 4y = 0$, $x - y + z - 1 = 0$ образуют призму, и вычислить косинус ее внутреннего двугранного угла, образованного первыми двумя плоскостями.

29.86. Три плоскости $A_k x + B_k y + C_k z + D_k = 0$, $k = 1, 2, 3$, образуют призму. При каком необходимом и достаточном условии все внутренние двугранные углы этой призмы будут острые?

29.87. Составить уравнения биссекторных плоскостей двугранных углов между двумя плоскостями $7x + y - 6 = 0$, $3x + 5y - 4z + 1 = 0$.

29.88. Составить уравнение биссекторной плоскости того двугранного угла между двумя плоскостями $3x + 5y - 4z + 1 = 0$, $x - z - 5 = 0$, в котором лежит начало координат.

29.89. Написать уравнение биссекторной плоскости острого двугранного угла, образованного плоскостью $2x - 3y + 6z - 6 = 0$

с плоскостью Oyz.

29.90. Грани тетраэдра заданы уравнениями $8x+4y+z-16=0$, $2x-2y+z+5=0$, $x+y+z+5=0$, $4x+3y=0$. Написать уравнение плоскости, делящей пополам внутренний двугранный угол тетраэдра между первой и второй плоскостями.

29.91. Составить уравнения плоскостей, параллельных плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ и отстоящих от нее на расстоянии, равном d.

29.92. Найти расстояние d между двумя параллельными плоскостями $Ax+By+Cz+D_1=0$ и $Ax+By+Cz+D_2=0$.

29.93. Даны вершины тетраэдра $A(0,0,2)$, $B(3,0,5)$, $C(1,1,0)$ и $D(4,1,2)$. Вычислить длину высоты, опущенной из вершины D на грань ABC.

29.94. Внутри треугольника, высекаемого на плоскости Oxy плоскостями $x+4y+8z+8=0$, $x-2y+2z+2=0$, $3x+4y+12=0$, найти точку, равноудаленную от этих плоскостей.

29.95. На оси Oz найти точку, равноудаленную от точки $(2,3,4)$ и от плоскости $2x+3y+z-17=0$.

29.96. На оси Oy найти точки, равноудаленные от двух плоскостей $x+y-z+1=0$, $x-y+z-5=0$.

29.97. Составить уравнение плоскости, параллельной плоскости $2x+y-4z+5=0$ и отстоящей от точки $(1,2,0)$ на расстоянии, равном $\sqrt{21}$.

29.98. Написать уравнение плоскости, отсекающей на осях координат отрезки, пропорциональные числам $1,2,3$, и отстоящей от точки $(3,5,7)$ на расстоянии, равном 4.

29.99. Найти центр и радиус шара, вписанного в тетраэдр, ограниченный плоскостями координат и плоскостью $11x-10y-2z-57=0$.

29.100. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(5,2,0)$ и удаленной от точки $B(6,1,-1)$ на расстоянии, равном 1, и от точки $C(0,5,4)$ на расстоянии, равном 3.

29.101. Через линию пересечения плоскостей $x+28y-2z+17=0$, $5x+8y-z+1=0$ провести плоскости, касающиеся сферы с центром в начале координат радиуса 1.

29.102. Составить уравнения общих касательных плоскостей к сферам с центрами $(1,1,0)$, $(0,1,-2)$ и радиусами 1, 2 соответственно, если известно, что они проходят через начало координат.

29.103. Составить уравнения общих касательных плоскостей к трем сферам с центрами $(0,0,0)$, $(-2,3,-1)$, $(3,-1,1)$ и радиусами 1, 2, 4 соответственно.

§30. Метрические задачи в аффинной системе координат

Пример 30.1. Доказать, что расстояние $\rho(M_0, l)$ от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $l: Ax + By + C = 0$ определяется формулой

$$\rho(M_0, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C| \cdot \sqrt{\det G}}{\sqrt{g_{11}B^2 - 2g_{12}AB + g_{22}A^2}}, \tag{30.1}$$

где $G = (g_{ij})$ – матрица Грама базисных векторов аффинной системы координат.

Решение. Пусть $P(x_1, y_1)$ – основание перпендикуляра, опущенного из точки M_0 на прямую l. Тогда $\rho(M_0, l) = |\overrightarrow{PM_0}|$. Найдем вектор $\overrightarrow{PM_0}$. Для этого будем искать вектор $\mathbf{b} = \{m, k\}$, перпендикулярный прямой l. Так как $\mathbf{a} = \{-B, A\}$ – направляющий вектор прямой l, то $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$, т.е. $(-B\mathbf{e}_1 + A\mathbf{e}_2, m\mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_2) = 0$, или, с учетом метрических коэффициентов $g_{ij} = (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$,

$$-mBg_{11} + mAg_{12} - kBg_{12} + kAg_{22} = 0.$$

Следовательно, можно взять

$$m = Ag_{22} - Bg_{12}, \quad k = Bg_{11} - Ag_{12}. \tag{30.2}$$

Тогда $\overrightarrow{PM_0} = t\,\mathbf{b}$, $t \in \mathbb{R}$ и

$$|\overrightarrow{PM_0}| = |t| \cdot |\,\mathbf{b}| =$$
$$= |t|\sqrt{((Ag_{22}-Bg_{12})\,\mathbf{e}_1+(Bg_{11}-Ag_{12})\,\mathbf{e}_2, (Ag_{22}-Bg_{12})\,\mathbf{e}_1+(Bg_{11}-Ag_{12})\,\mathbf{e}_2)} =$$
$$= |t|\sqrt{g_{22}A^2 - 2g_{12}AB + g_{11}B^2}\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Таким образом,

$$|\overrightarrow{PM_0}| = |t| \cdot \sqrt{g_{22}A^2 - 2g_{12}AB + g_{11}B^2}\sqrt{\det G}. \tag{30.3}$$

С другой стороны, $\overrightarrow{PM_0} = \{tm, tk\}$, поэтому $x_1 = x_0 - tm$, $y_1 = y_0 - tk$. Подставив эти координаты в уравнение прямой l, получим (с учетом соотношений (30.2))

$$t = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{g_{22}A^2 - 2g_{12}AB + g_{11}B^2}.$$

Отсюда и из (30.3) следует, что

$$\rho(M_0, l) = |\overrightarrow{PM_0}| = \frac{|Ax_0 + By_0 + C| \cdot \sqrt{\det G}}{\sqrt{g_{11}B^2 - 2g_{12}AB + g_{22}A^2}}. \quad \blacksquare$$

ЗАДАЧИ

В задачах этого параграфа рассматривается аффинная система координат $\{O;\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2\}$ на плоскости и $\{O;\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3\}$ в пространстве.

Прямая на плоскости

30.1. Найти тангенс угла α от оси Ox до прямой $y = kx + b$, если:

а) известны метрические коэффициенты g_{11}, g_{12}, g_{22} базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$;

б) известно, что $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = 1$ и $(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2}) = \omega$.

30.2. Найти тангенс угла φ от прямой $y = k_1x + b_1$ до прямой $y = k_2x + b_2$, если:

а) известны метрические коэффициенты g_{11}, g_{12}, g_{22} базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$;

б) известно, что $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = 1$ и $(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2}) = \omega$.

30.3. Найти необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, зная метрические коэффициенты g_{11}, g_{12}, g_{22} базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$.

30.4. Базисные векторы аффинной системы координат имеют единичную длину. Определить угол ω между ними, если известно, что прямые $y - 2x - 3 = 0$ и $5x + 4y - 5 = 0$ перпендикулярны.

30.5. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из точки (x_0, y_0) на прямую $Ax + By + C = 0$, если $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = 1$ и $(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2}) = \omega$.

30.6. Через точку $(2, -5)$ проведена прямая, образующая угол $\pi/6$ с прямой $4x - 3y + 1 = 0$. Составить уравнение этой прямой, если $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = 1$ и $(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2}) = \pi/3$.

30.7. Зная метрические коэффициенты g_{11}, g_{12}, g_{22} базиса аффинной системы координат, составить уравнения семейства прямых:

а) перпендикулярных к оси Ox;

б) перпендикулярных к оси Oy.

30.8. Найти расстояние d от точки (x_0, y_0) до прямой $Ax + By + C = 0$, зная метрические коэффициенты $\tilde{g}_{11}$, $\tilde{g}_{12}$, $\tilde{g}_{22}$ базиса, взаимного к базису аффинной системы координат.

30.9. Найти расстояние d от точки (x_0, y_0) до прямой $Ax + By + C = 0$, если $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = 1$ и $(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2}) = \omega$.

30.10. Составить уравнения биссектрис углов между координатными осями, зная метрические коэффициенты g_{11}, g_{12}, g_{22} базиса аффинной системы координат.

30.11. Составить уравнения биссектрис углов, образованных прямыми $x - y - 1 = 0$ и $x + y + 2 = 0$, если $g_{11} = 1$, $g_{12} = 1$, $g_{22} = 2$.

30.12. Определить площадь треугольника, заключенного между осями координат и прямой $3x - 2y + 6 = 0$, если известны метрические коэффициенты g_{ij} базиса аффинной системы координат Oxy.

30.13. Зная метрические коэффициенты g_{ij} базиса аффинной системы координат Oxy, составить уравнение прямой, отсекающей на осях координат ненулевые отрезки равной длины и проходящей через точку $M(2, -1)$.

30.14. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $A(1, 2)$ на прямую $2x + y - 1 = 0$, если $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = 1$, $(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2}) = 2\pi/3$. Какая точка является ортогональной проекцией точки A на эту прямую?

30.15. Составить уравнение серединного перпендикуляра к отрезку с концами $(1, 1)$ и $(1, 3)$, если $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = 1$, $(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2}) = \pi/4$.

30.16. Найти расстояние между параллельными прямыми $Ax + By + C_1 = 0$ и $Ax + By + C_2 = 0$, если $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = 1$, $(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2}) = \omega$.

30.17. На плоскости рассматривается аффинная система координат $\{O; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$, в которой $(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2}) = \pi/3$. Известно, что точка $A(1, 2)$ удалена от прямой $x + y - 1 = 0$ на расстояние 1 и ее ортогональной проекцией на эту прямую является точка $B(1, 0)$. Найти метрические коэффициенты g_{ij} базиса.

30.18. Прямая $y = 1$ является биссектрисой угла между прямыми $x = 1$ и $y = x$. Найти угол ω между базисными векторами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, если известно, что они единичные.

Плоскость в пространстве

30.19. Плоскость π задана своим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$ в некоторой аффинной системе координат. Доказать, что если векторы $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ образуют базис, взаимный к базису данной аффинной системы координат, то вектор $\mathbf{p} = A\,\mathbf{f}_1 + B\,\mathbf{f}_2 + C\,\mathbf{f}_3$ будет перпендикулярен плоскости π.

30.20. Найти расстояние d от точки (x_0, y_0) до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, зная метрические коэффициенты g_{ij} базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

30.21. Найти необходимое и достаточное условие перпендикулярности двух плоскостей $A_k x + B_k y + C_k z + D_k = 0$, $k = 1, 2$, если известна матрица Грама $G = (g_{ij})$ базисных векторов аффинной системы координат.

30.22. Найти углы между плоскостями $A_k x + B_k y + C_k z + D_k = 0$, $k = 1, 2$, если известна матрица Грама $G = (g_{ij})$ базисных векторов аффинной системы координат.

30.23. Зная метрические коэффициенты g_{ij} базиса аффинной системы координат $Oxyz$, составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1, 2, -3)$ и отсекающей на осях координат ненулевые отрезки равной длины.

30.24. Найти объем тетраэдра, заключенного между координатными плоскостями и плоскостью $2x + 3y - 6z + 12 = 0$, если известна матрица Грама G базиса аффинной системы координат $Oxyz$.

30.25. Известно, что $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = 1$, $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2$, $|\mathbf{e}_3| = 2$, $(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3}) = (\widehat{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}) = \pi/3$. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат, точку $(1, 1, 1)$ и перпендикулярной плоскости $x + y + 2z - 4 = 0$.

30.26. Известно, что $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = 1$, $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2$, $|\mathbf{e}_3| = 2$, $(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3}) = (\widehat{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}) = 2\pi/3$. Составить уравнение плоскости, все точки которой равноудалены от точек $O(0, 0, 0)$ и $A(0, 0, 2)$.

30.27. Известно, что $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = 1$, $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2$, $|\mathbf{e}_3| = 2$, $(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3}) = (\widehat{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3}) = \pi/3$. Для каждого значения параметра a найти угол между плоскостью $x + y + az - 1 = 0$ и ее вектором нормали $\mathbf{n} = \{1, 1, a\}$.

Глава VIII. **Прямая и плоскость в пространстве**

§31. Уравнения прямой в пространстве. Задачи взаимного расположения

Прямая, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, с направляющим вектором $\mathbf{a} = \{m, n, k\}$ определяется уравнениями:

а)

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + kt, \quad t \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{31.1}$$

или в векторной форме

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{31.2}$$

где $\mathbf{r}_0$ – радиус-вектор точки M_0;

б)

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{k}. \tag{31.3}$$

Уравнения (31.1) и (31.2) называются *параметрическими уравнениями* прямой в координатной и векторной формах соответственно, уравнения (31.3) – *каноническими уравнениями* прямой.

Векторное уравнение (31.2) равносильно (согласно критерию коллинеарности) уравнению

$$[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = \mathbf{0} \tag{31.4}$$

или

$$[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{M}, \quad \text{где } \mathbf{M} = [\mathbf{r}_0, \mathbf{a}]. \tag{31.5}$$

Система уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \tag{31.6}$$

в случае, если $\operatorname{rg}\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{bmatrix} = 2$, определяет прямую, являющуюся линией пересечения плоскостей $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Систему (31.6) называют *общими уравнениями* прямой в пространстве.

Теорема 31.1. *Если в аффинной системе координат $Oxyz$ прямая l задана общими уравнениями* (31.6), *то вектор*

$$\mathbf{a} = \left\{ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right\} \tag{31.7}$$

является направляющим вектором этой прямой.

Для запоминания координат вектора $\mathbf{a}$ может быть использован мнемонический определитель

$$\mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix},$$

где $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ – базис, соответствующий системе координат $Oxyz$. Разложение этого определителя по первой строке совпадает с разложением вектора $\mathbf{a}$ по базису $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$.

В прямоугольной декартовой системе координат, соответствующей ортонормированному базису $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, вектор (31.7) является векторным произведением $[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]$ нормалей $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$ к плоскостям π_1 и π_2.

Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Пусть каждая из прямых l_i, $i = 1, 2$, задана лежащей на ней точкой $M_i(x_i, y_i, z_i)$ и направляющим вектором $\mathbf{a}_i = \{m_i, n_i, k_i\}$ в некоторой аффинной системе координат $Oxyz$.

Теорема 31.2. *Прямые l_1 и l_2 лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда*

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Теорема 31.3. *Прямые l_1 и l_2 совпадают тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{rg} \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \end{bmatrix} = 1,$$

параллельны и не совпадают тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rg} \begin{bmatrix} m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \end{bmatrix} = 1, \quad \operatorname{rg} \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \end{bmatrix} = 2,$$

пересекаются тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rg} \begin{bmatrix} m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \end{bmatrix} = \operatorname{rg} \begin{bmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & k_1 \\ m_2 & n_2 & k_2 \end{bmatrix} = 2.$$

Взаимное расположение прямой и плоскости. Пусть в пространстве в некоторой аффинной системе координат $Oxyz$ заданы плоскость

$$\pi: \ Ax + By + Cz + D = 0$$

и прямая

$$l: \ \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{a},$$

где $\mathbf{r}_0 = \{x_0, y_0, z_0\}$, $\mathbf{a} = \{m, n, k\}$.

Теорема 31.4. *Прямая l лежит в плоскости π тогда и только тогда, когда*

$$\begin{cases} Am + Bn + Ck = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0; \end{cases}$$

прямая l параллельна плоскости π, но не лежит в ней тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} Am + Bn + Ck = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0; \end{cases}$$

прямая l пересекает плоскость π тогда и только тогда, когда

$$Am + Bn + Ck \neq 0.$$

Пример 31.1. Составить уравнение плоскости, параллельной прямой

$$l: \frac{x-2}{1}=\frac{y+7}{3}=\frac{z}{-2}$$

и проходящей через линию пересечения плоскостей $\pi_1 : x-y+2=0$ и $\pi_2 : y+z-4=0$. Система координат аффинная.

Решение. 1-й способ. Из системы уравнений $\begin{cases} x-y+2=0, \\ y+z-4=0 \end{cases}$ найдем частное решение $(2,4,0)$, которое дает точку $A(2,4,0)$, через которую проходит прямая пересечения плоскостей π_1 и π_2. Из мнемонического определителя

$$\begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \{-1,-1,1\}$$

находим направляющий вектор $\mathbf{p}=\{-1,-1,1\}$ этой прямой. Из канонического уравнения прямой l определим ее направляющий вектор $\mathbf{q}=\{1,3,-2\}$. Таким образом, искомая плоскость проходит через точку A и параллельна неколлинеарным векторам $\mathbf{p}$ и $\mathbf{q}$, поэтому она определяется уравнением

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \iff x+y+2z-6=0.$$

2-й способ. Искомая плоскость принадлежит пучку плоскостей, определенному плоскостями π_1 и π_2, поэтому ее уравнение имеет вид

$$\alpha(x-y+2)+\beta(y+z-4)=0 \iff \alpha x+(\beta-\alpha)y+\beta z+2\alpha-4\beta=0.$$

Так как прямая l параллельна этой плоскости, то ее направляющий вектор $\mathbf{q}=\{1,3,-2\}$ параллелен этой плоскости. Следовательно,

$$\alpha+3(\beta-\alpha)-2\beta=0,$$

откуда получим $\beta=2\alpha$ (можно взять $\alpha=1$, $\beta=2$) и уравнение искомой плоскости $x+y+2z-6=0$. ∎

Пример 31.2. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $(2,1,0)$ и пересекающей две прямые

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{3} \quad \text{и} \quad \frac{x-2}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z}{1}.$$

Система координат аффинная.

Решение. Искомую прямую можно рассматривать как линию, по которой пересекаются две плоскости, проходящие через данную точку и одну из данных прямых. Уравнения этих плоскостей

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-2 & y+2 & z \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

или $3y-z-3=0$, $x-3z-2=0$. Таким образом, $\begin{cases} 3y-z-3=0, \\ x-3z-2=0 \end{cases}$ – общие уравнения искомой прямой. ∎

Пример 31.3. Через точку пересечения прямой

$$l: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$$

с плоскостью $\pi: x+2y-z=0$ провести прямую, перпендикулярную данной прямой l и лежащую в данной плоскости π. Система координат прямоугольная.

Решение. 1-й способ. Обозначим через $\mathbf{a}=\{2,3,4\}$ – направляющий вектор прямой l, а через $\mathbf{n}=\{1,2,-1\}$ – вектор нормали к плоскости π. Вектор $\mathbf{b}=[\mathbf{a}, \mathbf{n}]=\{-11,6,1\}$ будет направляющим вектором искомой прямой. Найдя точку M_0 пересечения прямой l с плоскостью π, можно составить параметрические уравнения искомой прямой. Имеем $M_0(\frac{1}{2},-\frac{3}{4},-1)$ и

$$x=\frac{1}{2}-11t,\ y=-\frac{3}{4}+6t,\ z=-1+t.$$

2-й способ. Искомая прямая является пересечением плоскости π и плоскости π_1, проходящей через прямую l и перпендикулярной прямой l. Следовательно, плоскость π_1 проходит через точку $(1,0,0)$ и параллельна векторам $\mathbf{a}=\{2,3,4\}$ и $\mathbf{b}=[\mathbf{a}, \mathbf{n}]=\{-11,6,1\}$, поэтому она определяется уравнением

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 2 & 3 & 4 \\ -11 & 6 & 1 \end{vmatrix}=0 \iff 21x+46y-45z-21=0.$$

Искомая же прямая задается общими уравнениями

$$\begin{cases} x+2y-z=0, \\ 21x+46y-45z-21=0. \end{cases} \blacksquare$$

ЗАДАЧИ

В задачах этого параграфа считается, что система координат произвольная аффинная. Случай прямоугольной декартовой системы координат оговаривается особо.

31.1. В пространстве дана прямая $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=5$. Найти направляющий вектор этой прямой.

31.2. Составить параметрические уравнения прямых:

1) $\begin{cases} x-2y+4z=0, \\ 3x-2y+5z=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+y-z+5=0, \\ 2x-y+2z-2=0. \end{cases}$

31.3. Составить уравнения прямой, проходящей через точки A и B, в каждом из следующих случаев:

1) $A(2,3,1)$, $B(4,6,9)$; 2) $A(7,-1,2)$, $B(5,-1,4)$;
3) $A(1,5,1)$, $B(1,-5,1)$.

31.4. Представить каждую из следующих прямых как линию пересечения плоскостей, параллельных осям Ox и Oy:

1) $\begin{cases} x=3+5t, \\ y=7-4t, \\ z=-6+t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=-1+t, \\ y=1-t, \\ z=5t. \end{cases}$

31.5. Написать уравнения прямой:

1) проходящей через точку $(3, 5, 1)$ параллельно прямой
$$x = 2 + 4t,\ y = -3t,\ z = -3;$$

2) проходящей через точку $(0, -5, 4)$ параллельно прямой
$$x + 2y + 6 = 0,\ z = 5.$$

31.6. Дана точка $A(1, 2, 3)$. Считая, что система координат прямоугольная:

1) составить уравнения перпендикуляров, опущенных из точки A на координатные плоскости;

2) составить уравнения перпендикуляров, опущенных из точки A на оси координат;

3) написать уравнения плоскостей, проходящих через точку A и перпендикулярных к осям координат.

31.7. 1) Составить уравнения прямой, отсекающей на осях Ox и Oy отрезки, соответственно равные 2 и 3.

2) Написать уравнение плоскости, проходящей через эту прямую и параллельной оси Oz.

31.8. Написать уравнения прямой, лежащей в плоскости Oyz, параллельной оси Oy и отсекающей на оси Oz отрезок, равный 3.

31.9. 1) Написать уравнения плоскостей, проходящих через ось Oz и делящих пополам двугранные углы, образованные координатными плоскостями Oxz и Oyz.

2) Написать уравнения биссектрисы угла между положительными направлениями осей Ox и Oy.

Система координат прямоугольная.

31.10. Найти ортогональную проекцию прямой на плоскость Oxy в каждом из следующих случаев:

1) $\begin{cases} 5x + 8y - 3z + 9 = 0, \\ 2x - 4y + z - 1 = 0; \end{cases}$ 2) $\dfrac{x-3}{-5} = \dfrac{y-4}{6} = \dfrac{z-6}{8}$.

Система координат прямоугольная.

31.11. Найти точки пересечения с плоскостями координат каждой из следующих прямых:

1) $\begin{cases} 6x + 2y - z - 9 = 0, \\ 3x + 2y + 2z - 12 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 6 + 2t, \\ y = -2 + 4t, \\ z = -5t. \end{cases}$

31.12. Даны точки пересечения прямой с двумя координатными плоскостями: $(0, y_1, z_1)$, $(x_2, 0, z_2)$. Вычислить координаты точки пересечения этой прямой с третьей координатной плоскостью.

Установить, какие из следующих пар прямых скрещиваются, параллельны, пересекаются или совпадают; если прямые параллельны, написать уравнение плоскости, их содержащей; если прямые пересекаются, написать также уравнение плоскости, их содержащей, и, кроме того, найти их точку пересечения.

31.13.

1) $\begin{cases} x=1+2t, \\ y=7+t, \\ z=3+4t \end{cases}$ и $\begin{cases} x=6+3t, \\ y=-1-2t, \\ z=-2+t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=2+4t, \\ y=-6t, \\ z=-1-8t \end{cases}$ и $\begin{cases} x=7-6t, \\ y=2+9t, \\ z=12t; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = 1+2t, \\ y = 2-2t, \\ z = -t \end{cases}$ и $\begin{cases} x = -2t, \\ y = -5+3t, \\ z = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = 1+9t, \\ y = 2+6t, \\ z = 3+3t \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 7+6t, \\ y = 6+4t, \\ z = 5+2t. \end{cases}$

31.14.

1) $\begin{cases} x+z-1=0, \\ 3x+y-z+13=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x-2y+3=0, \\ y+2z-8=0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x+3y=0, \\ x+z-8=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} z-4=0, \\ 2x+3z-7=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y+z-1=0, \\ y+4z=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x+3y+6z-6=0, \\ 3x+4y+7z=0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x+y-2z=6, \\ 41x-19y+52z=68 \end{cases}$ и $\begin{cases} x-2y+5z=1, \\ 33x+4y-5z=63. \end{cases}$

31.15.

1) $\begin{cases} x = 9t, \\ y = 5t, \\ z = -3+t \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x-3y-3z-9=0, \\ x-2y+z+3=0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = t, \\ y = -8-4t, \\ z = -3-3t \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y-z=0, \\ 2x-y+2z=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = 3+t, \\ y = -1+2t, \\ z = 4 \end{cases}$ и $\begin{cases} x-3y+z=0, \\ x+y-z+4=0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x = -2+3t, \\ y = -1, \\ z = 4-t \end{cases}$ и $\begin{cases} 2y-z+2=0, \\ x-7y+3z-17=0. \end{cases}$

31.16. При каком необходимом и достаточном условии две прямые

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0, \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0 \end{cases}$$

лежат в одной плоскости?

31.17. Даны две прямые

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0, \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0. \end{cases}$$

С помощью рангов матриц

$$G = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad F = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{bmatrix}$$

выразить условия, необходимые и достаточные для того, чтобы прямые: 1) скрещивались; 2) пересекались; 3) были параллельны; 4) совпадали.

Установить в каждом из следующих случаев, лежит ли данная прямая в указанной плоскости, параллельна ей или пересекает ее; найти точку пересечения прямой и плоскости.

31.18.

1) $\dfrac{x-12}{4} = \dfrac{y-9}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ и $3x + 5y - z - 2 = 0$;

2) $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{4} = \dfrac{z}{3}$ и $3x - 3y + 2z - 5 = 0$;

3) $\dfrac{x-13}{8} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-4}{3}$ и $x + 2y - 4z + 1 = 0$;

4) $\dfrac{x-7}{5} = \dfrac{y-4}{1} = \dfrac{z-5}{4}$ и $3x - y + 2z - 5 = 0$.

31.19.

1) $\begin{cases} 3x + 5y - 7z + 16 = 0, \\ 2x - y + z - 6 = 0 \end{cases}$ и $5x - z - 4 = 0$;

2) $\begin{cases} 2x + 3y + 6z - 10 = 0, \\ x + y + z + 5 = 0 \end{cases}$ и $y + 4z + 17 = 0$;

3) $\begin{cases} x + 2y + 3z + 8 = 0, \\ 5x + 3y + z - 16 = 0 \end{cases}$ и $2x - y - 4z - 24 = 0$.

31.20. Найти точку встречи прямой $x = 2t$, $y = 1-t$, $z = 3+t$ с плоскостью $x + y + z - 10 = 0$.

31.21. Составить уравнения прямой, лежащей в плоскости $y + 2z = 0$ и пересекающей прямые $x = 1 - t$, $y = t$, $z = 4t$ и $x = 2 - t$, $y = 4 + 2t$, $z = 1$.

31.22. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $(3, -1, -4)$, пересекающей ось Oy и параллельной плоскости $y + 2z = 0$.

31.23. Составить уравнения прямой, параллельной прямой $x - 3y + z = 0$, $x + y - z + 4 = 0$ и пересекающей каждую из двух прямых $x = 3 + t$, $y = -1 + 2t$, $z = 4t$ и $x = -2 + 3t$, $y = -1$, $z = 4 - t$.

31.24. Составить уравнения прямой, проходящей через начало координат и пересекающей каждую из двух прямых $x = t$, $y = 1 - t$, $z = 3 + t$ и $x = 2 + 2t$, $y = 3 - t$, $z = 4 + 3t$.

31.25. Составить уравнения прямой, проходящей через точку $(2, 3, 1)$ и пересекающей каждую из двух прямых $x + y = 0$, $x - y + z + 4 = 0$ и $x + 3y - 1 = 0$, $y + z - 2 = 0$.

31.26. При каком необходимом и достаточном условии прямая $x = x_0 + mt$, $y = y_0 + nt$, $z = z_0 + kt$ пересекает треугольник с вершинами в точках $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$?

31.27. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и через прямую $x = 3 - 2t$, $y = 1 + t$, $z = t$.

31.28. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $(1, 2, 3)$, параллельной прямой $x = y = z$ и отсекающей на осях Ox и Oy равные отрезки.

31.29. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $(-2, 3, 0)$ и через прямую $x = 1$, $y = 2 + t$, $z = 2 - t$.

31.30. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $(-3, 1, 0)$ и через прямую $x+2y-z+4 = 0$, $3x-y+2z-1 = 0$.

31.31. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $x = 2 + 3t$, $y = -1 + 6t$, $z = 4t$ и параллельной прямой $x = -1 + 2t$, $y = 3t$, $z = -t$.

31.32. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oy и параллельной линии пересечения двух плоскостей $x + 4y - 2z + 7 = 0$ и $3x + 7y - 2z = 0$.

31.33. При каком необходимом и достаточном условии отрезок прямой $x = x_0 + mt$, $y = y_0 + nt$, $z = z_0 + kt$ между двумя пересекающимися плоскостями $A_ix + B_iy + C_iz + D_i = 0$, $i = 1, 2$, лежит в остром угле, образованном этими плоскостями? Система координат прямоугольная.

31.34. Показать, что прямые $x = 1 + 2t$, $y = 2t$, $z = t$ и $x = 11 + 8t$, $y = 6 + 4t$, $z = 2 + t$ пересекаются, и написать уравнения биссектрисы тупого угла между ними. Система координат прямоугольная.

31.35. Написать уравнения биссектрисы тупого угла между прямой

$$\begin{cases} x - 2y - 5 = 0, \\ y - 4z + 14 = 0 \end{cases}$$

и ее ортогональной проекцией на плоскость $x+y+1 = 0$. Система координат прямоугольная.

31.36. Доказать, что уравнение пучка плоскостей с осью

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{k}$$

имеет вид

$$\alpha\frac{x - x_0}{m} + \beta\frac{y - y_0}{n} + \gamma\frac{z - z_0}{k} = 0,$$

где произвольные постоянные $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ таковы, что $\alpha+\beta+\gamma=0$.

§32. Метрические задачи в пространстве

Пусть $Oxyz$ – прямоугольная декартова система координат пространства. Угол φ между прямыми l_i: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i + t\,\mathbf{a}_i, i = 1,2$, совпадающий с углом между их направляющими векторами $\mathbf{a}_i = \{m_i, n_i, k_i\}$, вычисляется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + k_1k_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + k_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + k_2^2}}.$$

Угол φ между прямой l: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{a}$ и плоскостью π: $Ax+By+Cz+D = 0$ находится как дополнительный к углу между направляющим вектором прямой $\mathbf{a} = \{m, n, k\}$ и вектором нормали к плоскости $\mathbf{n} = \{A, B, C\}$ и вычисляется по формуле

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Ck|}{\sqrt{m^2 + n^2 + k^2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad 0 \le \varphi \le \pi/2.$$

Расстояние $\rho(M_1, l)$ от точки $M_1(\mathbf{r}_1)$ до прямой l : $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\,\mathbf{a}$ находится как высота h параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\overrightarrow{M_1M_0}$:

$$\rho(M_1, l) = \frac{|[\mathbf{a}, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0]|}{|\mathbf{a}|}. \tag{32.1}$$

Расстоянием между скрещивающимися прямыми l_i: $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i + t\,\mathbf{a}_i$, $i = 1, 2$, называется кратчайшее расстояние между точками этих прямых. Оно совпадает с длиной общего перпендикуляра к прямым l_1 и l_2, т.е. с расстоянием между параллельными плоскостями, в которых лежат прямые l_1 и l_2. Это расстояние $\rho(l_1, l_2)$ находится как высота параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$:

$$\rho(l_1, l_2) = \frac{|(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)|}{|[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]|}. \tag{32.2}$$

Соотношения (32.1) и (32.2), вообще говоря, не связаны с системой координат. В случае прямоугольной декартовой системы координат они сводятся к простейшим формулам вычисления векторного произведения, смешанного произведения и длин векторов по их координатам в ортонормированном базисе.

Пример 32.1. Доказать, что прямая l, проходящая через точку $A(1, 2, 3)$ и пересекающая прямые

$$l_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{2} \quad \text{и} \quad l_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y-8}{-9} = \frac{z+3}{6},$$

образует с этими прямыми равные углы. Система координат прямоугольная.

Решение. Прямая l является линией пересечения плоскостей π_1 и π_2, проходящих через точку A и одну из данных прямых. Плоскости π_1 и π_2 определяются уравнениями

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 2x + 2y - z - 3 = 0,$$

и

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-8 & z+3 \\ 2 & -9 & 6 \\ 1 & 6 & -6 \end{vmatrix} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 6x + 6y + z - 57 = 0,$$

поэтому направляющим вектором прямой l будет вектор $\{8, -8, 0\}$ (являющийся векторным произведением векторов нормали к плоскостям π_1 и π_2) или коллинеарный ему вектор $\mathbf{a} = \{1, -1, 0\}$. Направляющими векторами прямых l_1 и l_2 являются векторы $\mathbf{a}_1 = \{2, -1, 2\}$ и $\mathbf{a}_2 = \{2, -9, 6\}$. Угол φ между прямыми l и l_1 определяется из соотношения

$$\cos\varphi = \frac{|(\mathbf{a}, \mathbf{a}_1)|}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{a}_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4},$$

а угол ψ между прямыми l и l_2 – из соотношения

$$\cos\psi = \frac{|(\mathbf{a}, \mathbf{a}_2)|}{|\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{a}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Longleftrightarrow \quad \psi = \frac{\pi}{4} = \varphi. \quad \blacksquare$$

Пример 32.2. Составить уравнение прямой l, проходящей через точку $A(1, 0, 0)$, отстоящей от оси Oz на расстояние $1/\sqrt{5}$ и образующей с осью Oz угол $\varphi = \arccos\frac{2}{3}$. Система координат прямоугольная.

Решение. Пусть $\mathbf{a}_1 = \{l, m, n\}$ – направляющий вектор искомой прямой. Ось Oz проходит через точку $O(0,0,0)$ и имеет направляющий вектор $\mathbf{a}_2 = \{0,0,1\}$. Согласно (32.2)

$$\rho(l, Oz) = \frac{|(\overrightarrow{OA}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)|}{|[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]|}.$$

Имеем

$$(\overrightarrow{OA}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l & m & n \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = m;$$

$$[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ l & m & n \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \{m, -l, 0\} \quad \text{и} \quad |[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]| = \sqrt{m^2 + l^2},$$

поэтому

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{|m|}{\sqrt{m^2 + l^2}}.$$

Так как координаты вектора $\mathbf{a}$ определены с точностью до постоянного множителя, можно считать, что $|m| = 1$, $m^2 + l^2 = 5$. Отсюда получим четыре пары (l, m): $(2,1)$, $(-2,1)$, $(2,-1)$, $(-2,-1)$.

Угол между векторами $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ равен либо φ, либо $\pi - \varphi$; поэтому согласно (32.1)

$$\frac{n}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}} = \frac{n}{\sqrt{5 + n^2}} = \pm\frac{2}{3} \Longrightarrow n = \pm 2.$$

Каждое из этих значений n дает четыре тройки координат $\{l, m, n\}$. Отобрав из них неколлинеарные векторы, получим четыре прямые:

$$\frac{x-1}{\pm 2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{\pm 2} \quad \text{и} \quad \frac{x-1}{\pm 2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{\mp 2}. \quad \blacksquare$$

ЗАДАЧИ

В задачах этого параграфа считается, что система координат прямоугольная декартова. Случай произвольной аффинной системы координат оговаривается особо.

32.1. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $(3, -2, 4)$ на плоскость $5x + 3y - 7z + 1 = 0$.

32.2. Найти ортогональную проекцию точки $(1, 2, -3)$ на плоскость $6x - y + 3z - 41 = 0$.

32.3. Составить уравнение ортогональной проекции прямой $2x + y - z + 4 = 0$, $x + y = 0$ на плоскость Oxz.

32.4. Составить уравнение ортогональной проекции прямой $x = 3 + 5t$, $y = -1 + t$, $z = 4 + t$ на плоскость $2x - 2y + 3z - 5 = 0$.

32.5. Найти точку, симметричную точке $(2, 7, 1)$ относительно плоскости $x - 4y + z + 7 = 0$.

32.6. Составить уравнения прямой, перпендикулярной к плоскости Oxz и пересекающей каждую из двух прямых $x = t$, $y = -4 + t$, $z = 3 - t$ и $x = 1 - 2t$, $y = -3 + t$, $z = 4 - 5t$.

32.7. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

и перпендикулярной к плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

32.8. Составить уравнение плоскости, зная, что точка $P(2, 6, -4)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.

32.9. Даны две точки $A(3, -2, 1)$, $B(6, 0, 5)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку B и перпендикулярной к прямой AB.

32.10. Через начало координат провести плоскость, перпендикулярную к прямой

$$\frac{x + 2}{4} = \frac{y - 3}{5} = \frac{z - 1}{-2}.$$

32.11. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку (x_1, y_1, z_1) и перпендикулярной к прямой $x = x_0 + at$, $y = y_0 + bt$, $z = z_0 + ct$.

32.12. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку (x_1, y_1, z_1) и перпендикулярной к прямой

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

32.13. Найти точку, симметричную точке $(4, 3, 10)$ относительно прямой $x = 1 + 2t$, $y = 2 + 4t$, $z = 3 + 5t$.

32.14. Найти прямую, проходящую через точку $M(0, 1, 1)$, образующую прямой угол с прямой $y + 1 = 0$, $x + 2z - 7 = 0$ и пересекающую прямую $x - 1 = 0$, $z + 1 = 0$.

32.15. Составить уравнения прямой, пересекающей ортогонально ось Oy и прямую $x = 3 + 4t$, $y = 1 - t$, $z = 2 + 5t$.

32.16. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $(3, 2, 1)$ на ось Ox.

32.17. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $(-1, 0, 4)$ на прямую $x = 1 + t$, $y = 2t$, $z = 4 - t$.

32.18. Написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки (x_1, y_1, z_1) на прямую

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}.$$

32.19. Найти ортогональную проекцию точки $(1,3,5)$ на прямую $2x+y+z-1=0$, $3x+y+2z-3=0$.

32.20. Написать уравнения общего перпендикуляра к двум прямым

$$\frac{x-1}{8} = \frac{y-2}{4} = \frac{z-3}{1} \quad \text{и} \quad \frac{x}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}.$$

32.21. Найти:

1) уравнения общего перпендикуляра к двум прямым

$$l_1: \frac{x}{1} = \frac{y+4}{3} = \frac{z}{2} \quad \text{и} \quad l_2: \frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z+3}{-2};$$

2) расстояние между прямыми l_1 и l_2;

3) точки пересечения прямых l_1 и l_2 с их общим перпендикуляром.

32.22. К непересекающимся диагоналям граней куба, имеющих общее ребро, проведен общий перпендикуляр. В каком отношении точки пересечения диагоналей с их общим перпендикуляром делят эти диагонали?

32.23. Даны три плоскости: $2x+3y-4z+5=0$, $2x-z+3=0$, $x+y-z=0$. Через линию пересечения первых двух плоскостей провести плоскость так, чтобы линия ее пересечения с третьей плоскостью была перпендикулярна к линии пересечения первой и второй плоскостей.

32.24. Определить направляющие косинусы прямых:

$$1)\quad \frac{x-1}{4} = \frac{y-5}{-3} = \frac{z+2}{12}; \qquad 2)\quad \frac{x}{12} = \frac{y-7}{9} = \frac{z+3}{20}.$$

32.25. Составить уравнения прямой, которая проходит через точку $A(1,-5,3)$ и образует с осями координат углы, соответственно равные 60°, 45° и 120°.

32.26. Определить угол, образованный прямыми

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{6} = \frac{z-5}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x}{2} = \frac{y-3}{9} = \frac{z+1}{6}.$$

32.27. Вычислить направляющие косинусы прямой $x-z+3=0$, $5x-6y+2z+21=0$.

32.28. Определить угол между каждой парой следующих прямых:

1) $\begin{cases} x = 3 + t, \\ y = 7 - 2t, \\ z = 4 + 3t \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 2 + 5t, \\ y = 1 - t, \\ z = 1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x - 4y - 2z = 0, \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} 4x + y - 6z - 2 = 0, \\ y - 3z + 2 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x + y - z + 1 = 0, \\ 3x - y + z = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ 2x + 2y - 5z + 1 = 0. \end{cases}$

32.29. Найти угол между прямой $x = 5+4t$, $y = 1+t$, $z = 2-t$ и плоскостью $7x + 4y - 4z + 5 = 0$.

32.30. Найти угол между прямой $x+y-z = 0$, $2x-3y+z = 0$ и плоскостью $3x + 5y - 4z + 2 = 0$.

32.31. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\frac{x+7}{-2} = \frac{y-6}{3} = \frac{z}{1}$$

и образующей угол $\pi/3$ с прямой $x - y + z = 0$, $x - y + 2z = 0$.

32.32. Через прямую

$$\frac{x}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{0}$$

провести плоскость так, чтобы острый угол между линиями ее пересечения с плоскостями Oxz и Oyz был равен $\pi/3$.

32.32.1. Плоскость задана уравнением $z = ax + by + c$. Найти тангенсы углов, которые образуют координатные оси Ox, Oy, Oz с этой плоскостью.

32.33. Трехгранный угол задан плоскостями $x - y - 4z + 13 = 0$, $3x + y - 4z + 7 = 0$, $3x - 5y - 4z + 19 = 0$ и его внутренней точкой $(1, 3, 5)$. Найти направляющие косинусы луча, выходящего из вершины этого трехгранного угла и образующего с его ребрами равные между собой острые углы. Установить, проходит ли этот луч внутри или вне трехгранного угла.

32.34. Найти расстояние от точки $(1, 3, 5)$ до прямой, по которой пересекаются плоскости $2x + y + z = 1$, $3x + y + 2z = 3$.

32.35. Найти расстояние от точки $(1, 2, 5)$ до каждой из следующих прямых:

1) $\begin{cases} x = t, \\ y = 1 - 2t, \\ z = 3 + t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y - z + 2 = 0, \\ 4x - 3z + 3 = 0. \end{cases}$

32.36. Найти уравнение и длину высоты AH треугольника

ABC, образуемого пересечением плоскости $3x - y + 4z - 12 = 0$ с координатными плоскостями, при условии, что вершина A лежит на оси Oz.

32.37. Найти расстояние между каждой парой следующих прямых:

1) $\begin{cases} x = 3 + t, \\ y = 1 - t, \\ z = 2 + 2t \end{cases}$ и $\begin{cases} x = -t, \\ y = 2 + 3t, \\ z = 3t; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x + y - z + 1 = 0, \\ x + y = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x - 2y + 3z - 6 = 0, \\ 2x - y + 3z - 6 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 2y - z + 1 = 0, \\ 2x - 3y + z - 4 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y + z - 9 = 0, \\ 2x - y - z = 0. \end{cases}$

32.38. Найти расстояние между параллельными прямыми

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}.$$

32.39. Найти кратчайшее расстояние между диагональю куба и непересекающей ее диагональю грани, если ребро куба равно единице.

32.40. Найти расстояние между двумя скрещивающимися медианами двух боковых граней правильного тетраэдра с ребром, равным a.

32.41. Найти угол φ, образуемый прямой

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

с плоскостью $Ax+By+Cz+D = 0$, заданными своими уравнениями в аффинной системе координат с известными метрическими коэффициентами g_{ij}.

32.42. Найти необходимое и достаточное условие перпендикулярности прямой

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

и плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, заданных своими уравнениями в аффинной системе координат с известными метрическими коэффициентами g_{ij}.

§33. Векторные уравнения прямой и плоскости

Векторное уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(\mathbf{r}_0)$, с направляющим вектором $\mathbf{a}$ имеет вид

$$\begin{aligned}&\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t, \ t \in \mathbb{R}, \quad \text{или}\\ &[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = \mathbf{0}, \quad \text{или}\\ &[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{M}, \quad \text{где } (\mathbf{M}, \mathbf{a}) = 0.\end{aligned} \tag{33.1}$$

Заметим, что если $(\mathbf{M}, \mathbf{a}) \neq 0$, условию $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{M}$ не удовлетворяет ни одна точка пространства.

Геометрические свойства прямой, заданной третьим уравнением (33.1), рассматриваются в примере 33.1.

Векторное уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(\mathbf{r}_0)$, с направляющим векторами $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ имеет вид

$$\begin{aligned}&\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}_1 u + \mathbf{a}_2 v, \ u, v \in \mathbb{R}, \quad \text{или}\\ &(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = 0, \quad \text{или}\\ &(\mathbf{r}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = p.\end{aligned}$$

Векторное уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(\mathbf{r}_0)$ и перпендикулярной вектору $\mathbf{n}$, имеет вид

$$\begin{aligned}&(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = 0, \quad \text{или}\\ &(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D.\end{aligned}$$

Пример 33.1. Доказать, что уравнение $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{M}$, где $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $(\mathbf{a}, \mathbf{M}) = 0$, определяет прямую. Найти ее направляющий вектор и какую-нибудь точку $M_0(\mathbf{r}_0)$, ей принадлежащую. Составить параметрическое уравнение этой прямой.

Решение. Рассмотрим вектор $\mathbf{r}_0 = \dfrac{[\mathbf{a}, \mathbf{M}]}{|\mathbf{a}|^2}$. Согласно формуле двойного векторного произведения (пример 25.6) имеем

$$[\mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = -\frac{[\mathbf{a}, [\mathbf{a}, \mathbf{M}]]}{|\mathbf{a}|^2} = -\frac{\mathbf{a}(\mathbf{a}, \mathbf{M}) - \mathbf{M}(\mathbf{a}, \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^2} = \mathbf{M}$$

(так как $(\mathbf{a}, \mathbf{M}) = 0$). Следовательно, точка $M_0(\mathbf{r}_0)$ принадлежит линии, определяемой рассматриваемым уравнением, которое в силу равенства $[\mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = \mathbf{M}$ эквивалентно соотношению

$$[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = \mathbf{0}.$$

Оно же, в свою очередь, равносильно коллинеарности векторов $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ и $\mathbf{a}$, т.е. существованию такого $t \in \mathbb{R}$, что $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \mathbf{a}t$, т.е.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, уравнение $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{M}$, где $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $(\mathbf{a}, \mathbf{M}) = 0$, определяет прямую с направляющим вектором $\mathbf{a}$ и проходящую через точку $M_0(\mathbf{r}_0)$, где $\mathbf{r}_0 = \dfrac{[\mathbf{a}, \mathbf{M}]}{|\mathbf{a}|^2}$, а параметрическое уравнение этой прямой имеет вид

$$\mathbf{r} = \frac{[\mathbf{a}, \mathbf{M}]}{|\mathbf{a}|^2} + \mathbf{a}t, \quad t \in \mathbb{R}. \ \blacksquare \tag{33.2}$$

Пример 33.2. Найти радиус-вектор $\mathbf{r}_0$ точки M пересечения трех плоскостей $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_1) = D_1$, $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_2) = D_2$, $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_3) = D_3$, где $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) \neq 0$.

Решение. Искомый вектор $\mathbf{r}_0$ является решением системы уравнений

$$\begin{cases} (\mathbf{r}, \mathbf{n}_1) = D_1, \\ (\mathbf{r}, \mathbf{n}_2) = D_2, \\ (\mathbf{r}, \mathbf{n}_3) = D_3. \end{cases} \tag{33.3}$$

Будем искать $\mathbf{r}_0$ в разложении по базису $\mathbf{n}_1' = [\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3]$, $\mathbf{n}_2' = [\mathbf{n}_3, \mathbf{n}_1]$, $\mathbf{n}_3' = [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]$, взаимному к базису $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$, т.е. в виде

$$\mathbf{r}_0 = x\,\mathbf{n}_1' + y\,\mathbf{n}_2' + z\,\mathbf{n}_3'.$$

Умножая скалярно обе части этого равенства на $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$, получим

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_1) &= x(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3), \\ (\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_2) &= y(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3), \\ (\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_3) &= z(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3). \end{aligned}$$

Так как $\mathbf{r}_0$ – решение системы (33.3), то

$$x = \frac{D_1}{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)}, \quad y = \frac{D_2}{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)}, \quad z = \frac{D_3}{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)}.$$

Следовательно,

$$\mathbf{r}_0 = \frac{D_1[\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3] + D_2[\mathbf{n}_3, \mathbf{n}_1] + D_3[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]}{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)}. \quad \blacksquare$$

Пример 33.3. Составить параметрическое уравнение прямой l, являющейся линией пересечения плоскостей $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_1) = D_1$ и $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_2) = D_2$.

Решение. Прямая l перпендикулярна как $\mathbf{n}_1$, так и $\mathbf{n}_2$, поэтому вектор $\mathbf{a} = [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]$ – направляющий вектор l. В качестве точки $M_0(\mathbf{r}_0)$ возьмем основание перпендикуляра, опущенного из полюса на прямую l, так что $(\mathbf{r}_0, \mathbf{a}) = 0$. Таким образом, вектор $\mathbf{r}_0$ является решением системы

$$\begin{cases} (\mathbf{r}, \mathbf{n}_1) = D_1, \\ (\mathbf{r}, \mathbf{n}_2) = D_2, \\ (\mathbf{r}, \mathbf{a}) = 0. \end{cases}$$

Поступая так же, как и при решении системы (33.3), получим, что

$$\mathbf{r}_0 = \frac{D_1[\mathbf{n}_2, \mathbf{a}] + D_2[\mathbf{a}, \mathbf{n}_1]}{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{a})} = \frac{[\mathbf{a}, D_2\mathbf{n}_1 - D_1\mathbf{n}_2]}{(\mathbf{a}, [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2])} = \frac{[[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2], D_2\mathbf{n}_1 - D_1\mathbf{n}_2]}{|[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]|^2}.$$

Следовательно, параметрическое уравнение прямой l имеет вид

$$\mathbf{r} = \frac{[[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2], D_2\mathbf{n}_1 - D_1\mathbf{n}_2]}{|[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]|^2} + [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]t, \quad t \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

Пример 33.4. Найти точку $M_1(\mathbf{r}_1)$ пересечения прямой l: $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{M}$ $(\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $(\mathbf{a}, \mathbf{M}) = 0)$ и плоскости π: $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$, если известно, что $(\mathbf{n}, \mathbf{a}) \neq 0$.

Решение. Воспользуемся параметрическим уравнением (33.2) прямой l. Тогда задача сводится к нахождению такого числа $t \in \mathbb{R}$, что

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = \dfrac{[\mathbf{a}, \mathbf{M}]}{|\mathbf{a}|^2} + \mathbf{a}t, \\ (\mathbf{r}_1, \mathbf{n}) = D, \end{cases}$$

т.е.

$$t(\mathbf{a}, \mathbf{n}) + \frac{([\mathbf{a}, \mathbf{M}], \mathbf{n})}{|\mathbf{a}|^2} = D \Longrightarrow t = \frac{D|\mathbf{a}|^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{M}, \mathbf{n})}{|\mathbf{a}|^2(\mathbf{a}, \mathbf{n})}.$$

Отсюда

$$\mathbf{r}_1 = \frac{1}{|\mathbf{a}|^2}\left([\mathbf{a}, \mathbf{M}] + \frac{D|\mathbf{a}|^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{M}, \mathbf{n})}{(\mathbf{a}, \mathbf{n})}\mathbf{a}\right). \quad \blacksquare$$

ЗАДАЧИ

33.1. Найти геометрическое место середин отрезков, концы которых лежат на двух скрещивающихся прямых.

33.2. Плоскость π пересекает две скрещивающиеся прямые. Найти геометрическое место середин отрезков, параллельных плоскости π, концы которых лежат на этих прямых.

33.3. Доказать, что уравнение $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$, где $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$, определяет в пространстве плоскость. Найти ее вектор нормали и какую-нибудь точку $M_0(\mathbf{r}_0)$, ей принадлежащую.

33.4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(\mathbf{r}_1)$ и прямую $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$, эту точку не содержащую.

33.5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(\mathbf{r}_1)$ и перпендикулярной к прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$.

33.6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(\mathbf{r}_0)$ и перпендикулярной к прямой пересечения двух плоскостей $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_1) = D_1$ и $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_2) = D_2$.

33.7. Найти точку пересечения прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$ с плоскостью $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$.

33.8. Найти точку пересечения прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$ с плоскостью $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{b}u + \mathbf{c}v$.

33.9. Найти точку пересечения прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$ с плоскостью, проходящей через три точки $M_k(\mathbf{r}_k)$, $k = 1, 2, 3$, не лежащие на одной прямой.

33.10. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(\mathbf{r}_0)$ и пересекающей две скрещивающиеся прямые $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}_1 t$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}_2 t$.

33.11. Составить уравнение прямой, лежащей в плоскости $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$ и пересекающей под прямым углом прямую $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$, если $[\mathbf{a}, \mathbf{n}] \neq \mathbf{0}$.

33.12. Найти ортогональную проекцию точки $M_0(\mathbf{r}_0)$ на прямую $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}t$.

33.13. Найти ортогональную проекцию точки $M_0(\mathbf{r}_0)$ на прямую $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{M}$ $(\mathbf{a} \neq \mathbf{0}, (\mathbf{a}, \mathbf{M}) = 0)$.

33.14. Найти проекцию точки $M_0(\mathbf{r}_0)$ на прямую $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}t$ параллельно плоскости $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$, если $(\mathbf{a}, \mathbf{n}) \neq 0$.

33.15. Найти точку, симметричную точке $M_0(\mathbf{r}_0)$ относительно прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}t$.

33.16. Найти ортогональную проекцию точки $M_0(\mathbf{r}_0)$ на плоскость $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$.

33.17. Найти проекцию точки $M_0(\mathbf{r}_0)$ на плоскость $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$ параллельно прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}t$, если $(\mathbf{a}, \mathbf{n}) \neq 0$.

33.18. Найти точку, симметричную точке $M_0(\mathbf{r}_0)$ относительно плоскости $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$.

33.19. Найти ортогональную проекцию точки $M_0(\mathbf{r}_0)$ на плоскость $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}u + \mathbf{b}v$.

33.20. При каком необходимом и достаточном условии четыре плоскости $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_k) = D_k$, $k = \overline{1, 4}$, имеют единственную общую точку?

33.21. Даны две плоскости $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_k) = D_k$, $k = 1, 2$. При каком необходимом и достаточном условии они: 1) пересекаются; 2) параллельны; 3) совпадают?

33.22. Даны прямая $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$ и плоскость $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$. При каком необходимом и достаточном условии: 1) они пересекаются; 2) они параллельны; 3) прямая лежит в плоскости?

33.23. Даны две прямые $\mathbf{r} = \mathbf{r}_k + \mathbf{a}_k t$, $k = 1, 2$. При каком необходимом и достаточном условии они: 1) скрещиваются; 2) пересекаются; 3) параллельны; 4) совпадают?

33.24. Через прямую $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$ провести плоскость, перпендикулярную к плоскости $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$, если $[\mathbf{a}, \mathbf{n}] \neq \mathbf{0}$.

33.25. Через прямую $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$ провести плоскость, перпендикулярную к плоскости $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{b}u + \mathbf{c}v$, если известно, что $(\mathbf{a}, \mathbf{b})^2 + (\mathbf{a}, \mathbf{c})^2 \neq 0$.

33.26. Через линию пересечения двух плоскостей $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_1) = D_1$ и $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_2) = D_2$ провести плоскость, перпендикулярную к плоскости $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_3) = D_3$, если известно, что $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_3)^2 + (\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)^2 \neq 0$.

33.27. Через прямую $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{M}$ $(\mathbf{a} \neq \mathbf{0}, (\mathbf{a}, \mathbf{M}) = 0)$ провести плоскость, перпендикулярную к плоскости $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$, если $[\mathbf{a}, \mathbf{n}] \neq \mathbf{0}$.

33.28. Пусть $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \neq \mathbf{0}$. Через прямую $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$ провести плоскость, параллельную прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{b}t$.

10—4271

33.29. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(\mathbf{r}_0)$ и прямую $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{M}$, не содержащую точку M_0 $((\mathbf{a}, \mathbf{M}) = 0)$.

33.30. Составить уравнение плоскости, содержащей две параллельные прямые $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}t$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}t$.

33.31. Составить уравнение общего перпендикуляра к скрещивающимся прямым $\mathbf{r} = \mathbf{r}_k + \mathbf{a}_k t$, $k = 1, 2$.

33.32. Составить уравнение общего перпендикуляра к скрещивающимся прямым $[\mathbf{r}, \mathbf{a}_k] = \mathbf{M}_k$, $k = 1, 2$.

33.33. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M_0(\mathbf{r}_0)$ на прямую $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}t$, если $[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}] \neq \mathbf{0}$.

33.34. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M_0(\mathbf{r}_0)$ на прямую пересечения двух плоскостей $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_k) = D_k$, $k = 1, 2$, не содержащую точки M_0.

33.35. Составить уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M_0(\mathbf{r}_0)$ на прямую $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{M}$ $(\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, $(\mathbf{a}, \mathbf{M}) = 0)$, не содержащую точки M_0.

33.36. Найти расстояние от точки $M_0(\mathbf{r}_0)$ до плоскости $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$.

33.37. На прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$ найти точку, отстоящую от плоскости $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$ на расстоянии d.

33.38. Найти расстояние от точки $M_0(\mathbf{r}_0)$ до прямой $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}t$.

33.39. Найти расстояние от точки $M_0(\mathbf{r}_0)$ до прямой пересечения двух плоскостей $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_1) = D_1$ и $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_2) = D_2$, не содержащей точки M_0.

33.40. При каком необходимом и достаточном условии три плоскости $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_k) = D_k$, $k = 1, 2, 3$, образуют призму?

33.41. При каком необходимом и достаточном условии три плоскости $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_k) = D_k$, $k = 1, 2, 3$, имеют и притом только одну общую прямую?

33.42. При каком необходимом и достаточном условии четыре плоскости $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_k) = D_k$, $k = \overline{1, 4}$, образуют тетраэдр?

33.43. Найти ортогональную проекцию точки $M_0(\mathbf{r}_0)$ на прямую пересечения двух плоскостей $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_1) = D_1$ и $(\mathbf{r}, \mathbf{n}_2) = D_2$.

33.44. При каком необходимом и достаточном условии прямая $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t$ пересекает треугольник с вершинами в точках $M_k(\mathbf{r}_k)$, $k = 1, 2, 3$?

Глава IX. Алгебраические линии и поверхности второго порядка

§34. Эллипс, гипербола и парабола

Эллипс. *Эллипсом* называется геометрическое место точек M плоскости, для которых сумма расстояний от двух фиксированных точек F_1 и F_2 плоскости есть постоянное число, большее, чем расстояние между F_1 и F_2. Это число мы обозначим через $2a$. Точки F_1, F_2 называются *фокусами эллипса*, расстояние между ними называется *фокусным расстоянием* и обозначается через $2c$. Числа $r_1 = \rho(M, F_1)$ и $r_2 = \rho(M, F_2)$ называются *фокальными радиусами* точки M.

Таким образом, точка M плоскости является точкой эллипса тогда и только тогда, когда

$$r_1 + r_2 = 2a, \quad a > c.$$

Введем на плоскости *каноническую систему координат* данного эллипса. Для этого примем за начало координат O середину отрезка F_1F_2, за ось Ox – прямую F_1F_2, ориентированную от F_1 к F_2; ориентацию на оси Oy выберем произвольно (рис. 1).

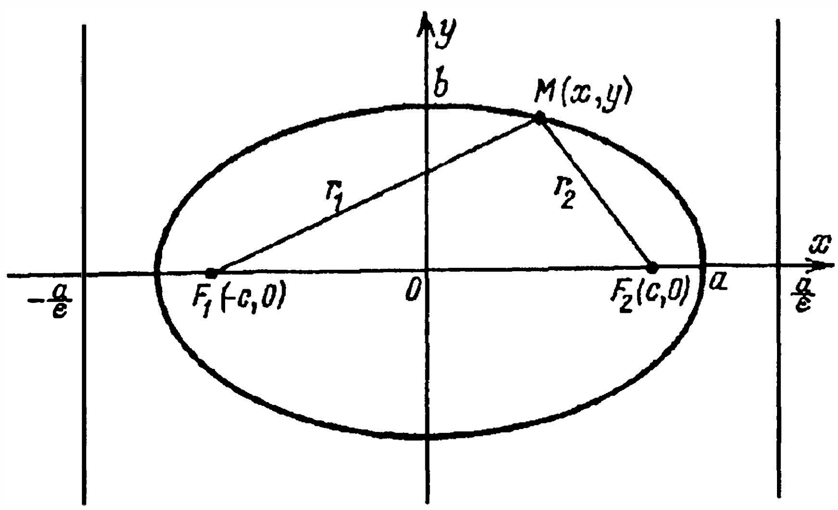


Рис. 1

Фокусы F_1 и F_2 в канонической системе координат, очевидно, имеют координаты $(-c, 0)$ и $(c, 0)$ соответственно.

Теорема 34.1. *Уравнение эллипса в канонической системе координат имеет вид*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{34.1}$$

где $a \geq b > 0$, $b^2 = a^2 - c^2$.

Уравнение (34.1) называется *каноническим уравнением эллипса.*

Эллипс обладает следующими простейшими свойствами.

1°. *Координатные оси канонической системы координат являются осями симметрии эллипса, а начало координат – его центром симметрии.* Начало координат канонической системы координат называется *центром* эллипса, числа $2a$ и $2b$ – *большой* и *малой осями* эллипса, а числа a и b – его *большой* и *малой полуосями.*

2°. *Все точки эллипса лежат в прямоугольнике, ограниченном прямыми $x = \pm a$ и $y = \pm b$.* Точки $(-a, 0)$, $(a, 0)$, $(0, -b)$, $(0, b)$ пересечения эллипса с осями координат называются *вершинами эллипса.*

Число $\varepsilon = c/a$ называется *эксцентриситетом эллипса.* Из определения следует, что $0 \leq \varepsilon < 1$, при этом

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

Для эллипса, не являющегося окружностью, две прямые d_1 и d_2, заданные в канонической системе координат уравнениями

$$d_1: \ x = -\frac{a}{\varepsilon} \quad \text{и} \quad d_2: \ x = \frac{a}{\varepsilon},$$

называются *директрисами эллипса* (рис. 1). Директриса d_i называется *соответствующей фокусу F_i, $i = 1, 2$.*

Теорема 34.2. *Эллипс, не являющийся окружностью, есть геометрическое место точек M плоскости, для которых отношение расстояния от данной точки F к расстоянию до данной прямой d, не проходящей через эту точку, равно постоянному положительному числу, меньшему единицы, т.е.*

$$\frac{\rho(M, F)}{\rho(M, d)} = \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < 1. \tag{34.2}$$

Для эллипса, определенного условием (34.2),

а) точка F является фокусом,

б) прямая d – соответствующей фокусу F директрисой,

в) число ε – эксцентриситетом,

г) $a = \dfrac{m\varepsilon}{1 - \varepsilon^2}$, $c = a\varepsilon$, $b^2 = a^2(1 - \varepsilon^2)$, где $m = \rho(F, d)$.

Теорема 34.3. *В канонической системе координат уравнение касательной к эллипсу в его точке (x_0, y_0) имеет вид*

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Гипербола. *Гиперболой* называется геометрическое место точек M плоскости, для которых абсолютная величина разности расстояний от двух фиксированных точек F_1 и F_2 плоскости есть постоянное положительное число, меньшее, чем расстояние между F_1 и F_2. Обозначим это число через $2a$. Точки F_1, F_2 называются *фокусами* гиперболы, расстояние между ними называется *фокальным расстоянием* и обозначается $2c$. Числа $r_1 = \rho(M, F_1)$ и $r_2 = \rho(M, F_2)$ называются *фокальными радиусами* точки M.

Таким образом, точка M плоскости является точкой гиперболы тогда и только тогда, когда

$$|r_1 - r_2| = 2a, \quad a < c.$$

Введем на плоскости *каноническую систему координат* данной гиперболы так же, как это было сделано выше для эллипса (рис. 2).

Теорема 34.4. *Уравнение гиперболы в канонической системе координат имеет вид*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{34.3}$$

где $b > 0$, $b^2 = c^2 - a^2$.

Уравнение (34.3) называется *каноническим уравнением гиперболы.*

Если в каноническом уравнении (34.3) $a = b$, то такая гипербола называется *равносторонней.*

Гипербола обладает следующими простейшими свойствами.

1°. *Координатные оси канонической системы координат являются осями симметрии гиперболы, а начало координат – ее центром симметрии.* Ось Ox, называемая *вещественной* (*действительной*) *осью гиперболы*, пересекает гиперболу в точках $(-a, 0)$, $(a, 0)$ – *вершинах гиперболы.* Ось Oy не пересекает гиперболу и называется ее *мнимой осью.* Начало координат называется *центром гиперболы*, числа $a > 0$, $b > 0$ – *вещественной* (*действительной*) и *мнимой полуосями гиперболы.*

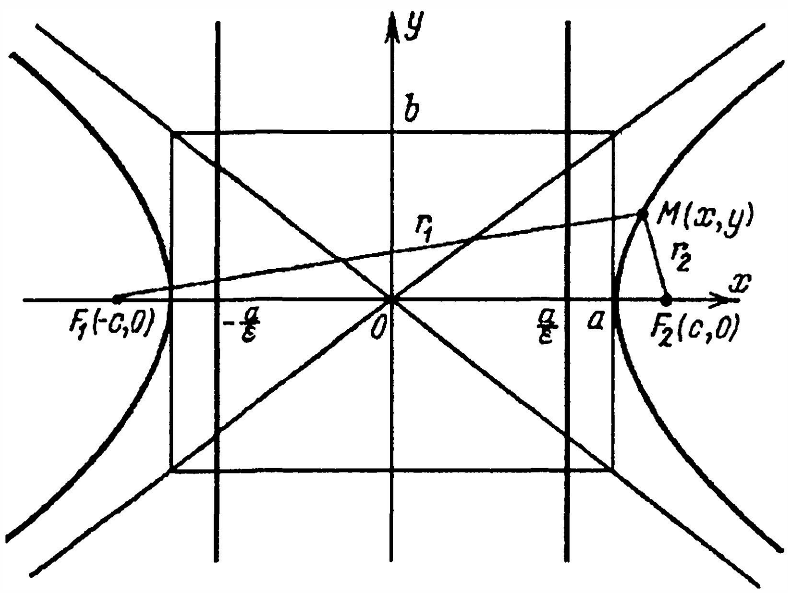


Рис. 2

2°. *Все точки гиперболы лежат вне полосы, определяемой прямыми* $x = \pm a$. Две кривые, на которые распадается гипербола, называются ее *ветвями.*

3°. *Все точки гиперболы лежат в тех вертикальных углах, образованных прямыми* $y = \pm\frac{b}{a}x$, *которые содержат вещественную ось.*

4°. *Прямые* $y = \pm\frac{b}{a}x$ *являются асимптотами гиперболы при* $x \to \infty$.

Прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ являются асимптотами и к гиперболе, заданной уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1. \tag{34.4}$$

Гиперболы, определяемые уравнениями (34.3) и (34.4), называются *сопряженными.*

Число $\varepsilon = c/a$ называется *эксцентриситетом гиперболы.* Из определения следует, что $\varepsilon > 1$, при этом

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}.$$

Прямые d_1 и d_2, заданные в канонической системе координат уравнениями

$$d_1 : \ x = -\frac{a}{\varepsilon}, \qquad d_2 : \ x = \frac{a}{\varepsilon},$$

называются *директрисами гиперболы* (рис. 2). Директриса d_i называется *соответствующей* фокусу F_i, $i = 1, 2$.

Теорема 34.5. *Гипербола есть геометрическое место точек M плоскости, для которых отношение расстояния от данной точки F к расстоянию до данной прямой d, не проходящей через эту точку, равно постоянному числу $\varepsilon > 1$, т.е.*

$$\frac{\rho(M,F)}{\rho(M,d)} = \varepsilon, \quad \varepsilon > 1. \tag{34.5}$$

Для гиперболы, определенной условием (34.5),

а) точка F является фокусом,

б) прямая d – соответствующей фокусу F директрисой,

в) число ε – эксцентриситетом,

г) $a = \dfrac{m\varepsilon}{\varepsilon^2 - 1}$, $c = a\varepsilon$, $b^2 = a^2(\varepsilon^2 - 1)$, где $m = \rho(F, d)$.

Теорема 34.6. *В канонической системе координат уравнение касательной к гиперболе в ее точке (x_0, y_0) имеет вид*

$$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

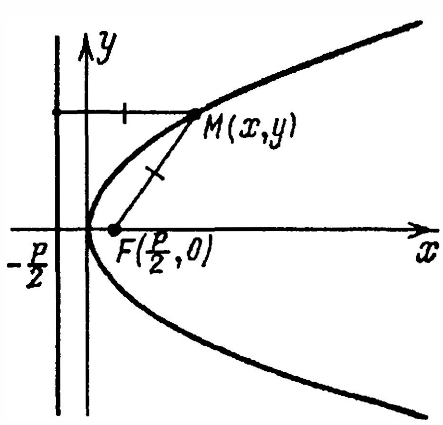


Рис. 3

Парабола. *Параболой* называется геометрическое место точек плоскости, для которых расстояние от некоторой фиксированной точки F плоскости равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой d, не проходящей через точку F. Точка F называется *фокусом параболы*, прямая d –

ее *директрисой.* Расстояние от фокуса параболы до ее директрисы называется *фокальным параметром* параболы и обозначается через p. Число $r = \rho(F, M)$ называется *фокальным радиусом* точки M. *Эксцентриситет параболы* по определению считается равным единице.

Введем на плоскости *каноническую систему координат* для данной параболы. Примем за ось Ox прямую, проходящую через точку F перпендикулярно прямой d, ориентированную от прямой d к точке F, за начало O – середину отрезка FD, где D – точка пересечения оси Ox с прямой d; ориентацию на оси Oy выбираем произвольно (рис. 3).

В канонической системе координат параболы ее фокус F имеет координаты $(\frac{p}{2}, 0)$, а директриса d – уравнение $x = -\frac{p}{2}$.

Теорема 34.7. *Уравнение параболы в канонической системе координат имеет вид*

$$y^2 = 2px, \quad p > 0. \tag{34.6}$$

Уравнение (34.6) называется *каноническим уравнением параболы.*

Парабола обладает следующими простейшими свойствами.

1°. *Ось Ox канонической системы координат является осью симметрии параболы.* Она называется *осью параболы.* Начало координат называется *вершиной параболы.*

2°. *Все точки параболы расположены в правой полуплоскости от оси Oy.*

Следует отметить, что определение параболы, по существу, означает ее директориальное свойство

$$\frac{\rho(M, F)}{\rho(M, d)} = \varepsilon.$$

Теорема 34.8. *В канонической системе координат уравнение касательной к параболе в ее точке (x_0, y_0) имеет вид*

$$yy_0 = p(x + x_0).$$

Пример 34.1. Найти геометрическое место центров окружностей, касающихся данной окружности и данной прямой l, ее не пересекающей.

Решение. Пусть A – центр данной окружности, а r – ее радиус.

Введем на плоскости прямоугольную декартову систему координат следующим образом (рис. 4).

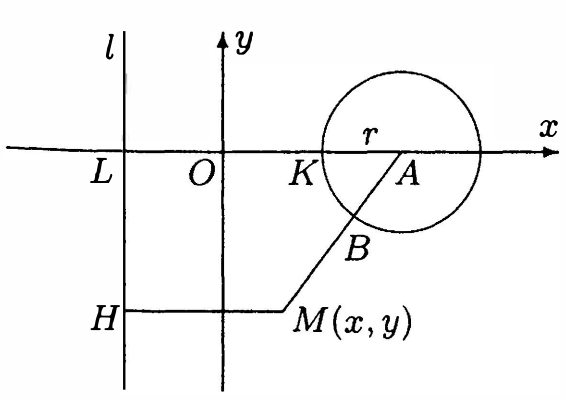


Рис. 4

Проведем ось Ox перпендикулярно прямой l так, чтобы она проходила через центр A данной окружности. Обозначим через L – точку пересечения оси Ox и прямой l, а через K – точку пересечения оси Ox с данной окружностью, ближайшую к прямой l. Выберем на оси Ox направление от точки L к точке K. Ось Oy проведем через середину отрезка LK перпендикулярно оси Ox. Будем считать также, что точка K имеет координаты $(1, 0)$.

При таком выборе системы координат прямая l задается уравнением $x = -1$ и, кроме того, $L(-1, 0)$ и $A(r + 1, 0)$.

Рассмотрим произвольную точку $M(x, y)$, принадлежащую искомому геометрическому месту.

Пусть H – основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую l, а B – точка пересечения отрезка MA и данной окружности. Тогда

$$\rho(M, l) = \rho(M, B) \iff \rho(M, H) = \rho(M, A) - r.$$

Очевидно, точка M расположена правее прямой l, и потому это соотношение в координатной форме имеет вид:

$$x + 1 = \sqrt{(x - r - 1)^2 + y^2} - r.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} & x + 1 + r = \sqrt{(x - r - 1)^2 + y^2} \iff \\ \iff \quad & x^2 + 2(r+1)x + (r+1)^2 = x^2 - 2(r+1)x + (r+1)^2 + y^2 \iff \\ \iff \quad & y^2 = 4(r+1)x. \end{aligned}$$

Последнее соотношение является каноническим уравнением *параболы* с фокальным параметром $p = 2(r+1)$. ∎

Пример 34.2. Даны эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ и точка $M_0(x_0, y_0)$. Выяснить, при каком расположении точки M_0 из нее можно провести касательные к эллипсу, и, если эти касательные существуют, найти их угловые коэффициенты.

Решение. Отметим сначала, что эллипс имеет лишь две вертикальные касательные: $x = a$ и $x = -a$. Тем самым, из точки $M_0(x_0, y_0)$ можно провести вертикальную касательную тогда и только тогда, когда $x_0 = \pm a$.

Рассмотрим теперь произвольную прямую, проходящую через точку M_0 и заданную уравнением с угловым коэффициентом

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{34.7}$$

Прямая (34.7) является касательной к эллипсу, заданному каноническим уравнением (34.1), тогда и только тогда, когда система

$$\begin{cases} y = y_0 + k(x - x_0), \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases} \tag{34.8}$$

имеет единственное решение. Выясним, при каких k имеет место это свойство.

Для этого подставим первое уравнение (34.8) во второе:

$$\begin{aligned} & \frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{b^2}(y_0 + kx - kx_0)^2 = 1 \iff \\ \iff \quad & \frac{b^2 + a^2k^2}{a^2b^2}x^2 + \frac{2k(y_0 - kx_0)}{b^2}x + \frac{(y_0 - kx_0)^2}{b^2} - 1 = 0. \end{aligned}$$

Последнее квадратное уравнение имеет единственное решение тогда и только тогда, когда его дискриминант равен нулю:

$$\frac{4k^2(y_0 - kx_0)^2}{b^4} - 4\frac{b^2 + a^2k^2}{a^2b^2}\left(\frac{(y_0 - kx_0)^2}{b^2} - 1\right) = 0 \iff b^2 + a^2k^2 = (y_0 - kx_0)^2.$$

Перепишем последнее соотношение как уравнение относительно углового коэффициента k:

$$(x_0^2 - a^2)k^2 - 2x_0y_0k + (y_0^2 - b^2) = 0. \tag{34.9}$$

Если $x_0 = \pm a$, то (34.9) имеет решение только, если $y_0 \neq 0$, и при этом

$$k = \frac{y_0^2 - b^2}{2x_0y_0}.$$

Таким образом, из точек $M_0(\pm a, y_0)$ можно провести:
– единственную вертикальную касательную $\iff$ $y_0 = 0$;
– две касательные $\iff$ $y_0 \neq 0$.

Пусть $x_0 \neq \pm a$. Тогда уравнение (34.9) – квадратное и число его решений определяется его дискриминантом

$$D = 4x_0^2y_0^2 - 4(x_0^2 - a^2)(y_0^2 - b^2) = 4a^2b^2\left(\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} - 1\right).$$

Уравнение (34.9) имеет единственное решение, т.е. из точки M_0 можно провести единственную касательную к эллипсу, если

$$D = 0 \iff \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1, \quad \text{т.е. точка } M_0 \text{ – точка эллипса.}$$

Уравнение (34.9) имеет два корня, т.е. из точки M_0 можно провести две различных касательных к эллипсу, если

$$D > 0 \iff \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} > 1, \quad \text{т.е. точка } M_0 \text{ лежит вне эллипса.}$$

Уравнение (34.9) не имеет решений, т.е. из точки M_0 нельзя провести ни одной касательной к эллипсу, если

$$D < 0 \iff \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} < 1, \quad \text{т.е. точка } M_0 \text{ лежит внутри эллипса.}$$

Отметим, что при $D \geq 0$ угловые коэффициенты касательных к эллипсу определяются в силу (34.9) по формуле

$$k = \frac{x_0y_0 \pm \sqrt{D/4}}{x_0^2 - a^2}. \quad \blacksquare$$

ЗАДАЧИ

В задачах этого параграфа считается, что система координат прямоугольная декартова.

34.1. Составить каноническое уравнение эллипса, если:
1) его полуоси равны 5 и 4;

2) расстояние между фокусами равно 8 и бóльшая полуось равна 5;

3) бóльшая полуось равна 13 и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{12}{13}$;

4) расстояния от одного из фокусов до концов бóльшей оси соответственно равны 7 и 1;

5) прямые $x = \pm 8$ являются директрисами, а малая ось равна 8;

6) расстояние между вершинами, лежащими на бóльшей оси, равно 16, а расстояние между фокусами равно 10;

7) фокусами эллипса являются точки $(\pm 1, 0)$, а точка $(\sqrt{3}, \sqrt{3}/2)$ принадлежит эллипсу;

8) фокусами эллипса являются точки $(\pm 2, 0)$, а директрисами являются прямые $x = \pm 18$;

9) расстояние от директрисы до ближайшей вершины равно 4, а до вершины, лежащей на оси, параллельной директрисе, равно 8;

10) треугольник с вершинами в фокусах и в конце малой оси правильный, а диаметр окружности, проходящей через центр и две вершины эллипса, равен 7.

34.2. Составить уравнение семейства эллипсов, имеющих одни и те же фокусы $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.

34.3. Оси эллипса совпадают с осями координат. Составить уравнение эллипса, если известно, что эллипс проходит через точки $P(2, 2)$, $Q(3, 1)$.

34.4. Определить эксцентриситет эллипса, зная, что:

1) его малая ось видна из фокуса под прямым углом;

2) расстояние между фокусами равно расстоянию между вершинами малой и большой осей;

3) расстояние между директрисами в четыре раза больше расстояния между фокусами;

4) отрезок между фокусом и дальней вершиной бóльшей оси делится вторым фокусом в отношении $2:1$.

34.5. Известно, что фокус эллипса имеет координаты $(1, 0)$, ему соответствует директриса $x = 7$, а эксцентриситет ε равен $1/2$. Найти второй фокус и вторую директрису этого эллипса.

34.6. Определить эксцентриситет эллипса, если расстояние между фокусами есть среднее арифметическое длин его осей.

34.7. Через фокус эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ проведена хорда, перпендикулярная к бо́льшей оси. Найти длину этой хорды.

34.8. Найти эксцентриситет эллипса, зная, что стороны вписанного в него квадрата проходят через фокусы эллипса параллельно его малой оси.

34.9. Составить уравнение прямой, проходящей через середины хорд эллипса $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$, лежащих на прямых $2x-y+7=0$ и $2x-y-1=0$.

34.9.1. Через точку $(x_0, 0)$ большей оси эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ проведена хорда с угловым коэффициентом k. Найти длину этой хорды.

34.9.2. Доказать, что среди хорд эллипса, параллельных заданной прямой, максимальную длину имеет хорда, проведенная через центр эллипса. Такая хорда называется *диаметром* эллипса.

34.9.3. Доказать, что две параллельные хорды эллипса равны тогда и только тогда, когда они симметричны относительно центра эллипса.

34.9.4. Многоугольник называется *вписанным* в эллипс, если все его вершины принадлежат этому эллипсу. Доказать, что диагонали параллелограмма, вписанного в эллипс, являются его диаметрами.

34.9.5. Доказать, что стороны прямоугольника, вписанного в эллипс, параллельны его осям.

34.10. Дан эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Вычислить длину стороны квадрата, вписанного в этот эллипс.

34.10.1. Доказать, что максимальная площадь параллелограмма, вписанного в эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и две стороны которого параллельны заданной прямой, равна $2ab$.

34.10.2. Доказать, что стороны прямоугольника максимальной площади, вписанного в эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, равны $\sqrt{2}a$ и $\sqrt{2}b$.

34.10.3. Доказать, что геометрическое место середин хорд эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ с угловым коэффициентом k есть диаметр эллипса с угловым коэффициентом $k_1 = -b^2/(ka^2)$.

34.10.4. Доказать, что сторона ромба, вписанного в эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = 1$, пересекает большую ось эллипса в точке с абсциссой

$$x_0 = \frac{ab\sqrt{1+k^2}}{k\sqrt{a^2+b^2}},$$

где k – угловой коэффициент этой стороны.

34.11. Доказать, что если d_1 и d_2 – длины взаимно перпендикулярных диаметров эллипса, то величина $d_1^{-2} + d_2^{-2}$ постоянна.

34.12. Написать уравнения эллипса и гиперболы с фокусами $(7,0)$ и $(-7,0)$, проходящих через точку $(-2,12)$.

34.13. Составить каноническое уравнение гиперболы, если:

1) действительная и мнимая полуоси соответственно равны 5 и 3;

2) фокальное расстояние равно 10 и вещественная полуось равна 4;

3) вещественная полуось равна 24 и эксцентриситет $\varepsilon = \frac{13}{12}$;

4) действительная полуось равна 8, а угол φ между асимптотой и действительной осью равен $\operatorname{arctg} \frac{3}{4}$;

5) расстояние между вершинами равно 10, а расстояние между фокусами равно 12;

6) действительная полуось равна $1/2$, а точка $(1,3)$ принадлежит гиперболе;

7) угол между асимптотами, содержащий фокус, равен $60°$, а расстояние от директрисы до ближайшей вершины равно $3(2-\sqrt{3})/2$;

8) эксцентриситет гиперболы равен $7/5$, а расстояние от вершины до ближайшего фокуса равно 2;

9) точка $(-1,3)$ принадлежит гиперболе, а асимптотами являются прямые $y = \pm 2x$.

34.14. Известно, что фокус гиперболы имеет координаты $(3,0)$, ему соответствует директриса $x = -1/5$, а эксцентриситет ε равен $5/3$. Найти второй фокус и вторую директрису этой гиперболы.

34.15. Пусть две гиперболы имеют общие асимптоты. Доказать, что:

1) если эти гиперболы лежат в одной и той же паре вертикальных углов, образованных их асимптотами, то их эксцентри-

ситеты равны между собой;

2) если эти гиперболы лежат в разных парах вертикальных углов, образованных их асимптотами, то произведение их эксцентриситетов больше или равно 2, причем это произведение равно 2 только для равносторонних гипербол.

34.16. Написать уравнение гиперболы, зная четыре точки $(\pm 4, 2)$, $(\pm 4, -2)$ пересечения ее директрис и асимптот.

34.17. Найти эксцентриситет равносторонней гиперболы.

34.18. Дана равносторонняя гипербола $x^2 - y^2 = 8$. Найти гиперболу с теми же фокусами, проходящую через точку $M(-5, 3)$.

34.19. На гиперболе $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ найти точку, для которой фокальные радиусы взаимно перпендикулярны.

34.20. Доказать, что произведение расстояний от любой точки гиперболы до двух ее асимптот есть величина постоянная.

34.21. Составить уравнение такой хорды гиперболы $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$, которая точкой $M(5, 1)$ делится пополам.

34.21.1. Доказать, что любая прямая пересекает гиперболу не более чем в двух точках.

34.21.2. *Хордой* гиперболы называется отрезок, концы которого лежат на гиперболе. Показать, что хорды гиперболы лежат на прямых, не параллельных ее асимптотам.

34.21.3. Найти длину хорды гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, если ее угловой коэффициент равен k $(k^2a^2 - b^2 \neq 0)$ и она проходит через точку $(x_0, 0)$ действительной оси гиперболы.

34.21.4. Доказать, что при $|k| < |b/a|$ хорда гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ с угловым коэффициентом k соединяет две различные ветви гиперболы. Показать, что среди всех таких хорд наименьшую длину имеет хорда, проходящая через центр гиперболы. Эта хорда называется *диаметром* гиперболы.

34.21.5. Доказать, что две параллельные хорды гиперболы равны тогда и только тогда, когда они симметричны относительно центра гиперболы.

34.21.6. Многоугольник называется *вписанным* в гиперболу, если все его вершины принадлежат этой гиперболе. Доказать, что диагонали параллелограмма, вписанного в гиперболу, являются его диаметрами.

34.21.7. Доказать, что стороны прямоугольника, вписанного в гиперболу, параллельны ее осям.

34.22. Дана гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Найти вершины квадрата, вписанного в эту гиперболу, и указать, в каком случае такое построение возможно.

34.22.1. Стороны квадрата, вписанного в гиперболу, проходят через ее фокусы. Найти ее эксцентриситет.

34.23. Составить каноническое уравнение параболы, если:

1) расстояние от фокуса до вершины параболы равно 3;

2) расстояние от фокуса до директрисы равно 12;

3) длина хорды, проходящей через фокус параллельно директрисе, равна 5;

4) длина хорды, проходящей через фокус под углом 45° к оси параболы, равна 18.

34.24. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы $y^2 = 6x$.

34.25. На параболе $y^2 = 8x$ найти точку, фокальный радиус которой равен 20.

34.26. На параболе $y^2 = 10x$ найти точку M такую, что:

1) прямая, проходящая через точку M и фокус параболы, образует с осью Ox угол 60°;

2) площадь треугольника с вершинами в искомой точке M, фокусе параболы и точке пересечения оси параболы с директрисой равна 5;

3) расстояние от точки M до вершины параболы равно расстоянию от точки M до фокуса;

4) расстояния от точки M до вершины параболы и до фокуса параболы относятся как $8:7$.

34.27. Через фокус параболы $y^2 = 2px$ проведена хорда, перпендикулярная к ее оси. Определить длину этой хорды.

34.28. Найти такую хорду параболы $y^2 = 4x$, которая точкой $(3, 1)$ делится пополам.

34.29. Найти длину стороны равностороннего треугольника, вписанного в параболу $y^2 = 2px$ так, что одна из вершин треугольника совпадает с вершиной параболы.

34.30. Написать уравнение касательной к эллипсу $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{18} =$

1 в точке $M(4,3)$.

34.31. Составить уравнения касательных к эллипсу $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$, проходящих через точку $N(10,4)$.

34.32. Дана прямая $x+y-1=0$. Составить уравнения касательных к эллипсу $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$: 1) параллельных данной прямой; 2) перпендикулярных данной прямой.

34.33. Доказать, что произведение расстояний от фокусов эллипса до любой его касательной есть величина постоянная, равная квадрату малой полуоси.

34.34. Дан эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и прямая $Ax+By+C=0$. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы данная прямая:

1) пересекала эллипс в двух точках;

2) касалась эллипса;

3) не имела с эллипсом общих точек.

34.35. Эллипс, имеющий фокусы в точках $F_1(-3,0)$, $F_2(3,0)$, касается прямой $x+y-5=0$. Составить уравнение эллипса.

34.36. Найти геометрическое место точек, из которых можно провести взаимно перпендикулярные касательные к эллипсу $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

34.36.1. Точка M называется *внутренней по отношению к эллипсу*, если любая прямая, проходящая через M, пересекает эллипс в двух точках. Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы точка $M(x_0,y_0)$ была внутренней для эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

34.36.2. Доказать, что точка M будет внешней по отношению к эллипсу тогда и только тогда, когда из M можно провести к этому эллипсу две различные касательные.

34.37. Составить уравнение касательной к гиперболе $x^2-y^2=8$ в точке $M(3,-1)$.

34.38. Составить уравнение касательных к гиперболе $x^2-\frac{y^2}{4}=1$, проходящих через точку $M(1,4)$.

34.39. Составить уравнение касательной к гиперболе $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$, если касательная:

1) параллельна прямой $3x - y - 17 = 0$;

2) перпендикулярна к прямой $2x + 5y + 11 = 0$.

34.40. Составить уравнение гиперболы, зная уравнения ее асимптот $y = \pm\frac{1}{2}x$ и уравнение одной из ее касательных $5x - 6y - 8 = 0$.

34.41. Гипербола, оси которой совпадают с осями координат, касается прямой $x - y - 2 = 0$ в точке $M(4,2)$. Составить уравнение этой гиперболы.

34.42. Даны гипербола $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и прямая $Ax + By + C = 0$. Найти необходимые и достаточные условия для того, чтобы данная прямая:

1) касалась гиперболы;

2) пересекала каждую ветвь гиперболы ровно в одной точке;

3) пересекала одну из ветвей гиперболы в двух точках;

4) пересекала ровно одну ветвь гиперболы в единственной точке.

34.43. Дана произвольная гипербола.

1) Существует ли общая касательная к обеим ветвям гиперболы?

2) Существует ли прямая, пересекающая каждую ветвь гиперболы в двух точках?

34.44. Можно ли к гиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ провести касательные с любым угловым коэффициентом k и если нет, то какому ограничению должен удовлетворять параметр k?

34.45. При каком условии из точки $M(x_0, y_0)$ к гиперболе $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ можно провести две касательные? Составить уравнения этих касательных.

34.46. Определить произведение расстояний от фокусов гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ до какой-либо ее касательной.

34.47. Найти площадь треугольника, образованного асимптотами гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ и произвольной касательной к этой гиперболе.

34.48. Доказать, что точка гиперболы служит серединой отрезка касательной к этой гиперболе, заключенного между асимптотами.

34.49. Эллипс и гипербола имеют общие фокусы. Доказать, что они пересекаются под прямым углом, т.е. касательные, построенные в точке пересечения к этим эллипсу и гиперболе, взаимно перпендикулярны.

34.50. Найти геометрическое место точек, из которых можно провести взаимно перпендикулярные касательные к гиперболе $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

34.50.1. Точка M называется *внутренней по отношению к гиперболе*, если любая прямая, проходящая через M и не параллельная ни одной из асимптот, пересекает гиперболу в двух точках. Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы точка $M(x_0, y_0)$ была внутренней для гиперболы $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

34.50.2. Доказать, что точка M, не совпадающая с центром гиперболы, будет внешней для этой гиперболы тогда и только тогда, когда из M можно провести к гиперболе по крайней мере одну касательную.

34.51. Дано уравнение касательной $x - 3y + 9 = 0$ к параболе $y^2 = 2px$. Составить уравнение параболы.

34.52. Дана парабола $y^2 = 2px$ и прямая $Ax + By + C = 0$. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы данная прямая:

1) касалась параболы;
2) пересекала параболу в одной точке;
3) пересекала параболу в двух точках;
4) не имела с параболой общих точек.

34.53. Доказать, что если из любой точки, не лежащей на параболе, можно провести либо две, либо ни одной касательной к этой параболе.

34.54. Найти геометрическое место середин отрезков касательных к параболе $y^2 = 2px$, заключенных между осями координат.

34.54.1. Найти геометрическое место оснований перпендикуляров, опущенных из фокуса параболы $y^2 = 2px$ на ее касательные.

34.55. Найти геометрическое место точек, из которых можно провести взаимно перпендикулярные касательные к параболе $y^2 = 2px$.

34.55.1. Точка M называется *внутренней по отношению к параболе*, если любая прямая, проходящая через M и пересекающая ось параболы, имеет с этой параболой две общие точки. Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы точка $M(x_0, y_0)$ была внутренней для параболы $y^2 = 2px$.

34.55.2. Доказать, что точка M будет внешней для параболы тогда и только тогда, когда из M можно провести к этой параболе две различные касательные.

34.56. Найти геометрическое место точек, делящих в отношении $\lambda \neq 1$ хорды окружности $x^2 + y^2 = a^2$, параллельные оси Oy.

34.57. Отрезок постоянной длины скользит своими концами по двум взаимно перпендикулярным прямым. Точка M делит этот отрезок на два отрезка, длины которых равны a и b. Найти линию, описываемую точкой M при движении отрезка.

34.58. Даны точки $A_1(-a, 0)$ и $A_2(a, 0)$. Найти геометрическое место точек пересечения прямых, проходящих через точки A_1 и A_2 и отсекающих на оси ординат отрезки, произведение величин которых равно b^2.

34.59. Около начала координат O как центра описаны две окружности радиусами a и b. Луч, вращающийся вокруг точки O, пересекает эти окружности соответственно в точках A и B. Через точку B проводится прямая, параллельная оси абсцисс, а через точку A – прямая, параллельная оси ординат. Найти геометрическое место точек M пересечения этих двух прямых при вращении луча.

34.60. Найти геометрическое место центров окружностей, касающихся двух данных окружностей, одна из которых расположена строго внутри другой.

34.61. Найти геометрическое место центров окружностей, касающихся данной окружности и проходящих через данную точку, лежащую внутри этой окружности.

34.62. Даны точки $A_1(-a, 0)$ и $A_2(a, 0)$. Найти геометрическое место точек пересечения прямых, проходящих через точки A_1 и A_2 и отсекающих на оси ординат отрезки, произведение величин которых равно $-b^2$.

34.63. Найти геометрическое место центров окружностей, касающихся внешним образом двух данных окружностей, одна из которых расположена вне другой.

34.64. Найти геометрическое место точек, произведение расстояний от которых до двух противоположных сторон заданного прямоугольника равно произведению расстояний до двух других его противоположных сторон.

34.65. Найти геометрическое место центров окружностей, касающихся данной окружности и проходящих через данную точку, лежащую вне этой окружности.

34.66. Найти геометрическое место точек, для каждой из которых произведение расстояний до двух пересекающихся прямых равно заданному положительному числу.

34.67. Найти геометрическое место точек, для каждой из которых сумма или разность расстояний до данной точки и до данной прямой есть величина постоянная.

§35. Линии второго порядка, заданные общими уравнениями

Пусть Oxy – аффинная система координат на плоскости. Алгебраическая линия второго порядка на плоскости определяется уравнением

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \tag{35.1}$$

где $a_{11}^2+a_{12}^2+a_{22}^2 \neq 0$. Уравнение (35.1) называется *общим уравнением* линии второго порядка. Группа слагаемых $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$ называется *квадратичной частью* уравнения (35.1) (или *группой старших членов*), группа слагаемых $2a_{13}x + 2a_{23}y$ – *линейной частью*, a_{33} – *свободным членом.*

В основе классификации линий второго порядка лежит принцип разбиения их на непересекающиеся классы так, чтобы были выполнены следующие условия:

– в каждом классе содержалось уравнение (35.1) одного, наиболее простого вида (например, такого, как канонические уравнения эллипса, гиперболы и параболы),

– все уравнения линий одного класса могли быть приведены к выбранному простейшему виду некоторым преобразованием системы координат.

В соответствии с этим принципом все линии второго порядка делятся на девять классов.

Теорема 35.1. *Общее уравнение* (35.1) *линии второго порядка переходом к новой аффинной системе координат $O'x'y'$ можно привести к одному и только одному из следующих девяти видов:*

	Уравнение	*Название линии*
1	$(x')^2 + (y')^2 = 1$	*Эллипс*
2	$(x')^2 + (y')^2 = -1$	*Мнимый эллипс*
3	$(x')^2 + (y')^2 = 0$	*Пара мнимых пересекающихся прямых*
4	$(x')^2 - (y')^2 = 1$	*Гипербола*
5	$(x')^2 - (y')^2 = 0$	*Пара пересекающихся прямых*
6	$(y')^2 = x'$	*Парабола*
7	$(y')^2 = 1$	*Пара параллельных прямых*
8	$(y')^2 = -1$	*Пара мнимых параллельных прямых*
9	$(y')^2 = 0$	*Пара совпадающих прямых*

Наиболее простым способом построения такого преобразования аффинной системы координат является *метод выделения полных квадратов* (*метод Лагранжа*).

Пример 35.1. Определить вид линии второго порядка, заданной уравнением

$$2x^2 - 4xy + y^2 + 4x - y = 0. \tag{35.2}$$

Решение. В уравнении (35.2) коэффициент $a_{11} = 2$ при x^2 отличен от нуля. Выделим полный квадрат в группе слагаемых левой части, содержащих переменную x:

$$2x^2 - 4xy + 4x = 2(x^2 - 2xy + 2x) = 2(x^2 - 2x(y-1) + (y-1)^2) - 2(y-1)^2 = \\ = 2(x - y + 1)^2 - 2y^2 + 4y - 2.$$

Тем самым, уравнение (35.2) перепишется в виде

$$2(x - y + 1)^2 - y^2 + 3y - 2 = 0.$$

В результате этого преобразования слагаемые $-y^2 + 3y - 2$ в левой части получившегося соотношения уже не содержат переменной x и, так как коэффициент при y^2, равный -1, отличен от нуля, к ним также можно применить процедуру выделения полного квадрата:

$$-y^2 + 3y - 2 = -\left(y^2 - 2\cdot\frac{3}{2}y + \frac{9}{4}\right) + \frac{9}{4} - 2 = -\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}.$$

Таким образом, уравнение (35.2) примет вид

$$2(x - y + 1)^2 - \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} = 0 \iff 4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 - 8(x - y + 1)^2 = 1 \iff \\ \iff (2y - 3)^2 - \left(2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 2\sqrt{2}\right)^2 = 1.$$

Переходя к новым переменным x', y' по формулам

$$\begin{cases} x' = 2y - 3, \\ y' = 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{2}y + 2\sqrt{2}, \end{cases}$$

получим уравнение

$$(x')^2 - (y')^2 = 1.$$

В силу теоремы 35.1 приходим к выводу, что исходное уравнение (35.2) задает гиперболу. ∎

Пример 35.2. Определить вид линии второго порядка, заданной уравнением

$$2xy + x - 2y - 1 = 0. \tag{35.3}$$

Решение. В отличие от предыдущего примера левая часть уравнения (35.3) не содержит слагаемых с x^2 и y^2. В этом случае следует сделать промежуточную замену переменных

$$x = x_1 + y_1, \quad y = x_1 - y_1.$$

В результате уравнение (35.3) примет вид:

$$2(x_1^2 - y_1^2) + x_1 + y_1 - 2(x_1 - y_1) - 1 = 0 \iff 2x_1^2 - 2y_1^2 - x_1 + 3y_1 - 1 = 0.$$

Здесь уже присутствуют слагаемые, содержащие x_1^2 и y_1^2, и поэтому в этом уравнении можно выделить полные квадраты относительно x_1 и y_1 по схеме, описанной в примере 35.1. Имеем

$$2\left(x_1^2 - \frac{1}{2}x_1\right) - 2\left(y_1^2 - \frac{3}{2}y_1\right) - 1 = 0 \iff$$
$$\iff 2\left(x_1 - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{8} - 2\left(y_1 - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{9}{8} - 1 = 0 \iff$$
$$\iff \left(x_1 - \frac{1}{4}\right)^2 - \left(y_1 - \frac{3}{4}\right)^2 = 0.$$

Вводя новые переменные x' и y' по формулам

$$\begin{cases} x' = x_1 - \dfrac{1}{4}, \\ y' = y_1 - \dfrac{3}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} x' = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{4}, \\ y' = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2}y - \dfrac{3}{4}, \end{cases}$$

получим уравнение

$$(x')^2 - (y')^2 = 0,$$

относящееся к пятому виду классификации теоремы 35.1, и следовательно, исходное уравнение (35.3) задает пару пересекающихся прямых. ∎

Если общее уравнение (35.1) линии второго порядка задано в прямоугольной декартовой системе координат, то метод Лагранжа, вообще говоря, не позволяет выяснить форму или расположение линии данного вида на плоскости, так как матрица перехода в получающемся преобразовании может быть неортогональной.

Если для линии второго порядка необходимо выяснить какие-либо ее метрические характеристики, применяют так называемый *метод вращений* в комбинации с последующим *переносом начала координат*.

Пример 35.3. Определить форму и расположение на плоскости линии второго порядка, заданной в прямоугольной декартовой системе координат Oxy уравнением

$$2x^2 - 4xy + 2y^2 + 3x - 5y + 1 = 0. \tag{35.4}$$

Решение. Выполним поворот системы координат так, чтобы в новой системе координат Ox_1y_1 уравнение (35.4) линии не содержало слагаемого с x_1y_1. Для общего уравнения (35.1) такой поворот осуществляется по формулам:

$$\begin{cases} x = \cos\varphi \cdot x_1 - \sin\varphi \cdot y_1, \\ y = \sin\varphi \cdot x_1 + \cos\varphi \cdot y_1, \end{cases} \qquad \text{где} \quad \operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}}. \tag{35.5}$$

В случае уравнения (35.4) имеем $\varphi = \pi/4$, и формулы (35.5) принимают вид

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - y_1), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + y_1).$$

Подставляя эти соотношения в (35.4), получим

$$(x_1 - y_1)^2 - 2(x_1 - y_1)(x_1 + y_1) + (x_1 + y_1)^2 + \frac{3}{\sqrt{2}}(x_1 - y_1) - \frac{5}{\sqrt{2}}(x_1 + y_1) + 1 = 0,$$

т.е.

$$4y_1^2 - \sqrt{2}x_1 - \frac{8}{\sqrt{2}}y_1 + 1 = 0. \tag{35.6}$$

Отметим, что новая ось абсцисс Ox_1 задается в исходной системе координат уравнением $y = x$, а новая ось ординат Oy_1 – уравнением $y = -x$.

Покажем теперь, что уравнение (35.6) переносом начала координат может быть приведено к каноническому уравнению параболы.

Для этого выделим полный квадрат относительно переменной y_1:

$$4\left(y_1^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}y_1\right) - \sqrt{2}x_1 + 1 = 0 \iff 4\left(y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 - \sqrt{2}\left(x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

и введем новые переменные по формулам

$$x' = x_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y' = y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}},$$

описывающим параллельный перенос системы координат в точку с координатами $x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ или, что то же самое, с координатами $x = -1$, $y = 0$ в исходной системе координат.

Таким образом, в построенной системе координат линия (35.4) задается уравнением

$$(y')^2 = \frac{\sqrt{2}}{4}x',$$

описывающим параболу с фокальным параметром $p = \sqrt{2}/8$.

Учитывая преобразования системы координат, получим, что уравнение (35.4) задает параболу с вершиной $(-1, 0)$, осью $y = x + 1$ и фокусом $F(-\frac{15}{16}, \frac{1}{16})$. ■

В случае общего уравнения (35.1) линии второго порядка на плоскости справедливо следующее утверждение.

Теорема 35.2. *Для любой линии второго порядка существует прямоугольная декартова система координат Oxy, в которой уравнение этой линии имеет один из следующих видов:*

	Каноническое уравнение	*Название линии*
1	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ a\ge b>0$	*Эллипс*
2	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1,$	*Мнимый эллипс*
3	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0,$	*Пара мнимых пересекающихся прямых*
4	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1,$	*Гипербола*
5	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0,$	*Пара пересекающихся прямых*
6	$y^2=2px,\quad p>0$	*Парабола*
7	$y^2=a^2,\quad a>0$	*Пара параллельных прямых*
8	$y^2=-a^2,\quad a>0$	*Пара мнимых параллельных прямых*
9	$y^2=0$	*Пара совпадающих прямых*

Отметим, что вид, форму и расположение на плоскости линии второго порядка, заданной общим уравнением (35.1), можно определить и непосредственно с помощью коэффициентов a_{ij}, используя так называемые инварианты линий второго порядка.

Введем матрицы

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{12} & a_{22}\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{bmatrix}.$$

Числа $I_1=\operatorname{tr}A$, $I_2=|A|$, $K_3=|B|$ называются *инвариантами линии второго порядка*, число $K_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13}\\ a_{13} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{23} & a_{33}\end{vmatrix}$ – ее *полуинвариантом*. Уравнение

$$\det(A-\lambda I)=0 \iff \lambda^2-I_1\lambda+I_2=0 \tag{35.7}$$

называется *характеристическим*.

Теорема 35.3. *1) При повороте прямоугольной декартовой системы координат инварианты I_1, I_2, K_3 и полуинвариант K_2 линии второго порядка не изменяются.*

2) При переносе начала координат инварианты I_1, I_2, K_3 не изменяются, а полуинвариант K_2 остается прежним, если $I_2=K_3=0$.

В силу (35.7) корни λ_1, λ_2 характеристического многочлена линии второго порядка также не меняются при переходе от одной прямоугольной декартовой системы координат к другой прямоугольной декартовой системе.

Связь инвариантов с каноническими уравнениями линий второго порядка показана в нижеследующей таблице.

Признаки линий, приведенные в этой таблице, справедливы и в случае аффинной системы координат. Что же касается канонических уравнений, то

для их представления через инварианты необходимо использова
ские коэффициенты базиса исходной системы координат[1].

Приведенное уравнение		Каноническое уравнение линии	Название линии
$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \frac{K_3}{I_2} = 0$, $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$	1	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a \geq b > 0$	Эллипс
	2	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	Мнимый эллипс
	3	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	Пара мнимых пересекающихся прямых
	4	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	Гипербола
	5	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	Пара пересекающихся прямых
$I_1 y^2 \pm 2\sqrt{-\frac{K_3}{I_1}}x = 0$, $I_1 K_3 \neq 0$	6	$y^2 = 2px$, $p > 0$	Парабола
$I_1 y^2 + \frac{K_2}{I_1} = 0$, $I_1 \neq 0$	7	$y^2 = a^2$, $a > 0$	Пара параллельных прямых
	8	$y^2 = -a^2$, $a > 0$	Пара мнимых параллельных прямых
	9	$y^2 = 0$	Пара совпадающих прямых

Центром линии второго порядка называется ее центр симм

Теорема 35.4. *Точка $M_0(x_0, y_0)$ является центром рого порядка, заданной в аффинной системе координат уравне тогда и только тогда, когда ее координаты x_0, y_0 являются р стемы*

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13} = 0, \\ a_{12}x + a_{22}y + a_{23} = 0. \end{cases}$$

[1]Подробнее сведения о связи различных параметров линий рядка с коэффициентами a_{ij} их общих уравнений можно полу мер, из [1, с.128–139].

Отметим, что первые пять линий второго порядка, характеризуемые условием $I_2 \neq 0$, имеют единственный центр и называются *центральными*. Последние три линии ($I_2 = K_3 = 0$) имеют прямую целиком состоящую из их центров, и, наконец, единственная линия – парабола – вообще не имеет центра ($I_2 = 0$, $K_3 \neq 0$).

ЗАДАЧИ

В задачах этого параграфа считается, что система координат прямоугольная декартова. Случай произвольной аффинной системы координат оговаривается особо.

35.1. Эллипс с полуосями a и b перемещен так, что его центр совпал с точкой $C(x_0, y_0)$, а оси остались параллельными осям координат. Какое уравнение имеет эллипс в своем новом положении?

35.2. Написать уравнение эллипса, пересекающего ось Ox в точках $(1, 0)$, $(9, 0)$ и касающегося оси Oy в точке $(0, 3)$, зная, что его оси параллельны осям координат.

35.3. Написать уравнение эллипса, оси которого параллельны осям координат, если он касается осей Ox и Oy соответственно в точках $(5, 0)$ и $(0, 3)$.

35.4. Эллипс касается оси ординат в начале координат, а центр его находится в точке $(5, 0)$. Составить уравнение эллипса, зная, что его эксцентриситет ε равен $4/5$.

35.5. Составить уравнение эллипса, фокусы которого имеют координаты $F_1(0, 1)$, $F_2(1, 0)$, а бо́льшая полуось равна 1.

35.6.Написать уравнение эллипса с полуосями $a = 2$, $b = 1$, для которого прямые $x + y - 1 = 0$ и $x - y + 1 = 0$ суть соответственно большая и малая оси.

35.7. Эллипс при движении по плоскости касается двух взаимно перпендикулярных прямых. Какую линию описывает центр эллипса?

35.8. Написать уравнение гиперболы, проходящей через точку $(1, 0)$, если известно, что ее асимптотами являются прямые $x = 0$ и $y = 1$.

35.9. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой имеют координаты $(1, 0)$, $(0, 1)$, а асимптоты параллельны осям координат.

35.9.1. Доказать, что уравнение $y = \dfrac{ax + b}{cx + d}$, где $c \neq 0$ и

$ad \neq bc$, задает на координатной плоскости равностороннюю гиперболу. Найти ее фокусы.

35.10. Написать уравнение равносторонней гиперболы, зная ее фокус $(1, 1)$ и асимптоту $x + y = 0$.

35.11. Написать уравнение равносторонней гиперболы, зная ее фокус $(2, 0)$ и асимптоту $x = 1$.

35.12. Составить уравнение гиперболы, зная один из ее фокусов $(-2, 2)$ и асимптоты $2x - y + 1 = 0$, $x + 2y - 7 = 0$.

35.13. Составить уравнение параболы, зная, что фокус имеет координаты: а) $(5, 0)$, б) $(-3, 1)$, а ось ординат служит директрисой.

35.14. Определить фокус параболы $y = x^2 - 4x + 5$.

35.15. Составить уравнение параболы, зная, что ее вершина имеет координаты (a, b), фокальный параметр равен p и направление оси симметрии совпадает: 1) с положительным направлением оси Ox; 2) с отрицательным направлением оси Ox; 3) с положительным направлением оси Oy; 4) с отрицательным направлением оси Oy.

35.16. Написать уравнение параболы, вершина которой находится в точке $(2, 6)$, а ось параллельна оси Oy, зная, что на оси Ox эта парабола высекает хорду длины 6.

35.17. Доказать, что параболы, имеющие общий фокус и совпадающие, но противоположно направленные оси, пересекаются под прямым углом (т.е. касательные, проведенные к ним в каждой точке их пересечения, взаимно перпендикулярны).

35.18. Написать уравнение параболы, касающейся оси Ox в точке $(3, 0)$, а оси Oy в точке $(0, 2)$.

35.19. Написать уравнение параболы, проходящей через точки $(0, 0)$, $(0, 1)$, осью которой служит прямая $x + y + 1 = 0$.

35.20. Написать уравнение параболы, зная ее директрису $x - y + 8 = 0$ и фокус $F(-1, -2)$.

35.21. Написать уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, а фокус – в точке $F(1, 1)$.

35.21.1. Составить уравнение линии второго порядка, зная ее фокус $F(1, 1)$, директрису $x + 2y - 1 = 0$ и эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{5}$.

35.21.2. Составить уравнение линии второго порядка, зная ее фокусы $F_1(1, 1)$, $F_2(-2, -2)$ и одну из ее директрис $x + y - 1 = 0$.

35.21.3. Составить уравнение линии второго порядка, зная ее фокус $F(-3,-7)$, центр $(-1,-3)$ и одну из директрис $x+2y-4=0$.

35.22. Пользуясь методом Лагранжа, определить вид следующих линий второго порядка (система координат аффинная):

1) $2x^2+3xy+4y^2-5x+2y-1=0$;
2) $4x^2-4xy+y^2-8x+6y-2=0$;
3) $2xy-4y^2+6x+6y+1=0$;
4) $x^2-4xy+y^2-4x+2y-2=0$;
5) $x^2-2xy+4y^2+2x-2y-4=0$;
6) $x^2+4xy+4y^2-6x-8y=0$.

35.23. Пользуясь методом Лагранжа, показать, что каждое из нижеследующих уравнений определяет пару прямых, и найти уравнения этих прямых (система координат аффинная):

1) $2x^2-5xy-12y^2-x+26y-10=0$;
2) $3x^2+xy-2y^2-5x+5y-2=0$;
3) $4x^2+16xy+15y^2-8x-22y-5=0$;
4) $4x^2-4xy+y^2-6x+3y-4=0$.

35.24. Используя параллельный перенос, выяснить вид и расположение на координатной плоскости следующих линий второго порядка:

1) $x^2+y^2-2x+6y-5=0$;
2) $x^2+4y^2+4x-8y-8=0$;
3) $x^2+2y^2+8x-4=0$;
4) $9x^2-y^2-18x-20y-316=0$;
5) $6x^2-5y^2+12x-10y+31=0$;
6) $x^2-4y^2+6x+5=0$;
7) $y^2-10x-2y-19=0$;
8) $y^2-6x+14y+49=0$;
9) $y^2+8x-16=0$;
10) $x^2-6x-4y+29=0$;
11) $2x^2+y^2-4x+4y=0$;
12) $6x^2+8y^2+3x-4y+1=0$;
13) $2x^2+9y^2-12x-6y+19=0$;
14) $3x^2-2y^2+6x+4y+1=0$;
15) $x^2+x-6=0$;
16) $y^2-5y+11=0$;
17) $25x^2-30x+9=0$.

35.25. Линия второго порядка определяется уравнением
$$x^2-2y+\lambda(y^2-2x)=0.$$

Определить тип линии при каждом вещественном значении параметра λ и описать ее расположение относительно данной системы координат.

35.26. При каком необходимом и достаточном условии уравнение $Ax^2 + By^2 + 2Cx + 2Dy + E = 0$ задает: 1) эллипс; 2) гиперболу? Система координат аффинная.

35.27. Используя метод вращений, определить форму и расположение на плоскости следующих линий второго порядка:

1) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$;
2) $xy + x + y = 0$;
3) $5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9 = 0$;
4) $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0$;
5) $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0$;
6) $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$;
7) $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$;
8) $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 2x + 3y - 2 = 0$;
9) $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$;
10) $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x - 8y - 1 = 0$;
11) $6xy - 8y^2 + 12x - 26y - 11 = 0$;
12) $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$;
13) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0$;
14) $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y - 4 = 0$.

35.28. Линия второго порядка определяется уравнением
$$x^2 + 2\lambda xy + y^2 = 1.$$
Определить вид линии при каждом вещественном значении параметра λ и описать ее расположение относительно данной системы координат.

§36. Эллипсоиды, гиперболоиды, параболоиды

Эллипсоиды. Поверхность, определяемая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ уравнением
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{36.1}$$
называется *эллипсоидом* (рис. 1). Уравнение (36.1) называется *каноническим уравнением* эллипсоида, а соответствующая система координат $Oxyz$ – *канонической* для данного эллипсоида.

Числа a, b, c в каноническом уравнении (36.1) называются *полуосями* эллипсоида. Если a, b, c попарно различны, то эллипсоид называется *трехосным*. Если две полуоси эллипсоида совпадают, то такой эллипсоид называ-

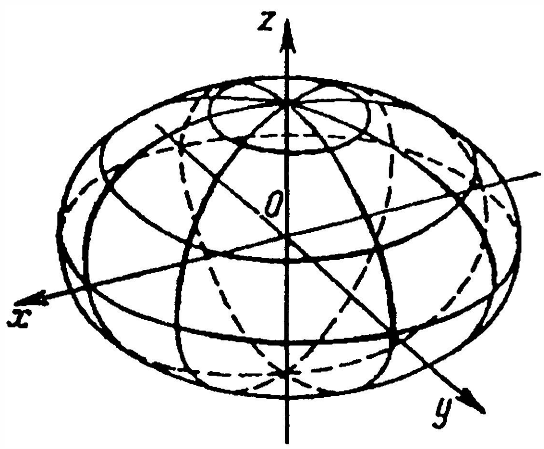


Рис. 1

ется *эллипсоидом вращения*. Если же $a = b = c$, то эллипсоид (36.1) является сферой радиуса a с центром в начале координат.

Эллипсоид обладает следующими простейшими свойствами.

1°. *Координатные плоскости канонической системы координат эллипсоида являются плоскостями симметрии, координатные оси – осями симметрии, а центр координат – центром симметрии эллипсоида.* Координатные оси канонической системы координат называются *главными осями*, а начало координат – *центром* эллипсоида.

2°. *Эллипсоид – ограниченная поверхность, заключенная в параллелепипеде* $|x| \le a$, $|y| \le b$, $|z| \le c$. Если эллипсоид трехосный, то точки $(a, 0, 0)$, $(-a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, -b, 0)$, $(0, 0, c)$, $(0, 0, -c)$ пересечения эллипсоида с его главными осями называются *вершинами* эллипсоида.

3°. *Линия пересечения эллипсоида с любой плоскостью его сечения является эллипсом.*

Отметим, что для любого эллипсоида существует семейство плоскостей, пересекающих этот эллипсоид по окружностям. Например, если эллипсоид трехосный и $a > b > c$, то таковыми являются плоскости

$$c\sqrt{a^2 - b^2}x \pm a\sqrt{b^2 - c^2}z + \lambda ac\sqrt{a^2 - c^2} = 0,$$

где $|\lambda| < 1$.

Пример 36.1. Дан эллипсоид

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1 \tag{36.2}$$

и плоскость

$$3x + 4y + 6z - 12 = 0. \tag{36.3}$$

Установить, пересекает ли эта плоскость эллипсоид, и в случае положительного ответа найти центр линии сечения.

Решение. Плоскость (36.3) проходит через три точки $M_0(0, 0, 2)$, $M_1(6, 0, -1)$, $M_2(0, 6, -2)$. Если за направляющие векторы этой плоскости взять векторы $\mathbf{e}_1 = \{6, 0, -3\}$ и $\mathbf{e}_2 = \{0, 6, -4\}$, то ее параметрическое уравнение будет иметь вид

$$\begin{cases} x = 6u, \\ y = 6v, \\ z = 2 - 3u - 4v. \end{cases} \tag{36.4}$$

Соотношения (36.4) означают, что u и v – декартовы координаты точки плоскости (36.3) в плоскостной системе координат $\{M_0;\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2\}$.

Подставляя (36.4) в уравнение эллипсоида (36.2), получим уравнение линии пересечения в плоскостной системе координат $\{M_0;\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2\}$

$$4u^2 + 9v^2 + (2 - 3u - 4v)^2 = 1$$

или

$$13u^2 + 24uv + 25v^2 - 12u - 16v + 3 = 0.$$

Это уравнение определяет эллипс, так как (см. §35)

$$I_2 = \begin{vmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 25 \end{vmatrix} > 0, \quad I_1 K_3 = 38 \begin{vmatrix} 13 & 12 & -6 \\ 12 & 25 & -8 \\ -6 & -8 & 3 \end{vmatrix} < 0.$$

Координаты центра эллипса определяются из системы

$$\begin{cases} 13u + 12v - 6 = 0, \\ 12u + 25v - 8 = 0 \end{cases} \implies u = \frac{54}{181},\ v = \frac{32}{181}.$$

Отсюда и из (36.4) находим координаты центра в исходной системе координат $Oxyz$:

$$x = \frac{324}{181},\ y = \frac{192}{181},\ z = \frac{72}{181}. \quad \blacksquare$$

Пример 36.2. Составить уравнение эллипсоида, оси которого совпадают с осями координат, если известно, что он проходит через окружность $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z = x$, и точку $M_0(3, 1, 1)$. Система координат прямоугольная.

Решение. Точки $M_1(0, 3, 0)$, $M_2\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, 0, \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$ лежат на окружности. Так как оси эллипсоида совпадают с осями координат, то уравнение эллипсоида имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Величины a, b, c находятся из того, что координаты точек M_0, M_1, M_2 удовлетворяют этому уравнению:

$$\begin{cases} 9a^{-2} + b^{-2} + c^{-2} = 1, \\ 9b^{-2} = 1, \\ \frac{9}{2}a^{-2} + \frac{9}{2}c^{-2} = 1 \end{cases} \implies a^2 = 12, \quad b^2 = 9, \quad c^2 = 7{,}2.$$

Таким образом, искомое уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{7{,}2} = 1. \quad \blacksquare$$

Гиперболоиды. Поверхность, определяемая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{36.5}$$

называется *однополостным гиперболоидом* (рис. 2), а поверхность, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1, \tag{36.6}$$

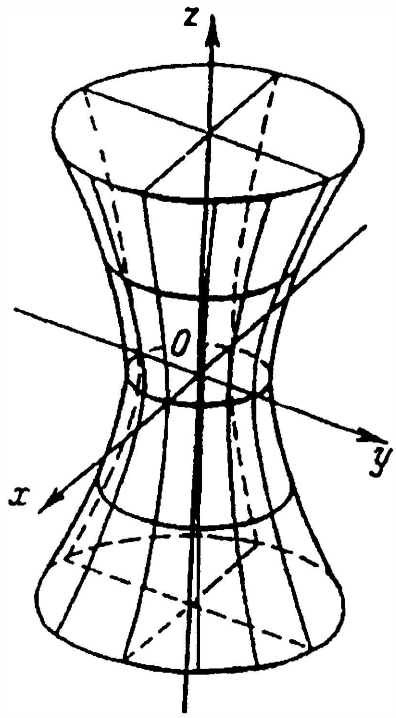


Рис. 2

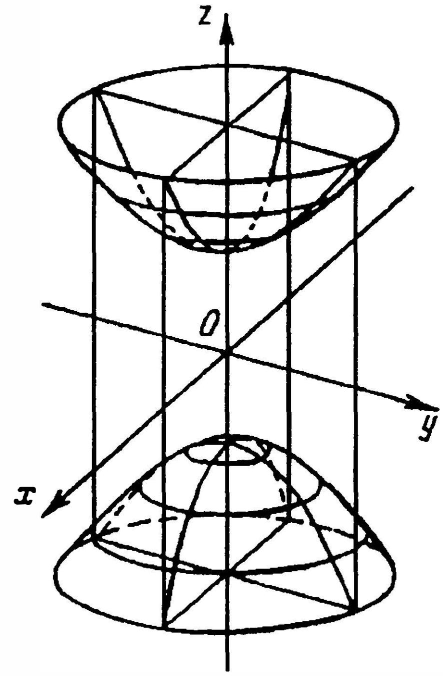


Рис. 3

называется *двуполостным гиперболоидом* (рис. 3).

Уравнения (36.5) и (36.6) называются *каноническими уравнениями* соответственно однополостного и двуполостного гиперболоидов, а соответствующие системы координат $Oxyz$ – *каноническими* для данного гиперболоида.

Числа a, b, c в канонических уравнениях (36.5) и (36.6) называются *полуосями* гиперболоидов. Если полуоси a и b гиперболоида равны, то такой гиперболоид называется *гиперболоидом вращения.*

Однополостный и двуполостный гиперболоиды обладают следующими простейшими свойствами.

1°. *Координатные плоскости канонической системы координат гиперболоида являются плоскостями симметрии, координатные оси – осями симметрии, а центр координат – центром симметрии гиперболоида.* Координатные оси канонической системы координат называются *главными осями*, а начало координат – *центром* гиперболоида.

Для однополостного гиперболоида (36.5) с неравными полуосями $a \neq b$ точки $(a,0,0)$, $(-a,0,0)$, $(0,b,0)$, $(0,-b,0)$ пересечения гиперболоида с его главными осями Ox и Oy называются его *вершинами. Вершинами* же двуполостного гиперболоида (36.6) называются точки $(0,0,c)$, $(0,0,-c)$ пересечения гиперболоида с его главной осью Oz.

2°. *Гиперболоиды – неограниченные поверхности, причем двуполостный гиперболоид состоит из двух симметричных непересекающихся поверхностей (полостей), расположенных в полупространствах* $|z| \geq c$.

3°. *Сечения гиперболоидов плоскостями $z = h$, где h любое – для однополостного гиперболоида и $|h| > c$ – для двуполостного гиперболоида, представляют собой эллипсы, чьи полуоси неограниченно возрастают при* $h \to \infty$. Эллипс, получающийся в сечении однополостного гиперболоида при $h = 0$, называется его *горловым эллипсом.*

4°. *Сечения гиперболоидов плоскостями $x = h$ и $y = h$ представляют собой гиперболы за исключением одного случая: плоскости $x = \pm a$ и $y = \pm b$ пересекают однополостный гиперболоид* (36.5) *по паре пересекающихся* *прямых.*

Последнее свойство указывает на важную особенность однополостного гиперболоида – наличие прямых, целиком на нем лежащих. Прямые, все точки которых лежат на поверхности, называются *прямолинейными образующими* этой поверхности.

Теорема 36.1. *Через каждую точку однополостного гиперболоида* (36.5) *проходят две прямолинейные образующие, общие уравнения которых имеют вид*

$$\begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\beta\left(1-\frac{y}{b}\right), \\ \beta\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\alpha\left(1+\frac{y}{b}\right), \\ \alpha^2+\beta^2\neq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \gamma\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\delta\left(1+\frac{y}{b}\right), \\ \delta\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\gamma\left(1-\frac{y}{b}\right), \\ \gamma^2+\delta^2\neq 0. \end{cases}$$

Пример 36.3. Определить вид линии пересечения двуполостного гиперболоида

$$x^2+y^2-z^2=-4$$

с плоскостью

$$x+y-z+3=0. \tag{36.7}$$

Решение. Запишем уравнение плоскости (36.7) в параметрической форме

$$\begin{cases} x=u, \\ y=v, \\ z=u+v+3. \end{cases}$$

Значит, u и v – плоскостные координаты точки плоскости (36.7) в системе координат $\{M_0;\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2\}$, где $M_0(0,0,3)$, $\mathbf{e}_1=\{1,0,1\}$, $\mathbf{e}_2=\{0,1,1\}$.

Уравнение линии пересечения в этой системе координат имеет вид

$$u^2+v^2-(u+v+3)^2+4=0$$

или

$$2uv+6u+6v+5=0.$$

Преобразование координат $u=u'+v', v=u'-v'$ приводит это уравнение к виду $(u')^2-(v')^2+12u'+5=0$ или $(u'+6)^2-(v')^2=31$. Перенос начала координат $u''=u'+6, v''=v'$ дает уравнение гиперболы $(u'')^2-(v'')^2=31$. ∎

Пример 36.4. Составить уравнения прямолинейных образующих однополостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1,$$

проходящих через точку $M_0(4,3,2)$.

Решение. Согласно теореме 36.1 через каждую точку гиперболоида проходят две прямолинейные образующие

$$l_1: \begin{cases} \alpha\left(\frac{x}{4}-\frac{z}{2}\right)=\beta\left(1-\frac{y}{3}\right), \\ \beta\left(\frac{x}{4}+\frac{z}{2}\right)=\alpha\left(1+\frac{y}{3}\right), \\ \alpha^2+\beta^2\neq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad l_2: \begin{cases} \gamma\left(\frac{x}{4}-\frac{z}{2}\right)=\delta\left(1+\frac{y}{3}\right), \\ \delta\left(\frac{x}{4}+\frac{z}{2}\right)=\gamma\left(1-\frac{y}{3}\right), \\ \gamma^2+\delta^2\neq 0. \end{cases}$$

Так как они пересекаются в точке M_0, то $\alpha = \beta = 1$, $\delta = 0$. Таким образом, искомые прямые имеют уравнения

$$l_1 : \begin{cases} \dfrac{x}{4} - \dfrac{z}{2} = 1 - \dfrac{y}{3}, \\ \dfrac{x}{4} + \dfrac{z}{2} = 1 + \dfrac{y}{3} \end{cases} \quad \text{и} \quad l_2 : \begin{cases} \dfrac{x}{4} - \dfrac{z}{2} = 0, \\ 1 - \dfrac{y}{3} = 0. \end{cases} \blacksquare$$

Параболоиды. Поверхность, определяемая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z, \tag{36.8}$$

где $a, b > 0$, называется *эллиптическим параболоидом* (рис. 4), а поверхность, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z, \tag{36.9}$$

где $a, b > 0$, называется *гиперболическим параболоидом* (рис. 5).

Уравнения (36.8) и (36.9) называются *каноническими уравнениями* соответственно эллиптического и гиперболического параболоидов, а соответствующие системы координат $Oxyz$ – *каноническими* для данного параболоида.

Если в уравнении (36.8) эллиптического параболоида $a = b$, то такой параболоид называется *параболоидом вращения*.

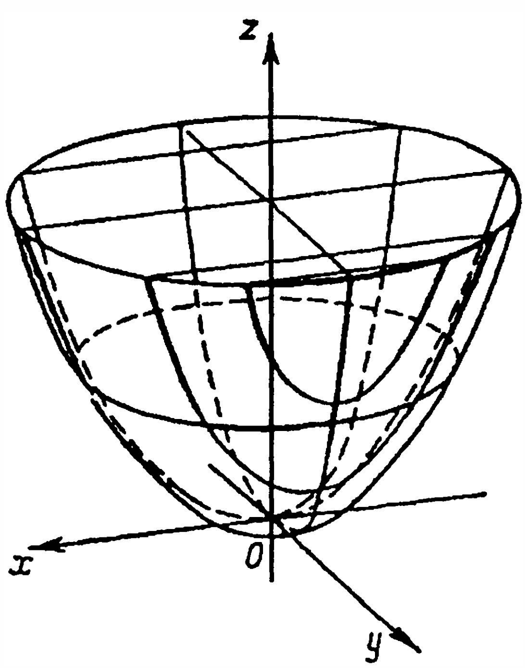


Рис. 4

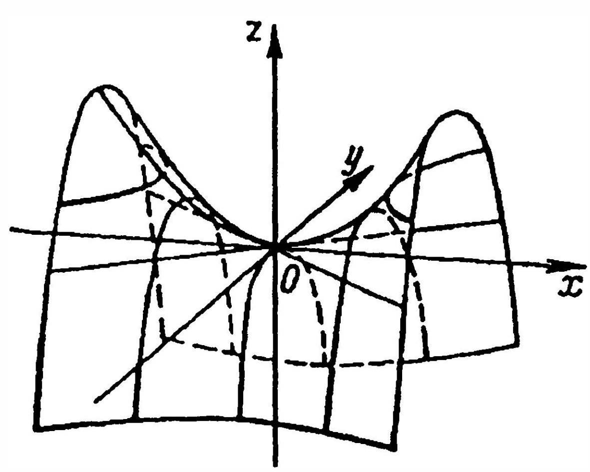


Рис. 5

Эллиптический и гиперболический параболоиды обладают следующими простейшими свойствами.

1°. *Координатные плоскости Oxz и Oyz канонической системы координат параболоида являются плоскостями симметрии, а координатная ось Oz – осью симметрии параболоида.* Точка $O(0,0,0)$ пересечения параболоида с его осью симметрии называется *вершиной* параболоида. Плоскость Oxy служит касательной плоскостью к параболоиду в его вершине.

2°. *Параболоиды – неограниченные поверхности, причем эллиптический параболоид целиком расположен в полупространстве $z \geq 0$.*

3°. *Плоскости $x = h$ и $y = h$ пересекают эллиптический параболоид по параболам, ветви которых направлены вверх. Сечения же эллиптического параболоида плоскостями $z = h$, $h > 0$, представляют собой эллипсы, чьи полуоси неограниченно возрастают при $h \to \infty$.*

4°. *Плоскости $x = h$ и $y = h$ пересекают гиперболический параболоид по параболам, причем ветви первой параболы направлены вниз, а второй – вверх. Сечения же гиперболического параболоида плоскостями $z = h$ представляют собой гиперболы за исключением одного случая: касательная плоскость $z = 0$ пересекает эту поверхность по паре пересекающихся прямых.*

Как и однополостный гиперболоид, гиперболический параболоид покрыт двумя семействами прямолинейных образующих.

Теорема 36.2. *Через каждую точку гиперболического параболоида (36.9) проходят две прямолинейные образующие, общие уравнения которых имеют вид:*

$$\begin{cases} \alpha z = \beta\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right), \\ 2\beta = \alpha\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right), \\ \alpha^2 + \beta^2 \neq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \gamma z = \delta\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right), \\ 2\delta = \gamma\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right), \\ \gamma^2 + \delta^2 \neq 0. \end{cases}$$

Пример 36.5. Составить уравнения прямой, на которой лежат центры сечений эллиптического параболоида

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 2z$$

плоскостями, параллельными плоскости $x = z$.

Решение. Плоскость, параллельная плоскости $x = z$, имеет уравнение $x - z + t = 0$, $t \in \mathbb{R}$. Она проходит через точку $M_0(0,0,t)$ и имеет направляющие векторы $\mathbf{e}_1 = \{1,0,1\}$, $\mathbf{e}_2 = \{0,1,0\}$, поэтому ее параметрическое уравнение имеет вид

$$\begin{cases} x = u, \\ y = v, \\ z = t + u, \end{cases} \tag{36.10}$$

где u и v – плоскостные координаты точки плоскости в декартовой системе координат $\{M_0;\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2\}$.

Уравнение линии пересечения параболоида с такой плоскостью имеет вид

$$\frac{u^2}{16} + \frac{v^2}{9} = 2(t + u) \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{u}{4} - 4\right)^2 + \frac{v^2}{9} = 2t + 16,$$

поэтому центр линии пересечения (эллипса или пары пересекающихся прямых) определяется из условий $\dfrac{u}{4} = 4$, $\dfrac{v}{9} = 0$.

С учетом (36.10) получим, что центры сечений лежат на прямой $x = 16, y = 0$. ■

ЗАДАЧИ

В задачах этого параграфа считается, что система координат прямоугольная декартова.

36.1. Составить уравнение эллипсоида, оси которого совпадают с осями координат, если он пересекает координатные плоскости Oxz и Oyz соответственно по линиям $y = 0$, $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{z^2}{16} = 1$ и $x = 0$, $\dfrac{y^2}{9} + \dfrac{z^2}{16} = 1$.

36.2. Составить уравнение эллипсоида, оси которого совпадают с осями координат, если он проходит через эллипс $z = 0$, $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ и через точку $M(1, 2, \sqrt{23})$.

36.3. Составить уравнение эллипсоида, оси которого совпадают с осями координат, если он проходит через окружность $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $z = x$ и точку $M(3, 1, 1)$.

36.4. Написать уравнение эллипсоида с вершинами в точках $(0, 0, 6)$ и $(0, 0, -2)$, зная, что плоскость Oxy пересекает его по окружности радиуса 3.

36.4.1. Составить уравнение эллипсоида, оси которого параллельны осям координат, зная, что в его сечении плоскостью Oyz лежит эллипс $2y^2 + 4z^2 - 4y + 8z + 3 = 0$, а плоскостью Oxz – эллипс $x^2 + 4z^2 - 2x + 8z + 3 = 0$.

36.5. Написать уравнение поверхности, получающейся при вращении эллипса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > b)$, $z = 0$:

1) вокруг его большой оси; 2) вокруг его малой оси.

36.6. Установить, при каких значениях D плоскость $2x+2y+z - D = 0$ пересекает эллипсоид $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$.

36.7. Найти ортогональную проекцию на плоскость Oxy линии пересечения эллипсоида $x^2 + 4y^2 + 16z^2 = 16$ и плоскости $x + 4z - 4 = 0$.

36.8. Найти центр сечения эллипсоида $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 10$ плоскостью:

1) $x + y + 2z = 5$; 2) $x + y + z = 7$.

36.9. Найти уравнение множества центров сечений эллипсоида $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4$ плоскостями, параллельными плоскости

$x + y + z = 1$.

36.10. Найти уравнение плоскости, пересекающей эллипсоид $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 9$ по эллипсу, центр которого находится в точке $C(3, 2, 1)$.

36.11. Определить координаты центра окружности, лежащей в сечении сферы $x^2+y^2+z^2 = R^2$ плоскостью $Ax+By+Cz+D = 0$. При каком необходимом и достаточном условии такое сечение существует?

36.12. Доказать, что если u и v – большая и малая полуоси эллипса, получающегося при пересечении эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > b > c > 0,$$

плоскостью, проходящей через его центр, то

$$a \geq u \geq b \geq v \geq c.$$

36.13. Найти полуоси эллипсов, лежащих в сечении:

1) эллипсоида $x^2 + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{9} = 1$ плоскостью $x + y = 0$;
2) эллипсоида $4x^2 + y^2 + 4z^2 = 4$ плоскостью $x - y = 1$;
3) эллипсоида $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$ плоскостью $x + y + z = 0$;
4) эллипсоида $2x^2 + y^2 + z^2 = 1$ плоскостью $x + y - z = 1$.

36.13.1. Доказать, что сечения эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > b > c > 0,$$

плоскостями

$$c\sqrt{a^2 - b^2}x \pm a\sqrt{b^2 - c^2}z + D = 0,$$

где $|D| < ac\sqrt{a^2 - c^2}$, представляют собой окружности. Найти их радиусы.

36.14. Выяснить, по какой линии пересекаются два эллипсоида

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad a > b.$$

36.15. Написать уравнение однополостного гиперболоида вращения, проходящего через прямые $y = \pm x$, $z = 0$ и через точку $(1, 2, 3)$, если известно, что ось Oz является его осью симметрии.

36.16. Написать уравнение двуполостного гиперболоида с вершинами $(0, 0, \pm 6)$, зная, что плоскости Oxz и Oyz являются его плоскостями симметрии и пересекают его по гиперболам, асимптоты которых образуют с осью Oz углы, соответственно равные $\pi/6$ и $\pi/3$.

36.17. Написать уравнение плоскости, параллельной плоскости Oyz и пересекающей однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1$ по гиперболе, действительная полуось которой равна 1.

36.18. Найти прямолинейные образующие поверхности $x^2 + y^2 = 2(z^2 + 1)$, проходящие через точку $(1, 1, 0)$.

36.19. Определить угол между прямолинейными образующими однополостного гиперболоида $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, проходящими через произвольную точку.

36.20. Найти уравнение плоскости, пересекающей гиперболоид $x^2 + 4y^2 - 9z^2 = 36$ по паре прямых, проходящих через точку $M(6, -3, 2)$.

36.21. Составить уравнения плоскостей, проходящих через точку $(a, 0, 0)$ и пересекающих однополостный гиперболоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ по двум параллельным прямым.

36.22. Пусть P – множество всех точек гиперболоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, в которых его прямолинейные образующие пересекаются под прямым углом. Доказать, что:

а) множество P непусто тогда и только тогда, когда выполнено условие $\max(a, b) \geq c$;

б) при $a = b \geq c$ множество P является объединением сечений гиперболоида плоскостями $z = \pm c\sqrt{(a^2 - c^2)/(a^2 + c^2)}$;

в) множество P является пересечением гиперболоида с шаром $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 - c^2$.

36.23. Доказать, что проекции прямолинейных образующих гиперболоида $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ на плоскость Oxy касаются окружности $x^2 + y^2 = 1$.

36.24. Доказать, что прямолинейные образующие однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ проектируются на плоскость Oxy в касательные к горловому эллипсу.

36.25. Определить, какие линии второго порядка могут получиться в сечении:

а) однополостного гиперболоида;

б) двуполостного гиперболоида

произвольной плоскостью.

36.26. Исследовать линию пересечения гиперболоида $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}-z^2=1$ с плоскостью $4x-3y-12z-6=0$, пользуясь ее проекциями на координатные плоскости.

36.27. Определить вид линии пересечения гиперболоида $x^2+y^2-z^2=1$ и плоскости $3x+4y-5z=0$.

36.28. Выяснить, по какой линии плоскость $x+y-z+3=0$ пересекает гиперболоид $x^2+y^2-z^2=-4$.

36.29. Найти центр сечения гиперболоида $x^2+2y^2-4z^2=-4$ плоскостью $x+y+2z=2$.

36.30. Найти уравнение множества центров сечений гиперболоида $x^2+y^2-3z^2=2$ плоскостями, параллельными плоскости $x+y+z=1$.

36.31. Выяснить, по какой линии пересекаются однополостный гиперболоид
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, \quad a>b,$$
и сфера $x^2+y^2+z^2=a^2$.

36.32. Доказать, что прямая при вращении в пространстве вокруг оси, которая не пересекается с ней и ей неортогональна, описывает однополостный гиперболоид вращения.

36.33. Определить поверхность, которую описывает прямая, скользящая по трем прямым
$$\frac{x}{2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{-1}, \qquad \frac{x-2}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}, \qquad \frac{x}{2}=\frac{y+1}{0}=\frac{z}{1},$$
из которых никакие две не лежат в одной плоскости.

36.33.1. Доказать, что сечения гиперболоидов
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1, \quad a\geq b>0,$$
плоскостями
$$c\sqrt{a^2-b^2}y\pm b\sqrt{a^2+c^2}z+D=0$$
представляют собой окружности:

а) для двуполостного гиперболоида при $|D| > bc\sqrt{b^2 + c^2}$;

б) для однополостного гиперболоида при любом D.

Найти их радиусы.

36.34. Написать уравнение эллиптического параболоида с вершиной $(2, 3, 6)$ и осью, параллельной оси Oz, зная, что плоскость Oxy пересекает его по эллипсу, оси которого параллельны осям Ox и Oy, причем эллипс касается этих осей координат.

36.35. Написать уравнение гиперболического параболоида, проходящего через гиперболу $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $z = c$, зная, что его плоскости симметрии совпадают с двумя плоскостями координат Oxz и Oyz и что третья координатная плоскость Oxy пересекает его по паре прямых.

36.36. Написать уравнение эллиптического параболоида, зная, что плоскости $x = a$ и $y = b$ пересекают его по параболам с вершинами $(a, 0, c)$ и $(0, b, c)$, плоскость Oxy касается параболоида в его вершине, а плоскости Oxz и Oyz являются его плоскостями симметрии.

36.37. Написать уравнение гиперболического параболоида, проходящего через точку $(10, 6, 11)$, зная, что плоскости Oxz и Oyz являются его плоскостями симметрии, а плоскость Oxy пересекает его по паре прямых, один из углов между которыми равен $2\pi/3$.

36.38. Написать уравнение гиперболического параболоида, проходящего через прямые $y = \pm x$, $z = 0$ и через точку $(1, 2, 3)$, если известно, что ось Oz является его осью симметрии.

36.39. Найти уравнение проекции линии пересечения поверхностей $x^2 + 2y^2 = 2z$, $x + 2y + z = 1$ на плоскость Oxy. Что представляет собой эта линия?

36.40. Выяснить, по какой линии пересекаются параболоид $x^2 - y^2 = 2z$ и плоскость $x + y + z = 1$.

36.41. Доказать, что плоскость $\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} + h = 0$ пересекает параболоид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

по прямой, и составить ее уравнение.

36.42. Найти уравнение множества центров сечений параболоида $x^2 + y^2 = 2z$ плоскостями, параллельными плоскости $x + y + z = 1$.

36.43. Найти условие, необходимое и достаточное для того, чтобы плоскость $z = ax+by+c$ пересекала параболоид вращения $x^2 + y^2 = 2pz$ $(p > 0)$ по эллипсу.

36.43.1. Доказать, что плоскость пересекает параболоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz$ по параболе тогда и только тогда, когда она параллельна оси Oz.

36.44. Доказать, что гиперболический параболоид не имеет плоских эллиптических сечений.

36.44.1. Какие кривые второго порядка могут получиться в сечениях гиперболического параболоида?

36.45. Найти прямолинейные образующие параболоида $4x^2 - y^2 = 16z$, пересекающиеся в точке $(2, 0, 1)$.

36.46. На параболоиде $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = z$ найти прямолинейные образующие, параллельные плоскости $3x + 2y - 4z = 0$.

36.47. На гиперболическом параболоиде $x^2 - y^2 = 2z$ найти геометрическое место точек пересечения двух взаимно перпендикулярных образующих.

36.48. Найти геометрическое место точек на поверхности параболоида $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$, через каждую из которых проходят две взаимно перпендикулярные прямолинейные образующие этой поверхности.

36.49. Доказать, что прямые, по которым плоскость Oxy пересекает гиперболический параболоид $x^2 - y^2 = 2pz$ $(p > 0)$, являются его осями симметрии.

36.50. Доказать, что проекции прямолинейных образующих параболоида $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$ на плоскость Oxz касаются параболы $x^2 = 2a^2z$.

36.51. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки и от данной плоскости, не проходящей через данную точку.

36.52. Найти геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных скрещивающихся прямых в пространстве.

36.53. Составить уравнение поверхности, образованной прямой, которая скользит по прямым

$$\frac{x-6}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1} \quad \text{и} \quad \frac{x}{3} = \frac{y-8}{2} = \frac{z+4}{-2},$$

оставаясь все время параллельной плоскости $2x + 3y - 5 = 0$.

36.54. Определить вид линии пересечения поверхностей $x^2 + y^2 = 2z$ и $x^2 + y^2 + z^2 = 8$.

36.55. Доказать, что эллиптический параболоид $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 2z$ и сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 50z$ пересекаются по двум окружностям. Найти центры и радиусы этих окружностей.

36.56. Найти линию пересечения поверхностей

$$x^2 + y^2 - z^2 = a^2, \qquad x^2 - y^2 = 2az.$$

36.57. Написать уравнения проекций линии пересечения поверхностей $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, $x^2 - y^2 = 2z$ на координатные плоскости и выяснить, что представляет собой эта линия.

§37. Конусы и цилиндры

Конус. Поверхность, определяемая в некоторой прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \tag{37.1}$$

называется *конусом* (рис. 1).

Конус обладает следующими простейшими свойствами.

1°. *Координатные плоскости канонической системы координат конуса являются плоскостями симметрии, координатные оси – осями симметрии, а начало координат – центром симметрии конуса.* Ось Oz канонической системы координат называется *осью* конуса, а начало координат – *вершиной* конуса.

2°. *Конус – неограниченная поверхность.*

3°. *Сечения конуса плоскостями $z = h$, $h \neq 0$, представляют собой эллипсы, полуоси которых неограниченно возрастают при $h \to \infty$.* Любое такое сечение называется *направляющей* конуса.

Если в уравнении (37.1) конуса $a = b$, то такой конус называется *круговым конусом* (или *конусом вращения*).

4°. *Сечения конуса плоскостями $x = h$ и $y = h$, $h \neq 0$, представляют собой гиперболы, а плоскости $x = 0$ и $y = 0$ пересекают конус по парам пересекающихся прямых.*

Из этого свойства следует, что через каждую точку конуса, кроме его вершины, проходит ровно одна прямолинейная образующая и все эти прямолинейные образующие пересекаются в вершине конуса.

Отметим, что круговой конус может быть получен вращением образующей конуса вокруг его оси.

5°. *Сечения конуса* (37.1) *плоскостями $z = h + cx/a$ и $z = h + cy/b$, $h \neq 0$, представляют собой параболы.*

Таким образом, и эллипс, и гипербола, и парабола являются плоскими сечениями конуса. На этом основании эти линии обычно называют *коническими сечениями.*

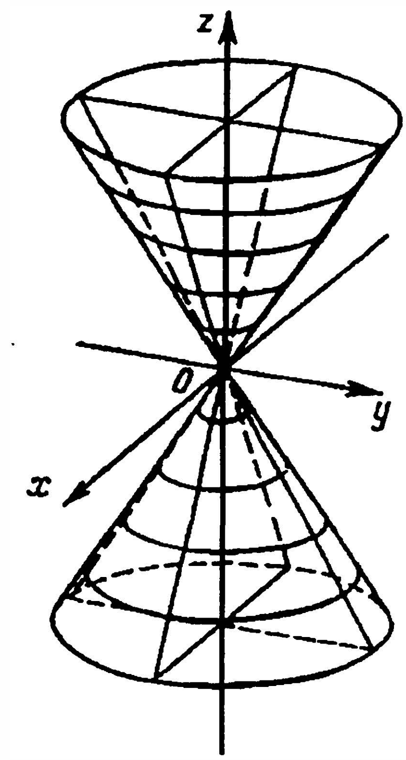


Рис. 1

Пример 37.1. Определить вид поверхности, заданной в прямоугольной декартовой системе координат уравнением

$$z = 5\sqrt{\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{18}}. \tag{37.2}$$

Решение. Уравнение (37.2) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{32} + \dfrac{y^2}{18} = \dfrac{z^2}{25}, \\ z \geq 0, \end{cases}$$

которая определяет верхнюю часть (над плоскостью Oxy) конуса, вершина которого – начало координат, а ось совпадает с осью Oz. Точки $O(0,0,0)$ и $M_0(4,3,5)$ лежат на конусе, поэтому образующей конуса является прямая $x = 4t$, $y = 3t$, $z = 5t$. ∎

Пример 37.2. Определить вид сечения конуса $x^2 + y^2 = z^2$ плоскостью

$$3x - y + 4z + 12 = 0. \tag{37.3}$$

Решение. Записав уравнение плоскости (37.3) в параметрической форме

$$x = -4 + u + 4v, \;\; y = 3u, \;\; z = -3v, \tag{37.4}$$

получим выражение пространственных координат x, y, z точки плоскости через ее плоскостные координаты u, v в системе координат $\{M_0;\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2\}$, где $M_0(-4,0,0)$, $\mathbf{e}_1 = \{1,3,0\}$, $\mathbf{e}_2 = \{4,0,-3\}$.

Подставив (37.4) в уравнение конуса, получим уравнение линии пересечения конуса с плоскостью в плоскостной системе координат:

$$16+u^2+16v^2-8u-32v+8uv+9u^2=9v^2 \iff 10u^2+7v^2+8uv-8u-32v+16=0.$$

Применим к этому уравнению линии второго порядка на плоскости теорию инвариантов. Имеем

$$I_1 = 17 > 0,\ I_2 = \begin{vmatrix} 10 & 4 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} > 0,\ K_3 = \begin{vmatrix} 10 & 4 & -4 \\ 4 & 7 & -16 \\ -4 & -16 & 16 \end{vmatrix} < 0.$$

Условия $I_2 > 0$, $I_1K_3 < 0$ означают, что линией пересечения конуса плоскостью (37.3) является эллипс. ∎

Замечание. Плоскость (37.3) не проходит через вершину конуса и пересекает все его образующие. Можно показать, что в сечении конуса такими плоскостями всегда лежит эллипс.

Пример 37.3. Определить вид сечения конуса $x^2+y^2 = z^2$ плоскостью

$$x + z + 1 = 0. \tag{37.5}$$

Решение. Параметрические уравнения плоскости (37.5)

$$x = -v,\ y = u,\ z = -1 + v$$

выражают пространственные координаты x, y, z точки плоскости через ее плоскостные координаты u, v в системе координат $\{M_0;\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2\}$, где $M_0(0, 0, -1)$, $\mathbf{e}_1 = \{0, 1, 0\}$, $\mathbf{e}_2 = \{-1, 0, 1\}$. Подставив эти выражения в уравнение конуса, получим уравнение линии пересечения конуса с плоскостью:

$$v^2 + u^2 = 1 - 2v + v^2 \iff u^2 = -2(v - \frac{1}{2}),$$

которое определяет параболу. ∎

Замечание. Плоскость (37.5) не проходит через вершину конуса и параллельна только одной образующей ($x = t$, $y = 0$, $z = -t$). Можно показать, что в сечении конуса такими плоскостями всегда лежит парабола.

Пример 37.4. Определить вид сечения конуса $x^2+y^2 = z^2$ плоскостью

$$x - 4 = 0. \tag{37.6}$$

Решение. Подставив параметрические уравнения $x = 4$, $y = u + v$, $z = u - v$ плоскости в уравнение конуса, получим уравнение линии пересечения конуса с плоскостью:

$$uv + 16 = 0$$

в плоскостной системе координат $\{M_0;\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2\}$, где $M_0 = (4, 0, 0)$, $\mathbf{e}_1 = \{0, 1, 1\}$, $\mathbf{e}_2 = \{0, 1, -1\}$. Полученное уравнение определяет гиперболу. ∎

Замечание. Плоскость (37.6) не проходит через начало координат и параллельна двум образующим конуса. Можно показать, что в сечении конуса такими плоскостями всегда лежит гипербола.

Цилиндры. Поверхности, определяемые в некоторой прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{37.7}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{37.8}$$

$$y^2 = 2px, \tag{37.9}$$

называются соответственно *эллиптическим, гиперболическим* и *параболическим цилиндрами* (рис. 2-4).

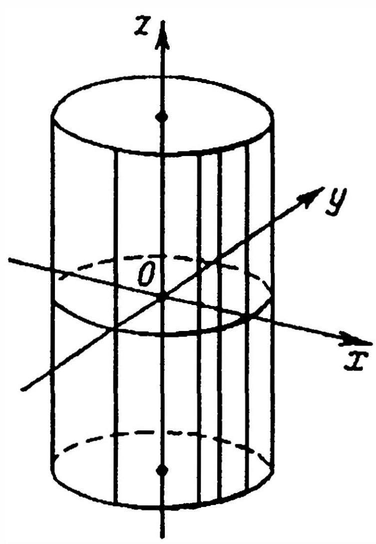


Рис. 2

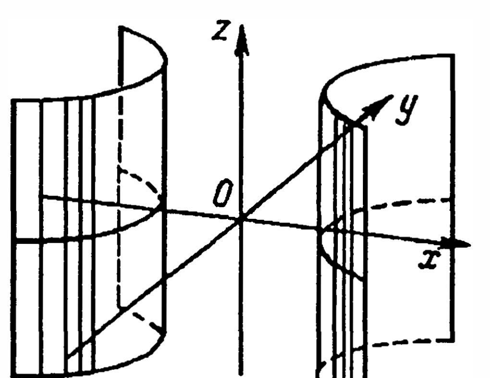


Рис. 3

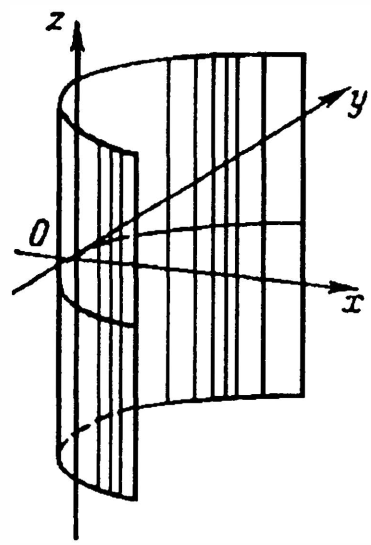


Рис. 4

Цилиндры обладают следующими простейшими свойствами.

1°. *Для эллиптического и гиперболического цилиндров координатные плоскости канонической системы координат цилиндра являются плоскостями симметрии, координатные оси – осями симметрии, а каждая точка оси Oz – центром симметрии цилиндра.* Ось Oz канонической системы координат называются *осью* цилиндра.

2°. *Для параболического цилиндра* (37.9) *координатная плоскость Oxz является плоскостью симметрии, координатная ось Ox – осью симметрии.* Центра симметрии параболический цилиндр не имеет.

3°. *Все сечения цилиндров плоскостями $z = h$, $h \in \mathbb{R}$, одинаковы и являются: эллипсами для эллиптического цилиндра, гиперболами для гиперболического и параболами для параболического цилиндра.* Любое сечение цилиндра плоскостью $z = h$ называется его *направляющей.*

Если в уравнении (37.7) эллиптического цилиндра $a = b$, то такой цилиндр называется *круговым.*

4°. *Прямые, проходящие через точку цилиндров* (37.7)–(37.9) *параллельно оси Oz, являются прямолинейными образующими.*

Отметим, что поверхности (37.7), (37.8) и (37.9) могут быть получены движением образующей, когда какая-либо точка на образующей описывает соответственно эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$, гиперболу $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $z = 0$, и параболу $y^2 = 2px$, $z = 0$.

Пример 37.5. Выяснить, по какой линии пересекаются цилиндр

$$x^2 + 2y^2 = 1 \tag{37.10}$$

и плоскость

$$y - z = 2. \tag{37.11}$$

Система координат прямоугольная.

Решение. Выберем ортонормированный базис плоскости (37.11) из ее направляющих векторов – например, из векторов $\mathbf{e}_1 = \{1,0,0\}$, $\mathbf{e}_2 = \{0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\}$, и дополним его до ортонормированного базиса всего пространства вектором $\mathbf{e}_3 = \{0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\}$. Тогда (как следует из §23) новые координаты x', y', z' точки пространства будут связаны со старыми координатами x, y, z по формулам

$$x = x', \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(y' + z'), \quad z = \frac{1}{\sqrt{2}}(y' - z').$$

Отсюда и из (37.10) и (37.11) следует, что координаты точки искомого сечения в новой системе координат должны удовлетворять соотношениям:

$$\begin{cases} (x')^2 + 2\dfrac{(y'+z')^2}{2} = 1, \\ \sqrt{2}z' = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} (x')^2 + (y' + \sqrt{2})^2 = 1, \\ z' = \sqrt{2}. \end{cases}$$

Таким образом, искомым сечением является окружность радиуса 1 с центром в точке $x' = 0$, $y' = -\sqrt{2}$, $z' = \sqrt{2}$ или, что то же самое, $x = 0$, $y = 0$, $z = -2$. ∎

ЗАДАЧИ

В задачах этого параграфа считается, что система координат прямоугольная декартова.

37.1. Найти уравнение цилиндра с образующей, параллельной оси Oz и направляющей – окружностью $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, $z = 1$.

37.2. Образующая цилиндра параллельна оси Oz, его направляющая – окружность $x^2 + y^2 = 2z$, $x^2 + y^2 + z^2 = 8$. Найти уравнение цилиндра.

37.3. Найти уравнение конуса с вершиной в точке $O(0,0,0)$ и направляющей – окружностью $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 1$.

37.4. Написать уравнение конуса с вершиной $(2,3,6)$, зная, что плоскость Oxy пересекает его по эллипсу, оси которого параллельны осям Ox и Oy, причем эллипс касается этих осей координат.

37.5. Написать уравнение поверхности, получающейся при вращении прямой $y = kx + b$, $z = 0$ вокруг оси Ox.

37.6. Прямая $\frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{6}$ вращается около оси Ox. Найти уравнение описанной ею поверхности.

37.7. Написать уравнение кругового цилиндра радиуса r, осью которого является прямая

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

37.8. Написать уравнение кругового цилиндра, проходящего через точку $(1, -2, 1)$, осью которого служит прямая

$$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{-2}.$$

37.9. Составить уравнение кругового цилиндра, образующие которого касаются сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и составляют равные углы с осями координат.

37.10. Найти острый угол между образующими конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, по которым его пересекает плоскость $5x + 10y = 11z$.

37.11. Найти уравнение семейства прямолинейных образующих цилиндра $x^2 - y^2 = 1$.

37.12. Найти уравнение семейства прямолинейных образующих конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

37.13. Показать, что линия пересечения двух цилиндров $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + z^2 = 1$ не является плоской кривой.

37.14. Доказать, что линия пересечения двух параболических цилиндров $y^2 = x$ и $z^2 = 1 - x$ лежит на круговом цилиндре. Каково уравнение этого цилиндра? Является ли рассматриваемая линия пересечения плоской кривой?

37.15. Показать, что сечение конуса $x^2 + 2y^2 - 4z^2 = 0$ плоскостью $x + 2z = 5$ представляет собой параболу. Найти ее фокус и ось симметрии.

37.16. Показать, что сечение конуса $x^2 + 2y^2 - 4z^2 = 0$ плоскостью $x - z = 2$ представляет собой гиперболу. Найти ее центр и полуоси.

37.17. Показать, что сечение конуса $x^2 - 2y^2 - 4z^2 = 0$ плоскостью $2x + z + 5 = 0$ представляет собой эллипс. Найти его центр и полуоси.

37.18. Доказать, что плоскость $\sqrt{a^2 - b^2}\,y \pm bz = 0$ пересекает эллиптический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \; a > b,$$

по окружности.

37.19. Показать, что сечение цилиндра $y^2 = 2x$ плоскостью $x + y + z - 1 = 0$ представляет собой параболу. Найти ее ось и фокальный параметр.

37.20. Найти фокусы эллипса, получающегося при пересечении цилиндра $x^2 + y^2 = 36$ плоскостью $3x + 4y + 12z = 0$.

37.21. Какую поверхность образуют точки всех прямых с направляющим вектором $\mathbf{a}$, которые пересекают:

а) окружность $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, если $\mathbf{a} = \{1, 1, 1\}$;

б) эллипс $x^2 + 2y^2 = 8$, $z = 1$, если $\mathbf{a} = \{1, 0, 1\}$;

в) параболу $y^2 = 2px$, $z = 0$ $(p > 0)$, если $\mathbf{a} = \{2, -1, 1\}$?

37.22. Какую поверхность образуют точки всех прямых:

а) пересекающих окружность $x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$ и проходящих через точку $(1, 0, 0)$;

б) пересекающих параболу $y^2 = x$, $z = 0$ и проходящих через точку $(2, 0, 1)$;

в) пересекающих гиперболу $x^2 - y^2 = 8$, $z = 0$ и проходящих через точку $(0, 0, 2)$?

§38. Поверхности второго порядка, заданные общими уравнениями

Пусть $Oxyz$ – аффинная система координат в пространстве. Алгебраическая поверхность второго порядка определяется уравнением

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2b_1x + 2b_2y + 2b_3z + c = 0, \quad (38.1)$$

где не все коэффициенты a_{ij} $(i, j = \overline{1,3})$ равны нулю, $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = \overline{1,3})$. Уравнение (38.1) называется *общим уравнением* поверхности второго порядка.

В основе классификации поверхностей второго порядка лежит тот же принцип, что и для линий второго порядка (см. §35). В соответствии с этим принципом все поверхности второго порядка делятся на семнадцать классов.

Теорема 38.1. *Общее уравнение* (38.1) *поверхности второго порядка переходом к новой аффинной системе координат $O'x'y'z'$ можно привести к одному и только одному из следующих семнадцати видов:*

	Уравнение	Название поверхности
1	$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = 1$	Эллипсоид
2	$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = -1$	Мнимый эллипсоид
3	$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = 0$	Вырожденный эллипсоид
4	$(x')^2 + (y')^2 - (z')^2 = 1$	Однополостный гиперболоид
5	$(x')^2 + (y')^2 - (z')^2 = -1$	Двуполостный гиперболоид
6	$(x')^2 + (y')^2 - (z')^2 = 0$	Конус
7	$(x')^2 + (y')^2 = z'$	Эллиптический параболоид
8	$(x')^2 - (y')^2 = z'$	Гиперболический параболоид
9	$(x')^2 + (y')^2 = 1$	Эллиптический цилиндр
10	$(x')^2 + (y')^2 = -1$	Мнимый эллиптический цилиндр
11	$(x')^2 - (y')^2 = 1$	Гиперболический цилиндр
12	$(y')^2 = x'$	Параболический цилиндр
13	$(x')^2 - (y')^2 = 0$	Пара пересекающихся плоскостей
14	$(x')^2 + (y')^2 = 0$	Пара мнимых пересекающихся плоскостей
15	$(y')^2 = 1$	Пара параллельных плоскостей
16	$(y')^2 = -1$	Пара мнимых параллельных плоскостей
17	$(y')^2 = 0$	Пара совпадающих плоскостей

Как и для линий второго порядка, наиболее простым способом построения такого преобразования аффинной системы координат является *метод Лагранжа*.

Пример 38.1. Определить вид поверхности второго порядка, заданной уравнением

$$x^2 + 2y^2 - 2xy + 4yz - 4x + 2y + 12z = 7. \tag{38.2}$$

Решение. В уравнении (38.2) коэффициент a_{11} при x^2 отличен от нуля и равен единице. Выделим полный квадрат в группе слагаемых левой части, содержащих переменную x:

$$x^2 - 2xy - 4x = (x^2 - 2x(y+2) + (y+2)^2) - (y+2)^2 = (x-y-2)^2 - y^2 - 4y - 4.$$

Тем самым, уравнение (38.2) перепишется в виде

$$(x - y - 2)^2 + y^2 + 4yz - 2y + 12z = 11.$$

Применим аналогичную процедуру выделения полного квадрата сначала по переменной y:

$$(x - y - 2)^2 + y^2 + 2y(2z - 1) + (2z - 1)^2 - (2z - 1)^2 + 12z = 11 \iff$$
$$\iff (x - y - 2)^2 + (y + 2z - 1)^2 - 4z^2 + 16z = 12,$$

а затем по переменной z:

$$(x-y-2)^2+(y+2z-1)^2-4(z^2-4z+4)+16=12 \iff$$
$$\iff (x-y-2)^2+(y+2z-1)^2-4(z-2)^2=-4 \iff$$
$$\iff \left(\frac{x-y}{2}-1\right)^2+\left(\frac{y+2z-1}{2}\right)^2-(z-2)^2=-1.$$

Перейдем к новым координатам по формулам

$$x'=\frac{x-y}{2}-1,\ y'=\frac{y+2z-1}{2},\ z'=z-2.$$

Тогда уравнение поверхности примет вид

$$(x')^2+(y')^2-(z')^2=-1,$$

из которого в силу теоремы 38.1 следует, что исходное уравнение (38.2) задает двуполостный гиперболоид. ∎

Пример 38.2. Определить вид поверхности второго порядка, заданной уравнением

$$xy+yz+xz=0. \tag{38.3}$$

Решение. Так как уравнение (38.3) не содержит слагаемых с x^2, y^2, z^2, то, как и в примере 35.2, сделаем промежуточную замену переменных

$$x=x_1+y_1,\ y=x_1-y_1,\ z=z_1.$$

В результате уравнение (38.3) примет вид

$$(x_1^2-y_1^2)+(x_1-y_1)z_1+(x_1+y_1)z_1=0 \iff x_1^2-y_1^2+2x_1z_1=0.$$

Выделим полный квадрат относительно переменной x_1:

$$(x_1^2+2x_1z_1+z_1^2)-y_1^2-z_1^2=0 \iff (x_1+z_1)^2-y_1^2-z_1^2=0.$$

Вводя новые переменные x',y',z' по формулам

$$\begin{cases} x'=x_1+z_1, \\ y'=y_1, \\ z'=z_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x'=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}y+z, \\ y'=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}y, \\ z'=z, \end{cases}$$

получим уравнение

$$(x')^2-(y')^2-(z')^2=0,$$

относящееся по классификации теоремы 38.1 к шестому виду. Следовательно, исходное уравнение (38.3) задает конус. ∎

Пример 38.3. Определить вид поверхности

$$z^2=3x+4y+15. \tag{38.4}$$

Решение. Преобразование координат

$$x'=x,\ y'=3x+4y+15,\ z'=z \tag{38.5}$$

приводит (38.4) к уравнению

$$(z')^2=y',$$

которое в силу теоремы 38.1 определяет параболический цилиндр. ∎

Если общее уравнение (38.1) поверхности второго порядка задано в пря
юугольной декартовой системе координат, то метод Лагранжа, вообще го
юря, не позволяет выяснить форму или расположение поверхности данного
ида в пространстве. Как и для линий второго порядка, метрические харак-
еристики поверхности могут быть выяснены, только если проводимое пре
бразование системы координат ортогонально. Можно показать, что любое
акое преобразование сводится к последовательному выполнению поворотов
пространстве вокруг специальным образом выбираемых осей и параллель-
ному переносу.

Теорема 38.2. *Для любой алгебраической поверхности второго порядка существует прямоугольная декартова система координат $Oxyz$ в которой уравнение этой поверхности имеет один из следующих видов:*

	Каноническое уравнение	*Название поверхности*
1	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\ a\geq b\geq c>0$	*Эллипсоид*
2	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=-1$	*Мнимый эллипсоид*
3	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=0$	*Вырожденный эллипсоид*
4	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1,\ a\geq b>0,\ c>0$	*Однополостный гиперболоид*
5	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1,\ a\geq b>0,\ c>0$	*Двуполостный гиперболоид*
6	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0,\ a\geq b>0,\ c>0$	*Конус*
7	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2z,\ a\geq b>0$	*Эллиптический параболоид*
8	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2z$	*Гиперболический параболоид*
9	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\ a\geq b>0$	*Эллиптический цилиндр*
10	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=-1$	*Мнимый эллиптический цилиндр*
11	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	*Гиперболический цилиндр*
12	$y^2=2px,\ p>0$	*Параболический цилиндр*
13	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0,$	*Пара пересекающихся плоскостей*
14	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0,$	*Пара мнимых пересекающихся плоскостей*
15	$y^2=a^2,\quad a\neq 0$	*Пара параллельных плоскостей*

16	$y^2 = -a^2, \quad a \neq 0$	*Пара мнимых параллельных плоскостей*
17	$y^2 = 0$	*Пара совпадающих плоскостей*

Пример 38.4. Определить вид и расположение поверхности, заданной в прямоугольной декартовой системе координат уравнением

$$2x^2 - 3y^2 - 3z^2 + 4x + 6z - 7 = 0. \tag{38.6}$$

Решение. Уравнение (38.6) не содержит слагаемого с xz, поэтому только переносом начала координат можно освободиться от переменных x и z в первой степени. Имеем

$$2(x^2 + 2x + 1) - 2 - 3y^2 - 3(z^2 - 2z + 1) + 3 - 7 = 0 \iff$$
$$\iff 2(x+1)^2 - 3y^2 - 3(z-1)^2 = 6.$$

Положив $x + 1 = z'$, $y = y'$, $z - 1 = x'$, получим уравнение

$$\frac{(x')^2}{2} + \frac{(y')^2}{2} - \frac{(z')^2}{3} = -1,$$

которое является каноническим уравнением двуполостного гиперболоида с полуосями $a = b = \sqrt{2}$, $c = \sqrt{3}$. Каноническая система координат этого гиперболоида получена переносом исходной системы координат в точку $O'(-1, 0, 1)$. Эта точка является центром гиперболоида. ∎

Пример 38.5. Определить вид и расположение поверхности, заданной в прямоугольной декартовой системе координат уравнением

$$3x^2 + 4y^2 - 12x + 8y + 16z = 0. \tag{38.7}$$

Решение. Уравнение (38.7) не содержит слагаемых с xy и z^2, поэтому только переносом начала координат можно освободиться от переменных x, y в первой степени. Имеем

$$3(x-2)^2 + 4(y+1)^2 + 16(z-1) = 0.$$

Положив $x - 2 = x'$, $y + 1 = y'$, $z - 1 = z'$, получим уравнение

$$\frac{(x')^2}{8/3} + \frac{(y')^2}{2} = -2z',$$

которое определяет эллиптический параболоид с вершиной в точке $O'(2, -1, 1)$, для которого $a^2 = 8/3$, $b^2 = 2$. Направление оси параболоида совпадает с отрицательным направлением оси Oz. ∎

Пример 38.6. Определить форму и расположение поверхности, заданной в прямоугольной декартовой системе координат уравнением (38.4).

Решение. Для определения расположения поверхности допустимы лишь ортогональные преобразования координат, так что преобразование (38.5) здесь не подходит.

Выполним поворот плоскости Oxy вокруг оси Oz на угол, определенный соотношением (35.5). В нашем случае $\cos\varphi = 4/5$, $\sin\varphi = 3/5$. Формулы преобразования координат будут иметь вид

$$\begin{cases} x_1 = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y, \\ y_1 = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y, \\ z_1 = z \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{4}{5}x_1 + \frac{3}{5}y_1, \\ y = -\frac{3}{5}x_1 + \frac{4}{5}y_1, \\ z = z_1. \end{cases} \tag{38.8}$$

Отсюда $3x + 4y = 5y_1$ и уравнение (38.4) примет вид $z_1^2 = 5(y_1 + 3)$. Положив

$$x_1 = x', \ y_1 + 3 = y', \ z_1 = z', \tag{38.9}$$

получим уравнение $(z')^2 = 5y'$, т.е. уравнение параболического цилиндра. Из (38.8) и (38.9) находим

$$x' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y, \quad y' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y + 3, \quad z' = z.$$

Для всех точек цилиндра $y' \geq 0$, т.е. цилиндр лежит в положительном полупространстве относительно плоскости $3x + 4y + 15 = 0$. Образующие цилиндра параллельны оси x', т.е. прямой $3x + 4y + 15 = 0$, $z = 0$. Направляющей цилиндра служит парабола с параметром $p = 5/2$, лежащая в плоскости $x' = 0$, т.е. в плоскости $4x - 3y = 0$, с вершиной $(-9/5, -12/5, 0)$ и фокусом $(-21/20, -7/5, 0)$. ∎

Пример 38.7. Определить вид и расположение поверхности, заданной в прямоугольной декартовой системе координат уравнением

$$z^2 = 2xy. \tag{38.10}$$

Решение. Выполняя поворот плоскости Oxy вокруг оси Oz на угол $\pi/4$ (см. соотношение (35.5))

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'), \ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'), \ z = z',$$

приведем уравнение (38.10) к виду

$$(z')^2 = (x')^2 - (y')^2.$$

Это каноническое уравнение конуса вращения с вершиной в начале координат. Осью конуса является ось Ox', т.е. биссектриса угла xOy. Образующие конуса наклонены к оси конуса под углом $\pi/4$. ∎

Пример 38.8. Определить форму и расположение в пространстве поверхности, заданной в прямоугольной декартовой системе координат уравнением

$$x^2 + 2y^2 + z^2 - xz + x - 12y + z = -1. \tag{38.11}$$

Решение. В уравнении (38.11) присутствует лишь слагаемое с xz (слагаемые с xy и yz отсутствуют), поэтому выполним поворот вокруг оси Oy на угол, который согласно (35.5) равен $\pi/4$. Формулы преобразования в этом случае имеют вид

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - z_1), \ y = y_1, \ z = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + z_1).$$

Подставляя эти соотношения в (38.11), получим

$$\frac{1}{2}(x_1 - z_1)^2 + 2y_1^2 + \frac{1}{2}(x_1 + z_1)^2 - \frac{1}{2}(x_1^2 - z_1^2) + \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - z_1) - 12y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + z_1) = -1,$$

т.е.

$$x_1^2 + 4y_1^2 + 3z_1^2 + 2\sqrt{2}x_1 - 24y_1 = -2.$$

Выделим теперь полные квадраты относительно переменных x_1 и y_1:

$$(x_1 + \sqrt{2})^2 + 4(y_1 - 3)^2 + 3z_1^2 = 36.$$

Последнее равенство показывает, что при переносе начала системы координат $Ox_1y_1z_1$, т.е. в результате преобразования

$$x' = x_1 + \sqrt{2},\ y' = y_1 - 3,\ z' = z_1,$$

получится каноническое уравнение эллипсоида

$$(x')^2 + 4(y')^2 + 3(z')^2 = 36 \iff \frac{(x')^2}{36} + \frac{(y')^2}{9} + \frac{(z')^2}{12} = 1.$$

Итак, уравнение (38.11) задает эллипсоид с центром

$$x' = y' = z' = 0 \iff x_1 = -\sqrt{2}, y_1 = 3, z_1 = 0 \iff x = -1, y = 3, z = -1,$$

полуосями $a = 6$, $b = 3$, $c = 2\sqrt{3}$ и осями симметрии

$$y' = z' = 0 \iff \begin{cases} y_1 = 3, \\ z_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 3, \\ z - x = 0; \end{cases}$$

$$x' = z' = 0 \iff \begin{cases} x_1 = -\sqrt{2}, \\ z_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1, \\ z = -1; \end{cases}$$

$$x' = y' = 0 \iff \begin{cases} x_1 = -\sqrt{2}, \\ y_1 = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x + z = -2, \\ y = 3. \end{cases} \qquad \blacksquare$$

Отметим, что вид, форму и расположение в пространстве поверхности второго порядка, заданной общим уравнением (38.1), можно (так же, как для линий второго порядка) определить непосредственно с помощью инвариантов[2].

ЗАДАЧИ

В задачах этого параграфа считается, что система координат прямоугольная декартова. Случай произвольной аффинной системы координат оговаривается особо.

38.1. Составить уравнение кругового конуса, проходящего через все три координатные оси.

38.2. Составить уравнение кругового конуса, касающегося плоскостей Oxz и Oyz по прямым Ox и Oy соответственно.

38.3. Направляющая цилиндра дана уравнениями $x = y^2+z^2$, $x = 2z$, а образующая его перпендикулярна к плоскости направляющей. Составить уравнение цилиндра.

38.4. Найти прямые, проходящие через начало координат и целиком лежащие на поверхности $y^2+3xy+2yz-xz+3x+2y = 0$. Система координат аффинная.

[2] См. [1, с.312–327].

38.5. Найти те прямолинейные образующие поверхности $x^2+y^2+5z^2-6xy+2yz-2xz-12=0$, которые параллельны прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z}{-1}$. Система координат аффинная.

38.6. Найти линию пересечения поверхности:

1) $3x^2+4y^2-5z^2+2xy-3yz+5x-8=0$ с плоскостью Oxy;

2) $x^2+3z^2+2xy+4xz+2yz+5x-z=1$ с плоскостью Oyz;

3) $x^2+y^2-2xy+5yz+xz-x+3y-z=0$ с плоскостью Ozx.

Система координат аффинная.

38.7. Определить вид линии пересечения поверхности $x^2+2y^2+z^2+4xy-2xz-4yz+2x-6z=0$ с плоскостью $x-z=0$ и исследовать ее форму и расположение в пространстве.

38.8. Пользуясь методом Лагранжа, показать, что следующие уравнения в общей аффинной системе координат определяют поверхности, распадающиеся на пару плоскостей, и найти эти плоскости:

1) $y^2+2xy+4xz+2yz-4x-2y=0$;

2) $x^2+4y^2+9z^2-4xy+6xz-12yz-x+2y-3z-6=0$;

3) $3x^2-4y^2+3z^2+4xy+10xz-4yz+6x-20y-14z-24=0$;

4) $5x^2+4y^2+3z^2+9xy+8xz+7yz+7x+6y+5z+2=0$.

38.9. Определить вид поверхности, пользуясь методом Лагранжа (система координат аффинная):

1) $4x^2+6y^2+4z^2+4xz-8y-4z+3=0$;

2) $x^2+5y^2+z^2+2xy+6xz+2yz-2x+6y-10z=0$;

3) $x^2+y^2-3z^2-2xy-6xz-6yz+2x+2y+4z=0$;

4) $x^2-2y^2+z^2+4xy-8xz-4yz-14x-4y+14z+16=0$;

5) $2x^2+y^2+2z^2-2xy-2yz+x-4y-3z+2=0$;

6) $x^2-2y^2+z^2+4xy-10xz+4yz+x+y-z=0$;

7) $2x^2+y^2+2z^2-2xy-2yz+4x-2y=0$;

8) $x^2+y^2+4z^2+2xy+4xz+4yz-6z+1=0$;

9) $4xy+2x+4y-6z-3=0$;

10) $xy+xz+yz+2x+2y-2z=0$.

38.10. Определить вид и расположение поверхности, пользуясь переносом системы координат:

1) $x^2+4y^2+9z^2-6x+8y-36z=0$;

2) $4x^2-y^2-z^2+32x-12z+44=0$;

3) $3x^2-y^2+3z^2-18x+10y+12z+14=0$;

4) $6y^2+6z^2+5x+6y+30z-11=0$;

5) $z=2x^2-4y^2-6x+8y+1$; 6) $z=x^2+3y^2-6y+1$;

7) $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 2x + 4y - 6z = 0$;
8) $x^2 + 4y^2 - z^2 - 10x - 16y + 6z + 16 = 0$;
9) $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 - 6x + 4y - 1 = 0$;
10) $3x^2 + 3y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$;
11) $4x^2 - y^2 - 4x + 4y - 3 = 0$.

38.11. Определить вид поверхности и ее расположение относительно системы координат, пользуясь поворотом системы координат вокруг одной из ее осей:

1) $z^2 = 2xy$; 2) $z = xy$; 3) $z^2 = 3x + 4y$; 4) $z^2 = x^2 + 2xy + y^2 + 1$.

38.12. Определить вид поверхности и ее расположение относительно системы координат, пользуясь переносом и поворотом системы координат вокруг одной из ее осей:

1) $x^2 + 4y^2 + 5z^2 + 4xy + 4z = 0$;
2) $x^2 + 2x + 3y + 4z + 5 = 0$; 3) $z = x^2 + 2xy + y^2 + 1$;
4) $2xy + z^2 - 2z + 1 = 0$;
5) $x^2 + y^2 - z^2 - 2xy + 2z - 1 = 0$;
6) $2xy + 2x + 2y + 2z - 1 = 0$;
7) $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy + 4z = 0$;
8) $x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2x - y + 1 = 0$;
9) $z^2 - 2xy - 4x - 2y + 2z - 3 = 0$.

38.13. Определить форму и расположение в пространстве геометрического места точек, равноудаленных от оси Oz и от прямой $y = z$, $x = 1$, не лежащей с осью Oz в одной плоскости.

Глава X. Элементы общей алгебры

§39. Группа

Непустое множество G с заданной на нем алгебраической операцией $*$ называется *группой*, если:

1) операция ассоциативна:
$$(a * b) * c = a * (b * c),\ \forall a, b, c \in G;$$
2) операция обладает нейтральным элементом $e \in G$:
$$a * e = e * a = a,\ \forall a \in G;$$
3) для любого элемента $a \in G$ найдется симметричный элемент $a' \in G$:
$$a * a' = a' * a = e.$$

Обозначение: G или $\langle G, * \rangle$. Условия 1)–3) называются *аксиомами группы*. Группа с коммутативной операцией называется *коммутативной* или *абелевой*.

Если групповая операция названа умножением, то группу G называют *мультипликативной*, нейтральный элемент – единицей (и обозначают символом 1), симметричный элемент к элементу a – обратным к a (и обозначают символом a^{-1}). Аналогично *аддитивная* группа – это группа, в которой групповая операция названа сложением, при этом нейтральный элемент называют нулем (и обозначают символом 0), симметричный элемент к элементу a – противоположным к a (и обозначают символом $-a$).

Обычно при исследовании группы используется терминология мультипликативной группы.

Из аксиом группы и свойств алгебраической операции следует, что

1) в любой группе существует, и притом единственный, нейтральный элемент;
2) в любой группе для каждого элемента существует, и притом единственный, симметричный элемент.

Теорема 39.1. *Множество G с ассоциативной алгебраической операцией является группой, если оно обладает правой единицей $e_{\text{п}}$ и по отношению к ней каждый элемент $a \in G$ обладает правым обратным.*

Следствие. *В группе любая правая единица является левой и той единственной единицей, которой эта группа обладает, а любой правый обратный элемент к элементу a группы является левым и тем единственным обратным, которым обладает элемент a.*

Теорема 39.2. *Множество G с ассоциативной алгебраической операцией является группой тогда и только тогда, когда эта операция обладает обратной.*

В аддитивной группе обратная операция называется *вычитанием (справа и слева)*, а элементы $x = b + (-a)$ и $y = (-a) + b$ – *разностью* (*правосторонней и левосторонней* соответственно). В абелевой группе обе разности совпадают и обозначаются единым символом $b - a$. Аналогично определяется деление и частное в мультипликативной группе.

Теорема 39.3. *В любой группе действует закон сокращения слева и справа:*
$$ax = ay \iff x = y;$$
$$xa = ya \iff x = y.$$

Две группы G_1 и G_2 с операциями $*_1$ и $*_2$ называют *изоморфными*, если существует биективное отображение $f : G_1 \to G_2$, которое сохраняет групповую операцию, т.е.
$$f(a *_1 b) = f(a) *_2 f(b),\ \forall a, b \in G_1.$$
Обозначение: $G_1 \cong G_2$. Само отображение f при этом называют *изоморфизмом.*

Изоморфизм обладает следующими свойствами:

1) *отношение изоморфизма является отношением эквивалентности на множестве всех групп;*

2) *в изоморфных группах G_1 и G_2 образ (и прообраз) единицы является единицей;*

3) *в изоморфных группах G_1 и G_2 образ (и прообраз) обратного элемента является обратным элементом, т.е. $f(a^{-1}) = (f(a))^{-1}$.*

Непустое подмножество H группы G называется *подгруппой* группы G, если оно само является группой относительно алгебраической операции в G.

Теорема 39.4. *Подмножество H группы G является подгруппой этой группы тогда и только тогда, когда имеют место следующие импликации:*
$$1)\quad a, b \in H \;\Rightarrow\; ab \in H;$$
$$2)\quad a \in H \;\Rightarrow\; a^{-1} \in H.$$

Пусть G – группа, M и N – два ее подмножества. *Произведением* MN *этих подмножеств* называется множество всевозможных произведений mn, где $m \in M$, $n \in N$. Очевидно, что имеет место свойство ассоциативности: $(MN)K = M(NK)$.

Если одно из подмножеств состоит только из одного элемента, например $M = \{m\}$, то произведение MN обозначается символом mN, а произведение NM – символом Nm.

Пусть H – подгруппа группы G, a – элемент группы G. Множество aH называется *левым смежным классом* группы G по подгруппе H, *порожденным элементом* a, а множество Ha – *правым смежным классом.*

Из определения смежных классов следует, что:

1) $a \in aH$, $a \in Ha$, $\forall a \in G$;

2) *смежный класс состоит из элементов группы, причем любой элемент группы входит в какой-нибудь смежный класс;*

3) *подгруппа H является одним из смежных классов* (как левых, так и правых);

4) *в абелевой группе $aH = Ha$, $\forall a \in G$.*

Теорема 39.5. *Смежный класс порождается любым своим элементом.*

Теорема 39.6. *Любые два левых (правых) смежных класса либо совпадают, либо не пересекаются.*

Итак, вся группа разбивается на непересекающиеся левые (правые) смежные классы по подгруппе H. Это разбиение называется *левосторонним* (соответственно *правосторонним*) *разложением группы G по подгруппе H.*

Группа, состоящая из конечного числа элементов, называется *конечной группой.* Число элементов конечной группы называется ее *порядком* и обозначается символом $\operatorname{card} G$.

Теорема 39.7 (теорема Лагранжа). *Во всякой конечной группе порядок ее подгруппы является делителем порядка самой группы.*

Если a – элемент группы G, $n \in \mathbb{Z}$, то *n-й степенью a* называется элемент

$$a^n = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ \underbrace{aa\ldots a}_{n}, & n > 0; \\ (a^{-1})^{-n}, & n < 0. \end{cases}$$

В аддитивной группе n-я степень элемента a обозначается символом na и называется элементом, *кратным* элементу a.

Теорема 39.8. *Для любых $m, n \in \mathbb{Z}$*

$$a^m a^n = a^n a^m = a^{m+n},$$
$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Если все степени элемента a группы различны, то a называется элементом *бесконечного порядка.* Если же имеются совпадения: $a^m = a^n$, $m \neq n$, то (пусть $m > n$) $a^{m-n} = 1$, т.е. существуют положительные степени элемента a, равные 1. Наименьшее положительное n, для которого $a^n = 1$, называется *порядком* элемента a, при этом a называется *элементом конечного порядка n.*

Теорема 39.9. *Множество $\{a\}$ всех степеней элемента a группы G образует подгруппу группы G.*

Подгруппа $\{a\}$ называется *циклической подгруппой, порожденной элементом a.*

Группа G называется *циклической*, если она состоит из степеней одного из своих элементов a, т.е. совпадает с одной из своих циклических подгрупп $\{a\}$; элемент a называется *образующим элементом* группы G.

Подгруппа H группы G называется *нормальным делителем*, если для любого элемента $a \in G$

$$aH = Ha,$$

т.е. если любой левый (правый) смежный класс одновременно является правым (левым) смежным классом.

Элементы a и b группы G называются *сопряженными*, если существует элемент $c \in G$ такой, что $a = c^{-1}bc$.

Теорема 39.10. *Подгруппа H группы G является нормальным делителем тогда и только тогда, когда она вместе с каждым элементом содержит все сопряженные с ним элементы.*

Теорема 39.11. *Смежные классы по нормальному делителю образуют группу относительно умножения подмножеств группы.*

Группа смежных классов группы G по нормальному делителю H называется *фактор-группой группы G по подгруппе H.* Обозначение: G/H.

Пример 39.1. Доказать, что множество G всех ненулевых матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$ с рациональными a, b образует абелеву группу относительно обычной операции умножения матриц.

Решение. Прежде всего следует проверить, что операция умножения матриц является алгебраической операцией на множестве G. В самом деле, для любых $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \in G$, $B = \begin{pmatrix} c & d \\ 2d & c \end{pmatrix} \in G$ имеем $AB =$

$\begin{pmatrix} ac+2bd & ad+bc \\ 2(ad+bc) & ac+2bd \end{pmatrix}$. Следовательно, $AB \in G$.

Проверим справедливость всех аксиом абелевой группы.

1. Операция коммутативна. Это проверяется непосредственным вычислением BA.

2. Операция ассоциативна. Это можно не проверять, так как операция умножения матриц ассоциативна на множестве всех квадратных матриц второго порядка.

3. Единичная матрица $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\cdot 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$ является нейтральным элементом в G.

4. Если $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix} \in G$, $A \neq O$, то $\det A = a^2 - 2b^2 \neq 0$, так как $a, b \in \mathbb{Q}$. Следовательно, матрица A обратима. Осталось проверить, что $A^{-1} \in G$. Действительно,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widehat{A} = \frac{1}{a^2-2b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ -2b & a \end{pmatrix} \in G. \quad \blacksquare$$

Пример 39.2. На множестве $G = \{(a,b)\,|\,a,b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ определено произведение

$$(a,b)(a',b') = (aa', ab'+b). \tag{39.1}$$

Доказать, что G – неабелева группа.

Решение. Очевидно, равенство (39.1) определяет на множестве G алгебраическую операцию. Эта операция ассоциативна, так как

$$\big((a,b)(a',b')\big)(a'',b'') = (aa'a'', aa'b''+ab'+b),$$
$$(a,b)\big((a',b')(a'',b'')\big) = (a,b)(a'a'', a'b''+b) = (aa'a'', aa'b''+ab'+b).$$

Она некоммутативна, так как, например,

$$(2,0)(1,1) = (2,2), \quad (1,1)(2,0) = (2,1).$$

Элемент $(1,0)$, как легко видеть, нейтральный. Симметричным к (a,b) является элемент

$$(a,b)^{-1} = \Big(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\Big),$$

так как $(a,b)\Big(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\Big) = \Big(a\frac{1}{a}, a\big(-\frac{b}{a}\big)+b\Big) = (1,0)$. $\blacksquare$

Пример 39.3. Рассматривается группа (см. пример 39.2) $G = \{(a,b)\,|\,a,b \in \mathbb{R}, a \neq 0\}$ относительно произведения $(a,b)(a',b') = (aa', ab'+b)$. Доказать, что пары $(a,0) \in G$ образуют подгруппу H группы G, изоморфную мультипликативной группе ненулевых действительных чисел.

Решение. Множество H является подгруппой группы G, так как

а) если $(a,0), (a',0) \in H$, то $(a,0)(a',0) = (aa',0) \in H$;

б) если $(a,0) \in H$, то $(a,0)^{-1} = \big(\frac{1}{a}, 0\big) \in H$.

Эта подгруппа изоморфна мультипликативной группе ненулевых действительных чисел, так как отображение $\varphi(a) = (a,0)$ есть биекция множества $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ на H, для которой

$$\varphi(aa') = (aa',0) = (a,0)(a',0) = \varphi(a)\varphi(a'), \ \forall a, a' \in \mathbb{R}. \quad \blacksquare$$

Пример 39.4. Симметрическая группа S_n. Доказать, что множество S_n всех перестановок множества $M = \{1, 2, \dots, n\}$ образует группу относительно умножения (суперпозиции) отображений.

Решение. Очевидно, умножение перестановок множества S_n является алгебраической операцией в S_n, так как произведение биективных отображений биективно. Эта операция ассоциативна (в силу ассоциативности в общем случае произвольных отображений), обладает нейтральным элементом $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$; при этом для каждого элемента $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \in S_n$ существует обратный элемент $s^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \in S_n$.

Таким образом, S_n – группа. Отметим, что эта группа не абелева. Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Группа S_n называется *симметрической группой* степени n. Очевидно, это конечная группа и $\operatorname{card} S_n = n!$. ∎

Пример 39.5. Знакопеременная группа A_n. Доказать, что множество A_n всех четных перестановок множества $M = \{1, 2, \dots, n\}$ образует группу относительно умножения отображений.

Решение. Для решения задачи достаточно показать, что множество всех четных перестановок множества M является подгруппой симметрической группы S_n (пример 39.4). Проверим справедливость всех условий подгруппы (теорема 39.4).

1. Пусть $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$, $\sigma(\alpha) = k$ и $t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \end{pmatrix}$, $\sigma(\beta) = l$.

Переставим столбцы s так, чтобы на месте $1, 2, \dots, n$ оказалась перестановка $\beta_1, \dots, \beta_n$ (для этого в силу четности перестановки β и теоремы 4.3 достаточно выполнить четное число l_1 транспозиций). Пусть при этом нижняя строка $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ в перестановке s перейдет в перестановку $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$.

Тогда $st = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \beta_1 & \beta_2 & \dots & \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \dots & \gamma_n \end{pmatrix}$. В силу теоремы 4.2 при переходе от $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ к $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ четность числа $\sigma(\alpha) = k$ изменится l_1 раз, и так как k и l_1 – четные числа, то st – четная перестановка.

2. Если $s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$ – четная перестановка, то, очевидно, четной будет и перестановка $s^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$ (теорема 4.4).

Группа A_n четных перестановок множества, состоящего из n элементов, называется *знакопеременной группой* n-й степени. Очевидно, порядок группы равен $n!/2$, $n > 1$. ∎

Пример 39.6. Доказать, что любая конечная группа изоморфна некоторой группе перестановок на множестве своих элементов (*теорема Кэли*).

Решение. Пусть $G = \{g_0 = e, g_1, \dots, g_{n-1}\}$ – группа n-го порядка. Построим отображение φ группы G на некоторое множество S перестановок множества G, положив $\varphi(g) = (g_0 g, g_1 g, \dots, g_{n-1} g)$ для любого $g \in G$. Так как группа G замкнута относительно групповой операции, то $g_0 g$, $g_1 g, \dots,$

$g_{n-1}g \in G$. Более того, эти произведения различны, так как из равенства $g_i g = g_j g$ в силу закона сокращения в группе следует, что $g_i = g_j$, т.е. $i = j$. Следовательно, $g_0 g, g_1 g, \ldots, g_{n-1}g$ – перестановка элементов $g_0, g_1, \ldots, g_{n-1}$ группы G, $\varphi(g)$ – перестановка множества G:

$$\varphi(g) = \begin{pmatrix} g_0 & g_1 & \cdots & g_{n-1} \\ g_0 g & g_1 g & \cdots & g_{n-1}g \end{pmatrix}$$

и S – множество всех таких перестановок $\varphi(g)$ – является подмножеством симметрической группы всех перестановок множества G.

Покажем, что φ – изоморфизм:

1) φ – инъективно, так как если $g \neq g'$ $(g' \in G)$, то $\varphi(g) \neq \varphi(g')$ (хотя бы потому, что $g_0 g \neq g_0 g_1$, так как $g_0 = e$), т.е. различным элементам из G соответствуют различные перестановки из S;

2) φ сохраняет групповую операцию, так как

$$\varphi(gg') = \begin{pmatrix} g_0 & \cdots g_i & \cdots g_{n-1} \\ g_0(gg') & \cdots g_i(gg') & \cdots g_{n-1}(gg') \end{pmatrix},$$

$$\varphi(g')\varphi(g) = \begin{pmatrix} g_0 & \cdots g_i & \cdots g_{n-1} \\ g_0 g' & \cdots g_i g' & \cdots g_{n-1}g' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0 & \cdots g_i & \cdots g_{n-1} \\ g_0 g & \cdots g_i g & \cdots g_{n-1}g \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} g_0 g & \cdots g_i g & \cdots g_{n-1}g \\ (g_0 g)g' & \cdots (g_i g)g' & \cdots (g_{n-1}g)g' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0 & \cdots g_i & \cdots g_{n-1} \\ g_0 g & \cdots g_i g & \cdots g_{n-1}g \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} g_0 & \cdots g_i & \cdots g_{n-1} \\ (g_0 g)g' & \cdots (g_i g)g' & \cdots (g_{n-1}g)g' \end{pmatrix} = \varphi(gg').$$

Осталось отметить, что S – группа, т.е. подгруппа группы всех перестановок множества G. Это автоматически вытекает из того, что S – изоморфный образ группы G. ∎

Пример 39.7. Пусть a – элемент группы, имеющий конечный порядок n и $a^k = 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Доказать, что n является делителем k.

Решение. Деля k на n, получаем

$$k = nq + r,\ 0 \leq r < n.$$

Поэтому $a^k = (a^n)^q + a^r = a^r = 1$. Так как n – наименьшее положительное число, для которого $a^n = 1$, то $r = 0$. ∎

Пример 39.8. Доказать, что если a – элемент группы, имеющий конечный порядок, то его порядок совпадает с порядком циклической группы $\{a\}$.

Решение. Пусть a – элемент порядка n. Тогда все элементы

$$1, a, a^2, \ldots, a^{n-1} \tag{39.2}$$

различны, так как если $a^k = a^l$, $k \leq n-1$, $l \leq n-1$, то (пусть $k > l$) $a^{k-l} = 1$, где $k - l < n$, что противоречит тому, что n – порядок элемента a.

Всякая другая степень a равна одному из элементов (39.2), ибо $a^k = a^r$, $k > n$, $0 \leq r \leq n-1$ (см. пример 39.7). Следовательно,

$$\{a\} = \{1, a, a^2, \ldots, a^{n-1}\}$$

и $\mathrm{card}\{a\} = n$. ∎

Пример 39.9. Аддитивная группа вычетов по модулю p. Пусть $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$. Два целых числа m и n называются *сравнимыми по* *модулю p*, если при делении на p они дают одинаковые остатки, т.е. если $m - n = pk$, $k \in \mathbb{Z}$. Обозначение: $m \equiv n (\operatorname{mod} p)$.

Рассматривается аддитивная группа $\mathbb{Z}$ целых чисел и подгруппа H чисел, кратных p. Смежный класс по подгруппе H, порожденный элементом $m \in \mathbb{Z}$, имеет вид (будем придерживаться терминологии аддитивной группы в соответствии с исходной операцией):

$$m + H = \{m + pk \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{n \mid n \equiv m (\operatorname{mod} p)\},$$

т.е. это множество всех целых чисел, дающих при делении на p тот же остаток, что и m. Так как остатками при делении на p могут быть только числа $0, 1, 2, \ldots, p-1$, то аддитивная группа $\mathbb{Z}$ целых чисел разбивается на p смежных классов по подгруппе H: $C_0, C_1, \ldots, C_{p-1}$, где $C_r = \{n \mid n \equiv r (\operatorname{mod} p)\}$, $r = \overline{0, n-1}$. Обозначим $\mathbb{Z}_p = \{C_0, C_1, \ldots, C_{p-1}\}$.

Так как $\mathbb{Z}$ – абелева группа, то подгруппа H является нормальным делителем, поэтому $\mathbb{Z}_p$ – группа относительно сложения смежных классов (теорема 39.11). Согласно общей теории

$$C_m + C_n = C_r, \quad \text{где} \quad r \equiv (m + n) (\operatorname{mod} p),$$

т.е. $C_m + C_n$ – смежный класс, который содержит $m + n$.

Рассмотренная группа $\mathbb{Z}_p$ называется *аддитивной группой вычетов по модулю p*. Отметим, что $\mathbb{Z}_p$ – фактор-группа $\mathbb{Z}/H$.

ЗАДАЧИ

Примеры групп. Простейшие свойства

39.1. Какие из следующих числовых множеств образуют группу:

1) целые числа $\mathbb{Z}$ относительно сложения;

2) четные числа $2\mathbb{Z}$ относительно сложения;

3) целые числа $p\mathbb{Z}$, кратные данному натуральному числу p, относительно сложения;

4) степени данного действительного числа a ($a \neq 0, \pm 1$) с целыми показателями относительно умножения;

5) неотрицательные целые числа относительно сложения;

6) нечетные числа относительно сложения;

7) целые числа $\mathbb{Z}$ относительно вычитания;

8) рациональные числа $\mathbb{Q}$ относительно сложения;

9) рациональные числа $\mathbb{Q}$ относительно умножения;

10) ненулевые рациональные числа относительно умножения;

11) положительные рациональные числа $\mathbb{Q}_+$ относительно умножения;

12) положительные рациональные числа $\mathbb{Q}_+$ относительно деления;

13) двоично-рациональные числа, т.е. рациональные числа,

знаменатели которых – степени числа 2 с целыми неотрицательными показателями, относительно сложения;

14) все рациональные числа, представимые в виде дробей с нечетным знаменателем, относительно сложения;

15) множество $\{1, -1\}$ относительно умножения;

16) положительные действительные числа $\mathbb{R}_+$ относительно операции

$$a * b = a^b;$$

17) положительные действительные числа $\mathbb{R}_+$ относительно операции

$$a * b = a^2 b^2 \ ?$$

39.2. Для каждого из следующих множеств квадратных вещественных матриц выяснить, образует ли оно группу; в случае положительного ответа указать, будет ли эта группа абелевой:

1) матрицы порядка n относительно умножения;

2) матрицы порядка n относительно сложения;

3) невырожденные матрицы порядка n относительно умножения;

4) невырожденные матрицы порядка n относительно сложения;

5) матрицы порядка n с целыми элементами относительно умножения;

6) матрицы порядка n с определителем, равным d, относительно умножения;

7) матрицы порядка n с целыми элементами и определителем, равным ± 1, относительно умножения;

8) симметрические (кососимметрические) матрицы порядка n относительно сложения;

9) симметрические (кососимметрические) матрицы порядка n относительно умножения;

10) диагональные матрицы порядка n относительно сложения;

11) диагональные матрицы порядка n относительно умножения;

12) диагональные матрицы порядка n, все элементы диагонали которых отличны от нуля, относительно умножения;

13) верхние треугольные матрицы порядка n относительно умножения;

14) невырожденные треугольные матрицы одинакового вида относительно умножения;

15) ортогональные матрицы порядка n относительно умножения;

16) ненулевые матрицы вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$, относительно умножения;

17) ненулевые матрицы вида $\begin{pmatrix} a & b \\ qb & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{Q}$ ($q \in \mathbb{N}$ – заданное число, не являющееся полным квадратом), относительно умножения;

18) ненулевые матрицы вида $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 2c & a & b \\ 2b & 2c & a \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{Q}$, относительно умножения.

39.3. Для каждого из следующих множеств отображений выяснить, образует ли оно группу относительно умножения (суперпозиции) отображений; в случае положительного ответа указать, будет ли эта группа абелевой:

1) взаимно однозначные отображения множества натуральных чисел на себя, каждое из которых перемещает лишь конечное число чисел;

2) все отображения множества первых n натуральных чисел в себя;

3) все инъективные отображения множества первых n натуральных чисел на себя;

4) все сюръективные отображения множества первых n натуральных чисел на себя;

5) взаимно однозначные отображения множества первых n натуральных чисел на себя;

6) все перестановки первых n натуральных чисел;

7) четные перестановки первых n натуральных чисел;

8) нечетные перестановки первых n натуральных чисел;

9) все перестановки первых n натуральных чисел, оставляющие неподвижными элементы некоторого заданного подмножества;

10) параллельные переносы трехмерного пространства V_3;

11) повороты трехмерного пространства V_3 вокруг заданной оси;

12) все повороты плоскости V_2;

13) все повороты плоскости вокруг центра заданного правильного n-угольника, совмещающие этот n-угольник с самим собой.

39.4. Какие из следующих множеств действительных многочленов от одной переменной образуют группу относительно сложения многочленов:

1) многочлены степени не выше n (включая нулевой многочлен);

2) многочлены степени n;

3) многочлены всех степеней (включая нулевой многочлен);

4) многочлены степени не выше n, для которых $x = 1$ – корень;

5) многочлены степени не выше n, для которых $x = 1$ – простой корень?

39.5. Доказать, что множество дробно-линейных функций, т.е. функций вида $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $ad - bc \neq 0$, образует группу относительно операции суперпозиции функций. Абелева ли она?

39.6. Доказать, что множество $\mathcal{M}$ всех подмножеств некоторого непустого множества M образует абелеву группу относительно операции симметрической разности: $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

39.7. Выяснить, образует ли группу множество $\mathcal{M}$ всех подмножеств некоторого непустого множества M относительно:

а) операции пересечения;

б) операции объединения.

39.8. Доказать, что конечное множество G, в котором определена ассоциативная алгебраическая операция и каждое из уравнений $ax = b$, $ya = b$ для любых $a, b \in G$ имеет в G не более одного решения, будет группой.

39.9. Доказать, что конечное множество, в котором определена ассоциативная алгебраическая операция, подчиняющаяся закону сокращения слева и справа, является группой.

39.10. Доказать, что если $a^2 = 1$ для любого элемента a группы G, то эта группа абелева.

Изоморфизм групп

39.11. Доказать, что группы 1)–4) задачи 39.1 изоморфны между собой.

39.12. Показать, что изоморфные конечные группы имеют одинаковый порядок.

39.13. Найти все (с точностью до изоморфизма) группы порядка: а) 2; б) 3; в) 4; г) 6. Написать таблицы умножения этих групп и представить эти группы в виде групп перестановок. Доказать, что группы порядков $2, 3, 4$ абелевы.

39.14. Доказать, что:

а) группа $\mathbb{R}_+$ положительных действительных чисел по умножению изоморфна группе $\mathbb{R}$ всех действительных чисел по сложению;

б) группа $\mathbb{Q}_+$ положительных рациональных чисел по умножению не изоморфна группе $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел по сложению.

39.15. Доказать, что аддитивная группа $\mathbb{Z}$ целых чисел не изоморфна аддитивной группе $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.

39.16. Доказать, что мультипликативная группа ненулевых действительных чисел не изоморфна мультипликативной группе невырожденных диагональных матриц порядка $n \geq 2$.

39.17. Доказать, что при $n \geq 2$ мультипликативная группа невырожденных диагональных матриц порядка n не изоморфна мультипликативной группе невырожденных верхних треугольных матриц того же порядка n.

39.18. Доказать, что аддитивная группа $\mathbb{R}$ действительных чисел не изоморфна аддитивной группе $\mathbb{R}^{n\times n}$ квадратных матриц порядка $n \geq 2$.

39.19. Доказать, что мультипликативная группа ортогональных матриц порядка $n \geq 2$ не изоморфна мультипликативной группе невырожденных матриц того же порядка n с определителем, равным ± 1.

39.20. Доказать, что группа параллельных переносов пространства V_3 относительно суперпозиции отображений изоморфна аддитивной группе всех векторов в V_3.

39.21. Доказать, что группа всех поворотов плоскости V_2 относительно суперпозиции отображений изоморфна мультипликативной группе ортогональных матриц второго порядка с определителем, равным единице.

39.22. Доказать, что группа дробно-линейных функций (задача 39.5) изоморфна мультипликативной группе матриц второго порядка с определителем, равным ± 1.

39.23. Доказать, что:

а) любая конечная группа порядка n изоморфна некоторой группе перестановок n элементов;

б) любая группа изоморфна группе некоторых взаимно однозначных отображений множества элементов этой группы на себя.

39.24. Доказать, что группа порядка 6 либо коммутативна, либо изоморфна группе S_3.

Подгруппы

39.25. Доказать, что непустое подмножество H группы является ее подгруппой тогда и только тогда, когда

$$a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H.$$

39.26. Какие из групп в задачах 39.1–39.4 являются подгруппами других из этих групп?

39.27. Доказать, что во всякой группе:

а) пересечение любого набора подгрупп является подгруппой;

б) объединение двух подгрупп является подгруппой тогда и только тогда, когда одна из подгрупп содержится в другой;

в) если подгруппа H содержится в объединении подгрупп A и B, то либо $H \subset A$, либо $H \subset B$.

39.28. Доказать, что:

а) если H – конечное множество элементов группы G и произведение двух любых элементов из H снова лежит в H, то H будет подгруппой группы G;

б) если все элементы множества H группы G имеют конечные порядки и произведение двух любых элементов из H снова лежит в H, то H будет подгруппой группы G.

39.29. Доказать, что произведение двух подгрупп группы является группой тогда и только тогда, когда эти подгруппы перестановочны.

39.30. Доказать, что множества $p\mathbb{Z}$, $p \in \mathbb{N}$, исчерпывают все ненулевые подгруппы аддитивной группы $\mathbb{Z}$ целых чисел.

39.31. Доказать, что множество линейных функций образует подгруппу группы дробно-линейных функций задачи 39.5.

39.32. Существует ли бесконечная группа, содержащая лишь две тривиальные подгруппы?

39.33. Доказать, что любая бесконечная группа содержит бесконечно много нетривиальных подгрупп.

39.34. Доказать, что конечная группа имеет лишь две тривиальные подгруппы – $\{e\}$ и G – тогда и только тогда, когда ее порядок – простое число.

39.35. Указать все (с точностью до изоморфизма) конечные группы, имеющие ровно одну нетривиальную подгруппу.

39.36. Доказать, что любая группа либо имеет лишь две тривиальные подгруппы, либо имеет коммутативную подгруппу.

39.37. Найти все (с точностью до изоморфизма) группы, каждая из которых изоморфна любой своей неединичной подгруппе.

Смежные классы. Нормальный делитель

39.38. Является ли смежный класс группой?

39.39. Доказать, что между любыми двумя смежными классами по одной подгруппе H группы G можно установить взаимно однозначное соответствие.

39.40. Пусть H – подгруппа группы G. Доказать, что бинарное отношение: $a\mathcal{R}b$, если a и b находятся в одном левом (соответственно правом) смежном классе по подгруппе H, является отношением эквивалентности на множестве G.

39.41. Доказать, что элементы, обратные к элементам левого смежного класса по произвольной подгруппе, образуют правый смежный класс по этой подгруппе.

39.42. Доказать, что произведение двух левых смежных классов по подгруппе H является левым смежным классом по этой подгруппе тогда и только тогда, когда H – нормальный делитель.

39.43. Доказать, что отношение сопряженности элементов группы G является отношением эквивалентности на множестве G.

39.44. Найти смежные классы:

а) аддитивной группы $\mathbb{Z}$ целых чисел по подгруппе $p\mathbb{Z}$ чисел, кратных данному натуральному числу p;

б) аддитивной группы $\mathbb{R}$ действительных чисел по подгруппе $\mathbb{Z}$ целых чисел;

в) аддитивной группы целых чисел, кратных 3, по подгруппе чисел, кратных 24;

г) аддитивной группы $\mathbb{Q}$ рациональных чисел по подгруппе $\mathbb{Z}$ целых чисел;

д) мультипликативной группы ненулевых действительных чисел по подгруппе $\mathbb{R}_+$ положительных действительных чисел;

е) мультипликативной группы ненулевых действительных чисел по подгруппе $\{-1; 1\}$.

39.45. Найти смежные классы:

а) аддитивной группы векторов плоскости по подгруппе векторов, лежащих на оси абсцисс Ox;

б) группы всех параллельных переносов пространства V_3 из задачи 39.3(10) по подгруппе параллельных переносов на векторы, коллинеарные фиксированному вектору $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$;

в) группы всех поворотов плоскости V_2 вокруг заданной точки O по подгруппе поворотов на угол, кратный $2\pi/n$, где $n \geq 2$, $n \in \mathbb{Z}$;

г) симметрической группы S_n по подгруппе перестановок, оставляющих n на месте;

д) аддитивной группы действительных многочленов степени не выше 5 по подгруппе многочленов степени не выше 3;

е) аддитивной группы действительных многочленов степени не выше 4 по подгруппе многочленов, имеющих число $x = 0$ своим корнем.

39.46. Пусть G – аддитивная группа квадратных матриц $\mathbb{R}^{n\times n}$. Найти ее смежные классы:

а) по подгруппе симметрических матриц;

б) по подгруппе кососимметрических матриц;

в) по подгруппе нижних треугольных матриц.

39.47. Пусть G – мультипликативная группа невырожденных матриц $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Найти ее левостороннее и правостороннее разложения:

а) по подгруппе всех невырожденных диагональных матриц;

б) по подгруппе матриц перестановок;

в) по подгруппе верхних треугольных матриц с единичными диагональными элементам;

г) по подгруппе матриц с определителем, равным 1.

39.48. Найти левые и правые смежные классы группы дробно-линейных функций (задача 39.5) по подгруппе линейных функций вида $y = \dfrac{ax+b}{0x+1}$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Является ли эта подгруппа нормальным делителем?

39.49. Пусть G – мультипликативная группа невырожденных матриц второго порядка.

1) Доказать, что подмножество H всех матриц вида $\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, образует подгруппу.

2) Показать, что подгруппа H изоморфна аддитивной группе $\mathbb{R}$ вещественных чисел.

3) Найти левые и правые смежные классы группы G по подгруппе H. Является ли подгруппа H нормальным делителем?

39.50. Пусть $\mathcal{G}$ – группа из задачи 39.6.

1) Доказать, что множество $\mathcal{H}$ всех подмножеств множества M, дополнение которых содержит заданное подмножество A_0, образует подгруппу. Является ли эта подгруппа нормальным делителем?

2) Построить разложение группы $\mathcal{G}$ по подгруппе $\mathcal{H}$.

39.51. Доказать, что в любой группе перестановок, содержащей хотя бы одну нечетную перестановку:

а) число четных перестановок равно числу нечетных;

б) четные перестановки образуют нормальный делитель.

39.52. Указать все нетривиальные подгруппы симметрической группы S_3. Находя правые и левые смежные классы по этим подгруппам, выяснить, какие из этих подгрупп являются нормальными делителями.

Порядок элемента. Циклические группы

39.53. Найти порядок элемента:

а) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$ мультипликативной группы невырожденных матриц второго порядка;

б) $\begin{bmatrix} \cos(2\pi/n) & -\sin(2\pi/n) \\ \sin(2\pi/n) & \cos(2\pi/n) \end{bmatrix}$ мультипликативной группы невырожденных матриц второго порядка;

в) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ мультипликативной группы невырожденных матриц четвертого порядка;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ группы S_5;

д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ группы S_6.

39.54. Найти порядки всех элементов:

а) аддитивной группы вычетов $\mathbb{Z}_6$;

б) мультипликативной группы $\mathbb{Z}_5 \setminus \{0\}$.

39.55. Выяснить, элементы каких конечных порядков содержатся:

а) в мультипликативной группе положительных рациональных чисел;

б) в мультипликативной группе ненулевых рациональных чисел;

в) в мультипликативной группе невырожденных диагональных матриц порядка $n \geq 2$;

г) в мультипликативной группе невырожденных матриц порядка $n \geq 2$.

39.56. Показать, что в мультипликативной группе невырожденных матриц существует бесконечно много элементов второго порядка.

39.57. Привести пример бесконечной группы, в которой каждый элемент имеет конечный порядок.

39.58. Доказать, что если элемент a группы имеет конечный порядок n, то элементы $1, a, a^2, \dots, a^{n-1}$ различны.

39.59. Доказать, что элемент a группы имеет порядок n, то $a^k = 1$ тогда и только тогда, когда k делится на n нацело.

39.60. Доказать, что циклическая группа простого порядка порождается любым своим неединичным элементом.

39.61. Доказать, что если элемент a группы имеет порядок n, то $a^{-1} = a^{n-1}$.

39.62. Доказать, что во всякой группе

а) элементы ab и ba имеют один и тот же порядок;

б) элементы a и bab^{-1} имеют один и тот же порядок;

в) элементы abc, bca и cab имеют одинаковый порядок;

г) элементы abc и cba могут иметь разные порядки.

39.63. Пусть элементы a и b группы G имеют конечный порядок и $ab = ba$. Доказать, что:

а) если порядки элементов a и b взаимно просты, то порядок произведения ab равен произведению их порядков;

б) существуют показатели k и l такие, что порядок произведения $a^k b^l$ равен наименьшему общему кратному порядков элементов a и b.

Верны ли эти утверждения для некоммутирующих элементов a и b?

39.64. Найти порядок элемента a^k, если порядок элемента a равен n.

39.65. Найти все образующие элементы аддитивной группы целых чисел.

39.66. В циклической группе $\{a\}$ порядка n найти все элементы g, удовлетворяющие условию $g^k = 1$, и все элементы порядка k при

а) $n = 24$, $k = 6$; б) $n = 24$, $k = 4$; в) $n = 100$, $k = 20$;
г) $n = 100$, $k = 5$; д) $n = 360$, $k = 30$;
е) $n = 360$, $k = 12$; ж) $n = 360$, $k = 7$.

39.67. Пусть G – группа из n элементов. Доказать, что $G = \{a\}$ тогда и только тогда, когда n - порядок элемента a.

39.68. Доказать, что порядок любого элемента конечной группы является делителем порядка группы.

39.69. Доказать, что конечная группа простого порядка является циклической и порождается любым своим неединичным элементом.

39.70. Доказать, что в аддитивной группе n-го порядка для любого элемента a имеет место равенство

$$na = 0.$$

39.71. Доказать, что любая подгруппа циклической группы – тоже циклическая.

39.72. Пусть $G = \{a\}$ – конечная циклическая группа порядка n. Доказать утверждения:

а) порядок любой подгруппы группы G делит порядок n этой группы;

б) для любого делителя d числа n существует единственная подгруппа H группы G, имеющая порядок d;

в) подгруппа H порядка d содержит в качестве образующих все элементы порядка d группы G. В частности, $H = \{a^{n/d}\}$.

39.73. Доказать, что если циклическая подгруппа является нормальным делителем, то либо групповая операция коммутативна, либо подгруппа конечна.

39.74. Найти число элементов порядка p^m в циклической группе порядка p^n, где p – простое число, $0 < m \le n$.

39.75. Найти все подгруппы:

а) циклической группы порядка 6;

б) циклической группы порядка 24;

в) циклической группы порядка 100;

г) циклической группы порядка p^n (p –простое число).

39.76. Пусть $G = \{a\}$ – циклическая группа порядка n и $b = a^k$. Доказать, что:

а) элемент b тогда и только тогда будет образующим группы G, когда числа n и k взаимно просты;

б) порядок элемента b равен n/d, где d – наибольший общий делитель n и k;

в) всякая подгруппа $H \subset G$ порождается элементом вида a^d, где d – делитель n;

г) для всякого делителя d числа n существует единственная подгруппа $H \subset G$ порядка d.

39.77. Доказать, что любая циклическая группа порядка n изоморфна аддитивной группе $\mathbb{Z}_n$ вычетов по модулю n.

39.78. Доказать, что в коммутативной группе множество элементов, порядки которых делят фиксированное число n, является подгруппой. Верно ли это утверждение для некоммутативной группы?

39.79. Доказать, что:

а) все бесконечные циклические группы изоморфны между собой;

б) все конечные циклические группы данного порядка n изоморфны между собой.

Фактор-группа

39.80. Пусть H – нормальный делитель в группе G. Назовем два элемента $a, b \in G$ связанными бинарным отношением $\mathcal{R}$, если элемент ab^{-1} принадлежит H. Доказать, что:

1) $\mathcal{R}$ является отношением эквивалентности на множестве G;

2) фактор-множество $G|\mathcal{R}$ совпадает с фактор-группой группы G по подгруппе H.

39.81. Доказать, что фактор-группа симметрической группы S_n по знакопеременной группе A_n изоморфна фактор-группе

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ аддитивной группы целых чисел по подгруппе четных чисел.

39.82. Найти фактор-группы:

а) аддитивной группы $\mathbb{Z}$ целых чисел по подгруппе $p\mathbb{Z}$ чисел, кратных данному натуральному числу p;

б) аддитивной группы $3\mathbb{Z}$ целых чисел, кратных 3, по подгруппе $15\mathbb{Z}$ чисел, кратных 15;

в) аддитивной группы $4\mathbb{Z}$ целых чисел, кратных 4, по подгруппе $24\mathbb{Z}$ чисел, кратных 24;

г) мультипликативной группы ненулевых действительных чисел по подгруппе $\mathbb{R}_+$ положительных действительных чисел.

39.83. Доказать, что в фактор-группе $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

а) содержится бесконечно много элементов;

б) каждый элемент имеет конечный порядок;

в) для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеется в точности одна подгруппа порядка n.

39.84. Доказать, что фактор-группа мультипликативной группы невырожденных матриц n-го порядка по своей подгруппе H изоморфна:

а) мультипликативной группе ненулевых действительных чисел, если $H = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det A = 1\}$;

б) мультипликативной группе $\mathbb{R}_+$ положительных действительных чисел, если $H = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid |\det A| = 1\}$;

в) группе $\mathbb{Z}_2$, если $H = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det A > 0\}$.

39.85. Пусть G_n – аддитивная группа векторов n-мерного линейного пространства и H_k – подгруппа векторов k-мерного подпространства, $0 \le k \le n$. Доказать, что фактор-группа G_n/H_k изоморфна G_{n-k}.

§40. Кольцо и поле

Непустое множество K, наделенное двумя алгебраическими операциями – сложением и умножением, называется *кольцом*, если эти операции удовлетворяют следующим аксиомам: $\forall a, b, c \in K$

1) $a + b = b + a$;
2) $(a + b) + c = a + (b + c)$;
3) $\exists 0 \in K : a + 0 = 0 + a = a$;
4) $\forall a \in K \quad \exists -a \in K : a + (-a) = (-a) + a = 0$;
5) $(ab)c = a(bc)$;
6) $(a + b)c = ab + bc, \quad a(b + c) = ab + ac$.

Кольцо называется *коммутативным*, если умножение в нем коммутативно. Кольцо называется *кольцом с единицей*, если операция умножения обладает нейтральным элементом.

1. *Кольцо обладает всеми свойствами аддитивной абелевой группы;* в частности, в кольце:

а) существует единственный нулевой элемент 0;

б) для любого элемента a существует единственный противоположный элемент $-a$;

в) для любых элементов $a, b \in K$ существует, и притом единственное, решение уравнения $x+a=b$, при этом $x = b+(-a)$; это решение называется *разностью* элементов b и a и обозначается символом $b-a$.

2. *В кольце умножение дистрибутивно относительно вычитания,* т.е. $a(b-c) = ab - ac$, $(a-b)c = ac - bc$, $\forall a, b, c \in K$.

3. *В кольце для любого элемента* a: $a0 = 0a = 0$.

4. *В кольце для любых элементов* a, b: $(-a)b = a(-b) = -ab$.

Следствие. $(-a)(-b) = ab$, $\forall a, b \in K$.

5. *В кольце с единицей для любого элемента* a:

$$(-1)a = a(-1) = -a.$$

6. *В кольце для любого элемента a определен элемент, кратный элементу a: na, $n \in \mathbb{N}$.*

7. *В кольце с единицей, содержащем не менее двух элементов, выполнено*:

$$1 \neq 0.$$

8. *В кольце с единицей множество обратимых (по умножению) элементов образует мультипликативную группу.*

Ненулевые элементы a и b кольца называются *делителями нуля*, если $ab = 0$. При этом элемент a называется *левым* делителем нуля, а элемент b – *правым.*

Два кольца K и K' называются *изоморфными*, если существует биективное отображение $\varphi : K \to K'$, которое сохраняет операции, т.е. для любых $a, b \in K$

1) $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$; 2) $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.

В изоморфных кольцах K и K'

1) $\varphi(0) = 0'$, где 0 и $0'$ – нули в K и K';

2) $\varphi(-a) = -\varphi(a)$, $\forall a \in K$;

3) если кольцо K обладает единицей 1, то кольцо K' тоже обладает единицей $1'$, при этом $\varphi(1) = 1'$;

4) если элемент $a \in K$ обладает обратным элементом a^{-1}, то

$$\varphi(a^{-1}) = \big(\varphi(a)\big)^{-1};$$

5) если кольцо K имеет делители нуля, то их образы будут делителями нуля в кольце K'.

Рассмотрим аддитивную группу $\mathbb{Z}_p = \{C_0, C_1, \ldots, C_{p-1}\}$ вычетов по модулю p (пример 39.9). Определим на $\mathbb{Z}_p$ операцию умножения, положив

$$C_m \cdot C_n = C_r, \quad \text{где} \quad r \equiv mn (\operatorname{mod} p),$$

т.е. $C_m \cdot C_n$ – это смежный класс, в который входит mn.

Теорема 40.1. *$\mathbb{Z}_p$ – конечное коммутативное кольцо с единицей, которое имеет делители нуля, если p – составное число.*

Кольцо $\mathbb{Z}_p$ называется *кольцом вычетов по модулю* p.

Непустое подмножество кольца K называется *подкольцом*, если оно само образует кольцо относительно операций, определенных в K.

Полем называется коммутативное кольцо с единицей, содержащее не менее двух элементов, в котором каждый отличный от нуля элемент имеет обратный.

1. *Поле обладает всеми свойствами кольца.*

2. *В поле нет делителей нуля.*

Следствие. *Умножение является алгебраической операцией на множестве всех ненулевых элементов поля.*

3. *В поле P множество всех ненулевых элементов образует мультипликативную коммутативную группу*, и поэтому в поле:

а) *существует, и притом единственная, единица, причем* $1 \neq 0$;

б) *для любого элемента $a \neq 0$ существует, и притом единственный, обратный элемент*;

в) *для любых $a, b \in P$, $a \neq 0$, уравнение $ax = b$ имеет единственное решение, при этом $x = a^{-1}b = ba^{-1}$*; этот элемент называется *частным от деления b на a* и обозначается символом $\dfrac{b}{a}$ или b/a.

4. *В поле сохраняются все обычные правила обращения с дробями:*

а) $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$;

б) $\dfrac{a}{b} \pm \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad \pm bc}{bd}$, $\quad \dfrac{a}{b}\dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$;

в) $\dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b} = -\dfrac{a}{b}$.

5. *В поле для любого элемента a и любого $n \in \mathbb{Z}$ определен элемент na, кратный элементу a; если $n \in \mathbb{N}$, то определена n-я степень a^n элемента a; если $a \neq 0$, то n-я степень определена для любого $n \in \mathbb{Z}$.*

Элементы поля называют *числами.*

Наименьшее натуральное n, для которого

$$n \cdot 1 = \underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n} = 0,$$

называется *характеристикой* поля. Если указанное свойство не имеет места ни для какого натурального числа n, то говорят, что такое поле *имеет характеристику нуль.*

Теорема 40.2. *Характеристикой поля может быть либо* 0, *либо простое число.*

Теорема 40.3. *Если p – простое число, то кольцо $\mathbb{Z}_p$ вычетов по модулю p образует поле характеристики p.*

Подмножество P' поля P называется *подполем* поля P, если оно само является полем относительно тех операций, которые определены в поле P. При этом поле P, в свою очередь, называется *расширением* поля P'.

Два поля называются *изоморфными*, если они изоморфны как кольца.

В главах I, II, IV, V рассматриваются вещественные матрицы, их определители, вещественные системы линейных алгебраических уравнений, вещественные линейные пространства. Основные результаты этих глав практически дословно переносятся на случай, когда вместо поля $\mathbb{R}$ вещественных чисел рассматривается произвольное поле P. Без всяких ограничений они переносятся на случай бесконечного поля P характеристики $p = 0$, так как алгебраические операции в таком поле обладают теми же свойствами, что и в поле $\mathbb{R}$.

Для конечного поля имеет место очевидное отличие. Так, неопределенная система линейных алгебраических уравнений над полем $\mathbb{R}$ имеет бесконечно много решений. Это перестает быть справедливым, если основное поле P конечно.

Более серьезное отличие возможно для поля характеристики $p \neq 0$, так как в таком поле из равенства $na = a + \ldots + a = 0$ не следует, что $a = 0$ (задача 40.43). Доказательства, относящиеся к вещественным объектам и опирающиеся на вывод

$$na = 0 \Rightarrow a = 0$$

теряют силу в поле ненулевой характеристики. Так, доказательство свойства 6 определителя (§5) не проходит для поля характеристики два, хотя само это свойство остается справедливым (задача 40.50), а утверждение (задача 1.38, §1) о том, что для матриц $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ невозможно равенство $AB - BA = I$, оказывается неверным, если основное поле P имеет характеристику n. Доказательство (пример 5.5, §5) утверждения об определителях кососимметрических матриц нечетного порядка требует предположения, что характеристика поля P отлична от двух, хотя само это утверждение остается в силе (с одной оговоркой) и в случае поля характеристики два (задача 40.49).

Матрица с элементами из поля P называется *матрицей над полем* P, аналогично определяются термины "система линейных алгебраических уравнений над полем P", "линейное пространство над полем P".

ЗАДАЧИ

Примеры колец и полей

40.1. Выяснить, какие из следующих числовых множеств образуют кольцо (но не поле) и какие поле относительно сложения и умножения чисел; в случае кольца указать, обладает ли оно единицей:

1) целые числа $\mathbb{Z}$;

2) четные числа $2\mathbb{Z}$;

3) целые числа $n\mathbb{Z}$, кратные данному целому $n \geq 3$;

4) неотрицательные целые числа;

5) рациональные числа $\mathbb{Q}$;

6) рациональные числа, в несократимой записи которых знаменатели делят фиксированное число $n \in \mathbb{N}$;

7) рациональные числа, в несократимой записи которых знаменатели не делятся на фиксированное число $n \in \mathbb{N}$;

8) рациональные числа, в несократимой записи которых знаменатели являются степенями заданного простого числа p;

9) вещественные числа $\mathbb{R}$;

10) вещественные числа вида $a + b\sqrt[3]{2}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$;

11) вещественные числа вида $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$, где $a, b, c \in \mathbb{Q}$;

12) вещественные числа вида $a + b\sqrt{2}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$.

40.2. Выяснить, какие из следующих множеств вещественных матриц n-го порядка, $n \geq 2$, образуют кольцо (но не поле), а какие поле относительно сложения и умножения матриц; в случае кольца указать, является ли оно коммутативным, кольцом с единицей, кольцом с делителями нуля:

1) симметрические матрицы;

2) ортогональные матрицы;

3) верхние треугольные матрицы;

4) диагональные матрицы;

5) матрицы, у которых все строки, начиная со второй, нулевые;

6) матрицы вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, где $a, b \in \mathbb{R}$;

7) матрицы вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$;

8) матрицы вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$, где $a, b \in \mathbb{R}$;

9) матрицы вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$.

40.3. Выяснить, относительно каких из следующих операций сложения и умножения множество $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ пар вещественных чисел образует кольцо (но не поле), а для каких – поле; в случае кольца указать, является ли оно коммутативным, кольцом с единицей, кольцом с делителями нуля:

1) $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$; $(a,b)\cdot(c,d)=(ac,ad+b)$;

2) $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$; $(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$;

3) $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$; $(a,b)\cdot(c,d)=(0,0)$;

4) $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$; $(a,b)\cdot(c,d)=(ac,bd)$;

5) $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$; $(a,b)\cdot(c,d)=(ac,ad-bc)$;

6) $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$; $(a,b)\cdot(c,d)=(ad,bd)$.

40.4. Выяснить, какие из следующих множеств функций от одной вещественной переменной образуют кольцо относительно обычных операций сложения и умножения функций; в случае кольца указать, является ли оно кольцом с единицей, кольцом с делителями нуля, полем:

1) множество линейных функций $f(x)=ax+b$, $a, b \in \mathbb{R}$;

2) множество всех многочленов степени не выше n;

3) множество многочленов всех степеней;

4) множество всех тригонометрических многочленов $f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$;

5) множество $C[a, b]$ функций, непрерывных на $[a, b]$;

6) множество $C_0[a, b]$ функций, непрерывных на $[a, b]$ и обращающихся в нуль при $x = a$ и $x = b$;

7) множество дифференцируемых на (a, b) функций;

8) множество дробно-рациональных функций, т.е. функций, представимых в виде $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, где $f(x), g(x)$ – многочлены с действительными коэффициентами ($g(x) \not\equiv 0$).

40.5. Выяснить, образует ли множество линейных функций $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, кольцо относительно операций сложения и суперпозиции функций.

40.6. В аддитивной группе многочленов от одного переменного t в качестве операции умножения рассматривается операция суперпозиции. Является ли это множество кольцом относительно этих операций?

40.7. Доказать, что множество всех подмножеств некоторого множества M образует кольцо относительно операций симметрической разности и пересечения, рассматриваемых как сложение и умножение соответственно. Показать, что это коммутативное кольцо с единицей и с делителями нуля.

40.8. В коммутативном кольце функций, непрерывных на всей действительной оси, с обычными операциями сложения и умножения указать подкольцо:

а) без единицы и без делителей нуля;

б) без единицы, но с делителями нуля;

в) с единицей и делителями нуля;

г) с единицей и без делителей нуля, но не являющееся полем.

40.9. В кольце квадратных матриц порядка $n \geq 2$ указать некоммутативное подкольцо:

а) с единицей и делителями нуля;

б) без единицы, но с делителями нуля.

40.10. Показать, что множество действительных матриц вида

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{bmatrix}$$

образует некоммутативное кольцо с единицей и без делителей нуля. Указать в нем подкольцо без единицы.

40.11. Доказать, что если в любой аддитивной абелевой группе ввести операцию умножения равенством $ab = 0$ для любых элементов a, b, то получится кольцо (*аннуляторное кольцо*).

Свойства колец и полей

40.12. Найти обратимые элементы в кольцах с единицей из задач 40.1–40.4.

40.13. Доказать, что все обратимые элементы кольца с единицей образуют мультипликативную группу.

40.14. Найти все обратимые элементы и все делители нуля в кольце:

1) $\mathbb{Z}_p$ вычетов по модулю p;

2) верхних треугольных матриц n-го порядка над полем P;

3) скалярных матриц n-го порядка над полем P;

4) диагональных матриц n-го порядка над полем P.

40.15. Доказать, что в кольце квадратных матриц порядка n с элементами из некоторого поля ненулевые вырожденные матрицы, и только они, являются делителями нуля.

40.16. Найти все делители нуля в кольце $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ пар действительных чисел с операциями, заданными равенствами из задачи 40.3(4) и из задачи 40.3(6).

40.17. Показать, что в кольце матриц порядка $n \geq 2$ из задачи 40.2(5) всякий элемент, отличный от нуля, является правым делителем нуля. Какие матрицы в этом кольце не будут левыми делителями нуля?

40.18. Показать, что если в кольце K элемент a обратим, а элемент b – левый делитель нуля, то элемент ab также является левым делителем нуля.

40.19. Привести пример кольца, в котором содержится единственный делитель нуля.

40.20. Показать, что в кольце с единицей коммутативность сложения вытекает из остальных аксиом кольца.

40.21. Проверив, что свойство нуля и делителей нуля можно доказать, не используя коммутативности сложения, доказать, что в кольце, содержащем хотя бы один элемент c, не являющийся делителем нуля, коммутативность сложения вытекает из остальных аксиом кольца.

40.22. Доказать, что конечное коммутативное кольцо без делителей нуля, содержащее более одного элемента, является полем.

40.23. Доказать, что кольцо, содержащее не более трех элементов, коммутативно.

40.24. Пусть K – конечное кольцо. Доказать, что:

а) если K не содержит делителей нуля, то оно имеет единицу и все его ненулевые элементы обратимы;

б) если K имеет единицу, то каждый его элемент, имеющий односторонний обратный, обратим;

в) если K имеет единицу, то всякий левый делитель нуля является правым делителем нуля.

Верны ли утверждения б) и в) для колец без единицы?

40.25. Пусть K – кольцо с единицей, $a, b \in K$. Доказать, что:

а) если произведения ab и ba обратимы, то элементы a и b также обратимы;

б) если K не имеет делителей нуля и произведение ab обратимо, то элементы a и b обратимы;

в) если K конечно и произведение ab обратимо, то a и b обратимы;

г) без дополнительных предположений о кольце K из обратимости произведения ab не следует обратимость самих элементов a и b.

40.26. Привести примеры колец матриц специального вида, обладающих несколькими правыми или несколькими левыми единицами.

40.27. На множестве P^2 упорядоченных пар (a_1, a_2) элементов поля P введены операции сложения и умножения по правилам:

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2),$$
$$(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = (a_1 b_1 - a_2 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1).$$

Доказать, что множество P^2 относительно так введенных операций является коммутативным кольцом с единицей. Является ли это кольцо полем?

Изоморфизм колец и полей

40.28. Доказать, что:

а) кольцо диагональных матриц второго порядка изоморфно кольцу из задачи 40.3(4);

б) кольцо матриц вида $\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$, изоморфно кольцу из задачи 40.3(б).

40.29. Доказать, что кольцо, изоморфное полю, само является полем.

40.30. Показать, что скалярные матрицы порядка n с действительными элементами при обычных операциях образуют поле, изоморфное полю $\mathbb{R}$ действительных чисел.

40.31. Показать, что поле матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 2b & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{Q}$, изоморфно полю чисел вида $a + b\sqrt{2}$, где $a, b \in \mathbb{Q}$.

40.32. Доказать, что матрицы вида $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 2c & a & b \\ 2b & 2c & a \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{Q}$, образуют поле, изоморфное полю чисел вида $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$, $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

40.33. Доказать, что матрицы вида $\begin{pmatrix} A & B \\ 3B & A \end{pmatrix}$, где $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 2a_2 & a_1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 2b_2 & b_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$, образуют поле, изоморфное полю чисел вида $a_1 + a_2\sqrt{2} + b_1\sqrt{3} + b_2\sqrt{6}$, $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{Q}$.

40.34. Доказать, что группа невырожденных матриц порядка n над полем $\mathbb{Z}_p$ изоморфна симметрической группе S_m лишь в трех следующих случаях: а) $n = p = 2$, $m = 3$; б) $n = 1$, $p = 2$, $m = 1$; в) $n = 1$, $p = 3$, $m = 2$.

Конечные поля. Характеристика поля

40.35. Доказать, что в кольце, состоящем из n элементов, для любого элемента a кольца имеет место равенство $na = 0$.

40.36. Доказать, что если в поле хотя бы один ненулевой элемент a имеет кратный элемент na, равный нулю, то характеристика поля отлична от нуля и не превосходит n.

40.37. Доказать, что если в аддитивной группе поля хотя бы один ненулевой элемент имеет конечный порядок, равный n, то любой ненулевой элемент поля также имеет конечный порядок, который не превосходит n.

40.38. Доказать, что порядок единицы поля в его аддитивной группе либо бесконечен, либо является простым числом.

40.39. Показать, что множество из четырех матриц O, I, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ над $\mathbb{Z}_2$ образует поле.

40.40. Показать, что не существует поля, состоящего из шести элементов.

40.41. Доказать, что любые два поля из четырех элементов изоморфны.

40.42. Доказать, что в поле из n элементов выполняется тождество $x^n = x$.

40.43. Доказать, что если характеристика поля P равна p, то

1) при $p \neq 0$ для любого элемента $a \in P$ выполнено: $pa = 0$;

2) при $p = 0$: если $a \neq 0$, $a \in P$ и $n \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$, то $na \neq 0$.

40.44. Показать, что характеристика конечного поля является делителем его порядка.

40.45. Привести пример бесконечного поля ненулевой характеристики.

40.46. Найти порядок элемента 2 в мультипликативной группе поля $\mathbb{Z}_p$ для $p = 3, 5, 7, 11$. В каких из этих групп 2 является образующим элементом?

40.47. Найти все образующие элементы в мультипликативных группах поля: а) $\mathbb{Z}_7$; б) $\mathbb{Z}_{11}$.

40.48. Привести пример квадратных матриц A и B порядка p с элементами из кольца $\mathbb{Z}_p$, для которых выполнено равенство $AB - BA = I$.

40.49. Пусть P – поле характеристики два. Доказать, что определитель кососимметрической матрицы нечетного порядка над полем P равен нулю, если все ее диагональные элементы равны нулю. Верно ли это утверждение, если хотя бы один диагональный элемент кососимметрической матрицы не равен нулю?

40.50. Пусть P – поле характеристики два. Доказать, что определитель матрицы над полем P с одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.

40.51. Пусть P – поле, состоящее из k элементов. Доказать, что однородная система линейных алгебраических уравнений над полем P с n неизвестными имеет k^{n-r} решений, где r – ранг матрицы системы.

40.52. Доказать, что система линейных алгебраических уравнений с квадратной матрицей коэффициентов A над любым полем имеет единственное решение тогда и только тогда, когда матрица A невырождена.

40.53. Решить в поле из задачи 40.1(12) уравнения:

а) $x^2 + (4 - 2\sqrt{2})x + 3 - 2\sqrt{2} = 0$; б) $x^2 - x - 3 = 0$;

в) $x^2+x-7+6\sqrt{2} = 0$; г) $x^2-2x+1-\sqrt{2} = 0$; д) $x^2-6x+1 = 0$.

40.54. Решить систему уравнений

$$x + 2z = 1,\ y + 2z = 2,\ 2x + z = 2$$

а) в поле $\mathbb{Z}_3$; б) в поле $\mathbb{Z}_5$.

40.55. Решить систему уравнений

$$3x + y + 2z = 1,\ x + 2y + 3z = 1,\ 4x + 3y + 2z = 1$$

а) в поле $\mathbb{Z}_5$; б) в поле $\mathbb{Z}_7$.

40.56. Какие из уравнений:

а) $x^2 = 5$; б) $x^7 = 7$; в) $x^3 = a$

имеют решения в поле $\mathbb{Z}_{11}$? Если имеют, то сколько их?

40.57. Пусть G_p – кольцо матриц вида $\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ с элементами a, b из кольца вычетов $\mathbb{Z}_p$. Доказать, что:

а) G_p – коммутативное кольцо с единицей;

б) если p – составное число, то в кольце G_p есть ненулевые необратимые элементы;

в) G_2 и G_5 имеют делители нуля, и следовательно, не являются полями;

г) кольца G_3 и G_7 являются полями;

д) если p – простое число, то кольцо G_p является полем тогда и только тогда, когда уравнение $x^2 + y^2 = 0$ не имеет решений в кольце $\mathbb{Z}_p$.

40.58. Доказать, что кольцо матриц вида $\begin{bmatrix} a & b \\ 2b & a \end{bmatrix}$, где $a, b \in \mathbb{Z}_5$, образует поле.

40.59. Доказать, что число элементов конечного поля равно p^m, где p – простое число, а m – натуральное.

Глава XI. **Поле комплексных чисел**

§41. Алгебраическая форма комплексного числа

Комплексными числами называются упорядоченные пары (a,b) вещественных чисел, для которых понятия равенства, суммы, произведения и отождествления с вещественными числами вводятся согласно следующим правилам (аксиомам):

1) $(a,b) = (c,d) \iff a = c,\ b = d$;

2) $(a,b) + (c,d) = (a+c,\ b+d)$;

3) $(a,b)\cdot(c,d) = (ac-bd,\ ad+bc)$;

4) пара $(a,0)$ отождествляется с действительным числом a.

Обозначения: $z = (a,b)$; $i = (0,1)$; $\mathbb{C}$ – множество всех комплексных чисел.

Очевидно, $i^2 = -1$.

Теорема 41.1. *Множество $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел является полем характеристики нуль.*

Следствие 1. *Для любой пары комплексных чисел $z_1 = (a,b)$, $z_2 = (c,d)$ существует, и притом единственная, разность $z_1 - z_2 = (a-c, b-d)$.*

Следствие 2. *Для любой пары комплексных чисел $z_1 = (a,b)$, $z_2 = (c,d) \neq 0$ существует, и притом единственное, частное*

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right).$$

Теорема 41.2. *Любое комплексное число $z = (a,b)$ может быть записано в виде*

$$z = a + bi. \tag{41.1}$$

Форма (41.1) записи комплексного числа $z = (a,b)$ называется *алгебраической формой числа* z, при этом число a называется *действительной частью* комплексного числа $z = a + bi$ и обозначается символом $\operatorname{Re} z$, а b – *мнимой частью* и обозначается $\operatorname{Im} z$. Подчеркнем, что $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z \in \mathbb{R}$. Для вещественных чисел мнимая часть равна нулю. Комплексные числа, у которых действительная часть равна нулю, называются *чисто мнимыми*. Очевидно, два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда отдельно равны их действительные и мнимые части.

Комплексное число $\overline{z} = a - bi$ называется *сопряженным* к числу $z = a + bi$.

Теорема 41.3. *Операция сопряжения комплексного числа обладает следующими свойствами:*

1) $\overline{\overline{z}} = z$;

2) $z = \overline{z} \iff z \in \mathbb{R}$;

3) $\overline{z} + z = 2a, \quad \forall z = a + bi$;

4) $\overline{z}z = a^2 + b^2, \quad \forall z = a + bi$;

5) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$; $\quad \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$; $\quad \overline{(z_1/z_2)} = \overline{z_1}/\overline{z_2}, z_2 \neq 0$.

Замечание. Для комплексных чисел, заданных в алгебраической форме, операции сложения, вычитания, умножения и деления производятся по обычным правилам выполнения этих операций над двучленами $a + bi$ с учетом того, что $i^2 = -1$, и последующим приведением подобных членов (т.е. отдельно группируются вещественные числа и чисто мнимые). Особенно это удобно для умножения чисел: если $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$, то $z_1 z_2 = (a + bi)(c + di) = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i$. При делении чисел числитель и знаменатель дроби z_1/z_2 следует предварительно умножить на $\overline{z_2}$:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a+bi)(c-di)}{z_2\overline{z_2}} = \left\{z_2\overline{z_2} = c^2 + d^2 \neq 0\right\} = \frac{(ac+bd)}{c^2+d^2} + \frac{(bc-ad)}{c^2+d^2}i.$$

Пусть на плоскости V_2 выбрана прямоугольная декартова система координат. Отображение, которое каждому комплексному числу $z = a+bi$ ставит в соответствие точку M этой плоскости с координатами (a, b), является биекцией.

Плоскость, точками которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной плоскостью*, ее ось абсцисс – *вещественной осью*, ось ординат – *мнимой осью* (в соответствии с наименованием чисел, изображения которых лежат на этих осях).

Сложение и вычитание комплексных чисел выполняются по правилу сложения и вычитания радиус–векторов точек комплексной плоскости, изображающих эти числа.

Пусть $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{m\times n}$ – матрица размера $m \times n$ над полем комплексных чисел. Матрица $A^H = (a^h_{ij})$ размера $n \times m$ называется *сопряженной* к матрице A, если

$$a^h_{ij} = \overline{a_{ji}}, \qquad i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}.$$

Очевидно, что $A^H = (\overline{A})^T = \overline{(A^T)}$, где $\overline{A} = (\overline{a_{ij}})$.

Сопряженная матрица обладает следующими свойствами:

1) $(A + B)^H = A^H + B^H$,
2) $(\alpha A)^H = \overline{\alpha} A^H$, $\forall \alpha \in \mathbb{C}$,
3) $(AB)^H = B^H A^H$,
4) $(A^H)^H = A$,
5) $\det A^H = \overline{\det A}$,
6) $\operatorname{rg} A^H = \operatorname{rg} A$,

выполненными для всех матриц, для которых определены левые части равенств.

Комплексная матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ называется *эрмитовой*, если $A^H = A$, и *унитарной*, если $A^H A = AA^H = I$.

ЗАДАЧИ

41.1. Вычислить выражения:

а) $(2+i)(3-i)+(2+3i)(3+4i)$; б) $(2+i)(3+7i)-(1+2i)(5+3i)$;
в) $(4+i)(5+3i) - (3+i)(3-i)$; г) $(2+i)^3 + (2-i)^3$;
д) $(3+i)^3 - (3-i)^3$; е) $\dfrac{(5+i)(7-6i)}{3+i}$; ж) $\dfrac{(5+i)(3+5i)}{2i}$;

з) $\dfrac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2}$; и) $\dfrac{(1+3i)^2+(2i)^2}{(2+i)^3+(1+2i)^3}$.

41.2. Вычислить i^{77}, i^{98}, i^{-57}, i^n, где $n \in \mathbb{Z}$

41.3. Доказать равенства:

а) $(1+i)^{8n} = 2^{4n}$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $(1+i)^{4n} = (-1)^n 2^{2n}$, $n \in \mathbb{Z}$.

41.4. Доказать формулы сокращенного умножения:

а) $(z_1 \pm z_2)^2 = z_1^2 \pm 2z_1z_2 + z_2^2$; б) $z_1^2 - z_2^2 = (z_1 - z_2)(z_1 + z_2)$;

в) $(z_1+z_2)^n = z_1^n + C_n^1 z_1^{n-1}z_2 + C_n^2 z_1^{n-2}z_2^2 + \ldots + C_n^{n-1}z_1z_2^{n-1} + z_2^n$;

г) $z_1^n - z_2^n = (z_1 - z_2)(z_1^{n-1} + z_1^{n-2}z_2 + z_1^{n-3}z_2^2 + \ldots + z_1z_2^{n-2} + z_2^{n-1})$.

41.5. Решить системы уравнений:

а) $\begin{cases} (1+i)z_1 + (1-i)z_2 = 1+i, \\ (1-i)z_1 + (1+i)z_2 = 1+3i; \end{cases}$

б) $\begin{cases} iz_1 + (1+i)z_2 = 2+2i, \\ 2iz_1 + (3+2i)z_2 = 5+3i; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (1-i)z_1 - 3z_2 = -i, \\ 2z_1 - (3+3i)z_2 = 3-i; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2z_1 - (2+i)z_2 = -i, \\ (4-2i)z_1 - 5z_2 = -1-2i; \end{cases}$

д) $\begin{cases} z_1 + iz_2 - 2z_3 = 10, \\ z_1 - z_2 + 2iz_3 = 20, \\ iz_1 + 3iz_2 - (1+i)z_3 = 30. \end{cases}$

41.6. Найти вещественные числа x и y, удовлетворяющие уравнению:

а) $(2+i)x + (1+2i)y = 1-4i$; б) $(3+2i)x + (1+3i)y = 4-9i$.

41.7. Доказать, что:

а) комплексное число z является вещественным тогда и только тогда, когда $\overline{z} = z$;

б) комплексное число z является чисто мнимым тогда и только тогда, когда $\overline{z} = -z$.

41.8. Доказать, что:

а) произведение двух комплексных чисел является вещественным числом тогда и только тогда, когда одно из них отличается от сопряженного к другому вещественным множителем;

б) сумма и произведение двух комплексных чисел являются вещественными числами тогда и только тогда, когда данные числа или сопряжены, или оба вещественны;

в) произведение двух комплексных чисел чисто мнимо тогда и только тогда, когда произведение их вещественных частей равно произведению их мнимых частей.

41.9. Найти все комплексные числа, сопряженные

а) к своему квадрату; б) к своему кубу.

41.10. Найти все комплексные числа, квадраты которых равны:

а) -4; б) $2i$; в) $-8i$; г) $3-4i$; д) $-15+8i$; е) $-11+60i$; ж) $-8-6i$; з) $8-6i$; и) $2-3i$.

41.11. Решить уравнения:

а) $z^2-(2+i)z-1+7i=0$; б) $z^2-(3-2i)z+5-5i=0$;
в) $(2+i)z^2-(5-i)z+2-2i=0$; г) $z^2-5z+4+10i=0$.

41.12. Доказать, что определитель

$$\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & a \\ z_2 & \overline{z_2} & b \\ z_3 & \overline{z_3} & c \end{vmatrix},$$

где z_1, z_2, z_3 – комплексные числа и a, b, c – вещественные числа, является чисто мнимым числом.

41.13. Показать, что множество матриц

$$\left\{\pm\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \pm\begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}, \pm\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \pm\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

образует мультипликативную группу. Абелева ли она?

41.14. Выяснить, какие из следующих множеств являются кольцами (но не полями) и какие полями относительно операций сложения и умножения комплексных чисел:

а) комплексные числа вида $a+bi$, $a,b\in\mathbb{Z}$;

б) комплексные числа вида $a+bi$, $a,b\in\mathbb{Q}$.

41.15. Показать, что матрицы вида $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, $a,b\in\mathbb{R}$, образуют поле, изоморфное полю $\mathbb{C}$ комплексных чисел.

41.16. Доказать, что матрицы вида $\begin{pmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{pmatrix}$, $z,w\in\mathbb{C}$, образуют некоммутативное кольцо с единицей и без делителей нуля. Показать, что оно изоморфно кольцу из задачи 40.10.

41.17. Доказать, что определитель эрмитовой матрицы есть число действительное.

41.18. При каких значениях n все определители порядка n, элементы которых удовлетворяют условиям $a_{jk}\in\mathbb{R}$ при всех

$j > k$ и $a_{kj} = ia_{jk}$ при всех $j \le k$, будут: а) действительными? б) чисто мнимыми?

41.19. Показать, что при нечетном n все определители порядка n, элементы матрицы которых удовлетворяют условиям предыдущей задачи, имеют вид $a(1 \pm i)$, где $a \in \mathbb{R}$.

41.20. Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ называется *косоэрмитовой*, если $a_{ij} = -\overline{a_{ji}}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$. Доказать, что определитель косоэрмитовой матрицы нечетного порядка – число, чисто мнимое.

41.21. При каких $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ матрица

$$A = \begin{bmatrix} 2 & a+bi \\ i & c+di \end{bmatrix}$$

а) обратима; б) имеет ранг 1; в) эрмитова; г) отличается от унитарной матрицы вещественным числовым множителем?

41.22. Можно ли матрицу

$$A = \begin{bmatrix} i & 0 & 2 \\ 2i & 0 & -1 \\ 0 & -1-2i & 0 \end{bmatrix}$$

представить в виде $A = \lambda U$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, U – унитарная матрица? Возможно ли такое представление, если $\overline{\lambda} = -\lambda$?

41.23. Показать, что поле $\mathbb{C}$ не изоморфно полю $\mathbb{R}$.

§42. Комплексные числа в тригонометрической форме

Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называется число $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Обозначение: $|z|$.

Свойства модуля:

1) $|z|$ – действительное неотрицательное число, причем

$$|z| = 0 \iff z = 0;$$

2) $|z|$ совпадает с полярным радиусом точки M, изображающей это число на комплексной плоскости;

3) $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$;

4) модуль вещественного числа совпадает с абсолютным значением этого числа.

Аргументом комплексного числа $z \neq 0$ называется угол φ между положительным направлением оси абсцисс и радиус-вектором точки M, отсчитываемый от оси абсцисс в любом направлении, при этом положительным считается направление против часовой стрелки. Обозначение: $\arg z$.

Свойства аргумента:

1) $\arg z$ не определен для $z = 0$, а для $z \neq 0$ определен с точностью до слагаемого, кратного 2π;

2) $\arg z$ отличается от полярного угла точки M тем, что $\arg z$ имеет бесконечно много значений;

3) два комплексных числа z_1 и z_2 равны тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} |z_1| = |z_2| \quad \text{и, если} \quad |z_1| \neq 0, \\ \arg z_1 = \arg z_2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \tag{42.1}$$

Теорема 42.1. *Любое комплексное число $z \neq 0$ может быть записано в виде*

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{42.2}$$

где $r = |z|$, $\varphi = \arg z$.

Форма (42.2) записи комплексного числа называется *тригонометрической формой* этого числа.

Теорема 42.2. *Для любых комплексных чисел z_1 и z_2 имеют место неравенства*

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Эти неравенства называют *неравенствами треугольника на комплексной плоскости.*

Теорема 42.3. *При умножении комплексных чисел их модули умножаются, а аргументы складываются; при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются:*

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2; \tag{42.3}$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2, \quad z_2 \neq 0. \tag{42.4}$$

Замечание. Если один из сомножителей в (42.3) или z_1 в (42.4) равен нулю, то теорема относится только к модулям.

Соотношения (42.3) переносятся и на любое число сомножителей (достаточно применить метод математической индукции).

Теорема 42.4 (формула Муавра). *Если $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $n \in \mathbb{Z}$, то*

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

ЗАДАЧИ

42.1. Найти тригонометрическую форму числа:
1) 5; 2) i; 3) -2; 4) $-3i$; 5) $1+i$; 6) $1-i$; 7) $-1+i$; 8) $1+i\sqrt{3}$; 9) $1-i\sqrt{3}$; 10) $-1+i\sqrt{3}$; 11) $\sqrt{3}+i$; 12) $-\sqrt{3}+i$; 13) $-\sqrt{3}-i$; 14) $2+\sqrt{3}+i$; 15) $1-(2+\sqrt{3})i$; 16) $\cos\alpha - i\sin\alpha$; 17) $\sin\alpha + i\cos\alpha$; 18) $\dfrac{1+i\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-i\,\mathrm{tg}\,\alpha}$; 19) $\dfrac{(1+2i)^2-1}{(1+i)^2-(1-i)^2}$.

42.2. Указать геометрический смысл выражения $|z_1 - z_2|$, где z_1 и z_2 – заданные комплексные числа.

42.3. Найти геометрическое место точек, изображающих комплексные числа z, удовлетворяющие условиям:

1) $|z| = 1$; 2) $|z| \le 1$; 3) $|z| < 2$; 4) $|z - i| \le 1$;
5) $|z + 1 - i| < 1$; 6) $1 \le |z - 1| \le 3$; 7) $|z + 2i| = |z - 4i|$;
8) $|z| = |z - 4 + 2i|$; 9) $\arg z = \pi/6$; 10) $-\pi/3 < \arg z < \pi/3$;
11) $|\arg(z + i)| \le \pi/4$; 12) $\operatorname{Im} z = 1$; 13) $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{2}$;
14) $\operatorname{Im}\dfrac{1}{z} < -\dfrac{1}{2}$; 15) $|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| < 1$; 16) $\left|\dfrac{z-2}{z-1}\right| = 2$;
1 7) $|z - i| + |z + i| = 4$; 18) $|z + 2i| - |z - 2i| = 3$;
19) $|z-2|^2 + |z+2|^2 = 10$; 20) $|z|^2 + 3z + 3\overline{z} = 0$; 21) $\sin|z| > 0$;
22) $\log_{1/3}\left|\dfrac{z+i}{z-i}\right| \ge 0$;
23) $z = 1 + 2w$, где w пробегает всю окружность $|w| = 1$.

42.4. На комплексной плоскости даны точки $z_1 = 6 + 8i$, $z_2 = 4 - 3i$. Найти комплексные числа, соответствующие точкам биссектрисы угла, образованного радиус–векторами точек z_1 и z_2.

42.5. Доказать, что множество комплексных чисел z, для которых $|z| = 1$, образует мультипликативную группу.

42.6. Образует ли мультипликативную группу:

а) множество комплексных чисел с заданным модулем r,

б) множество комплексных чисел с модулем, не превосходящим фиксированного числа $r > 0$?

42.7. Решить уравнения:

а) $|z| + z = 8 + 4i$; б) $|z| - z = 8 + 12i$; в) $|z| + z^2 = 0$;
г) $z^2 = \overline{z}^3$; д) $z^2 + \overline{z} = 0$.

42.8. Найти необходимые и достаточные условия того, что:

а) модуль суммы двух комплексных чисел z_1 и z_2 равен сумме их модулей;

б) модуль суммы двух комплексных чисел z_1 и z_2 равен абсолютной величине разностей их модулей.

42.9. Доказать, что если точки на комплексной плоскости, изображающие числа $z_1, z_2, \ldots, z_n$, являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в окружность $|z| = r$, то они удовлетворяют условию $z_1 + z_2 + \ldots + z_n = 0$.

42.10. Установить необходимое и достаточное условие того, что три точки, изображающие три различных комплексных числа z_1, z_2, z_3, лежат на одной прямой.

42.11. Доказать, что корни уравнения

$$\frac{1}{z-z_1}+\frac{1}{z-z_2}+\frac{1}{z-z_3}=0,$$

где z_1, z_2, z_3 – различные комплексные числа, лежат внутри или на границе треугольника с вершинами в точках, изображающих числа z_1, z_2, z_3.

42.12. Доказать, что:

а) если $|z|<1$, то $|z^2-z+i|<3$;

б) если $|z|\le 2$, то $1\le |z^2-5|\le 9$.

42.13. Упростить $\dfrac{\cos\varphi+i\sin\varphi}{\cos\psi-i\sin\psi}$.

42.14. Вычислить $\dfrac{(1-i\sqrt{3})(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{2(1-i)(\cos\varphi-i\sin\varphi)}$.

42.15. Вычислить:

а) $(1+i)^{25}$; б) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$; в) $\left(1-\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{24}$; г) $\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$;

д) $\dfrac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}}+\dfrac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$.

42.16. При $n\in\mathbb{Z}$ вычислить выражения:

а) $(1+i)^n$; б) $\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n$; в) $\left(\dfrac{1-i\operatorname{tg}\alpha}{1+i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n$; г) $\dfrac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$.

42.17. Вычислить $(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n$, $n\in\mathbb{Z}$.

42.18. Доказать, что если $z+z^{-1}=2\cos\varphi$, то $z^n+z^{-n}=2\cos n\varphi$, где $n\in\mathbb{Z}$.

42.19. Найти смежные классы:

а) аддитивной группы $\mathbb{C}$ комплексных чисел по подгруппе чисел вида $a+bi$, $a,b\in\mathbb{Z}$;

б) мультипликативной группы комплексных чисел, отличных от нуля, по подгруппе чисел, равных по модулю единице;

в) мультипликативной группы комплексных чисел, отличных от нуля, по подгруппе положительных действительных чисел;

г) мультипликативной группы комплексных чисел, отличных от нуля, по подгруппе ненулевых действительных чисел;

д) аддитивной группы $\mathbb{C}$ комплексных чисел по подгруппе $\mathbb{R}$ действительных чисел;

е) аддитивной группы $\mathbb{C}$ комплексных чисел по подгруппе, объединяющей число 0 и все комплексные числа, аргументы которых равны $\varphi_0 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

42.20. Доказать, что фактор-группа аддитивной группы $\mathbb{R}$ по подгруппе $\mathbb{Z}$ изоморфна мультипликативной группе всех комплексных чисел с модулем, равным единице.

42.21. Доказать, что фактор-группа мультипликативной группы ненулевых комплексных чисел по своей подгруппе H изоморфна:

а) мультипликативной группе всех комплексных чисел с модулем, равным единице, если H – мультипликативная группа ненулевых действительных чисел;

б) мультипликативной группе $\mathbb{R}_+$ всех положительных действительных чисел, если H – мультипликативная группа всех комплексных чисел с модулем, равным единице.

42.21.1. Доказать, что группа всех поворотов плоскости V_2 относительно операции суперпозиции отображений изоморфна мультипликативной группе комплексных чисел с модулем, равным единице.

42.21.2. Показать, что мультипликативная группа ненулевых комплексных чисел не изоморфна мультипликативной группе невырожденных диагональных матриц второго порядка.

42.22. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \end{vmatrix}$, где $\varepsilon = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \varepsilon \\ 1 & 1 & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \end{vmatrix}$, где $\varepsilon = \cos\dfrac{2\pi}{3} + i\sin\dfrac{2\pi}{3}$;

в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{vmatrix}$, где $\varepsilon = \cos\dfrac{4\pi}{3} + i\sin\dfrac{4\pi}{3}$.

42.23. Выразить через $\cos x$ и $\sin x$:

а) $\cos 5x$; б) $\cos 8x$; в) $\sin 6x$; г) $\sin 7x$.

42.24. Выразить $\operatorname{tg} 6\varphi$ через $\operatorname{tg}\varphi$.

42.25. Составить формулы, выражающие $\cos nx$ и $\sin nx$ через $\cos x$ и $\sin x$.

42.26. Представить в виде многочлена первой степени от тригонометрических функций углов, кратных x:

а) $\sin^3 x$; б) $\sin^4 x$; в) $\cos^5 x$; г) $\cos^6 x$.

42.27. Найти суммы:

а) $1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots$; б) $C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots$.

42.28. Доказать, что:

а) $1 + C_n^4 + C_n^8 + \ldots = \dfrac{1}{2}\left(2^{n-1} + 2^{n/2}\cos\dfrac{n\pi}{4}\right)$;

б) $C_n^1 + C_n^5 + C_n^9 + \ldots = \dfrac{1}{2}\left(2^{n-1} + 2^{n/2}\sin\dfrac{n\pi}{4}\right)$;

в) $C_n^2 + C_n^6 + C_n^{10} + \ldots = \dfrac{1}{2}\left(2^{n-1} - 2^{n/2}\cos\dfrac{n\pi}{4}\right)$;

г) $C_n^3 + C_n^7 + C_n^{11} + \ldots = \dfrac{1}{2}\left(2^{n-1} - 2^{n/2}\sin\dfrac{n\pi}{4}\right)$.

42.29. Найти сумму

$$C_n^1 - \frac{1}{3}C_n^3 + \frac{1}{9}C_n^5 - \frac{1}{27}C_n^7 + \ldots.$$

42.30. Доказать, что:

а) $1 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots = \dfrac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\dfrac{n\pi}{3}\right)$;

б) $C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \ldots = \dfrac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\dfrac{(n-2)\pi}{3}\right)$;

в) $C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \ldots = \dfrac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\dfrac{(n-4)\pi}{3}\right)$.

42.31. Вычислить суммы:

а) $1 + a\cos\varphi + a^2\cos 2\varphi + \ldots + a^k\cos k\varphi$;

б) $\sin\varphi + a\sin(\varphi + h) + a^2\sin(\varphi + 2h) + \ldots + a^k\sin(\varphi + kh)$.

42.32. Показать, что при $x \neq 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$:

а) $$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin\dfrac{n+1}{2}x \cdot \sin\dfrac{nx}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}};$$

б) $$\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \frac{\cos\dfrac{n+1}{2}x \cdot \sin\dfrac{nx}{2}}{\sin\dfrac{x}{2}}.$$

42.33. Найти
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}\cos x+\frac{1}{4}\cos 2x+\ldots+\frac{1}{2^n}\cos nx\right).$$

42.34. Доказать, что если $n \in \mathbb{N}$, а θ – угол, удовлетворяющий условию $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2n}$, то
$$\cos\frac{\theta}{2}+\cos\frac{3\theta}{2}+\ldots+\cos\frac{2n-1}{2}\theta=n\sin n\theta.$$

42.35. Показать, что

а) $\cos\frac{\pi}{11}+\cos\frac{3\pi}{11}+\cos\frac{5\pi}{11}+\cos\frac{7\pi}{11}+\cos\frac{9\pi}{11}=\frac{1}{2}$;

б) $\cos\frac{2\pi}{11}+\cos\frac{4\pi}{11}+\cos\frac{6\pi}{11}+\cos\frac{8\pi}{11}+\cos\frac{10\pi}{11}=-\frac{1}{2}$;

в) $\cos\frac{\pi}{13}+\cos\frac{3\pi}{13}+\cos\frac{5\pi}{13}+\cos\frac{7\pi}{13}+\cos\frac{9\pi}{13}+\cos\frac{11\pi}{13}=\frac{1}{2}$.

42.36. Найти суммы:

а) $\cos x+C_n^1\cos 2x+\ldots+C_n^n\cos(n+1)x$;

б) $\sin x+C_n^1\sin 2x+\ldots+C_n^n\sin(n+1)x$.

42.37. Найти суммы:

а) $\cos x-C_n^1\cos 2x+C_n^2\cos 3x-\ldots+(-1)^nC_n^n\cos(n+1)x$;

б) $\sin x-C_n^1\sin 2x+C_n^2\sin 3x-\ldots+(-1)^nC_n^n\sin(n+1)x$.

§43. Корни из комплексного числа

Пусть $n \in \mathbb{N}$. *Корнем n-й степени из комплексного числа z* называется число $\alpha \in \mathbb{C}$ такое, что $\alpha^n = z$.

Для $z = 0$ существует единственный корень n-й степени, равный нулю.

Теорема 43.1. *Для ненулевого числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ существует ровно n различных корней $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ n-й степени:*
$$\alpha_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\ k=\overline{0,n-1}.$$

Обозначение: $\sqrt[n]{z}=\{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{n-1}\}$.

Теорема 43.2. *Все корни n-й степени из единицы образуют мультипликативную группу.*

На комплексной плоскости все корни n-й степени из ненулевого числа z расположены на окружности радиуса $\rho=\sqrt[n]{|z|}$ и делят эту окружность на n равных частей.

В частности, все корни n-й степени из единицы
$$\varepsilon_k=\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n},\quad k=\overline{0,n-1},$$

расположены на единичной окружности и являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в эту окружность (одна из вершин которого – точка $A_0(1,0)$). При этом действительных корней может быть либо два, если n четно (ε_0 и $\varepsilon_{n/2}$), либо один, если n нечетно (ε_0). В любом случае недействительных корней четное число, они расположены симметрично относительно действительной оси, т.е. попарно сопряжены.

Теорема 43.3. *Все корни n-й степени из комплексного числа $z \neq 0$ получаются умножением одного из этих корней на все корни n-й степени из единицы.*

Таким образом, *все корни n-й степени из числа z образуют смежный класс мультипликативной группы ненулевых комплексных чисел по подгруппе корней n-й степени из единицы, порожденный одним из корней n-й степени из z.*

ЗАДАЧИ

43.1. Записать в тригонометрической форме элементы множеств:

а) $\sqrt[6]{i}$; б) $\sqrt[10]{512(1-i\sqrt{3})}$; в) $\sqrt[8]{8\sqrt{2}(1-i)}$; г) $\sqrt[7]{-i}$;
д) $\sqrt[5]{-1-i}$.

43.2. Записать в алгебраической форме элементы множеств:
1) $\sqrt[3]{1}$; 2) $\sqrt[4]{1}$; 3) $\sqrt[6]{1}$; 4) $\sqrt[3]{i}$; 5) $\sqrt[4]{-4}$; 6) $\sqrt[6]{64}$;
7) $\sqrt[8]{16}$; 8) $\sqrt[6]{-27}$; 9) $\sqrt[4]{8\sqrt{3}i-8}$; 10) $\sqrt[4]{-72(1-i\sqrt{3})}$;
11) $\sqrt[3]{1+i}$; 12) $\sqrt[3]{2-2i}$; 13) $\sqrt[3]{\dfrac{8+24i}{3-i}}$; 14) $\sqrt[3]{\dfrac{27-54i}{2+i}}$;
15) $\sqrt[4]{-\dfrac{18}{1+i\sqrt{3}}}$; 16) $\sqrt[4]{-\dfrac{32}{9(1-i\sqrt{3})}}$.

43.3. Для каких $z \in \mathbb{C}$ и $n \in \mathbb{N}$ множество корней n-й степени из z содержит хотя бы одно вещественное число?

43.4. Пусть z и w – комплексные числа. Доказать следующие равенства множеств:

а) $\sqrt[n]{z^n w} = z\sqrt[n]{w}$; б) $\sqrt[n]{-z^n w} = -z\sqrt[n]{w}$ (n нечетно);
в) $\sqrt[n]{zw} = u\sqrt[n]{w}$, где u – одно из значений $\sqrt[n]{z}$.

43.5. Доказать, что объединение множеств $\sqrt[n]{z}$ и $\sqrt[n]{-z}$ есть множество $\sqrt[2n]{z^2}$.

43.6. Верно ли равенство $\sqrt[nm]{z^m} = \sqrt[n]{z}$ ($m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$)?

43.7. Доказать, что множество корней степени n из единицы является циклической мультипликативной группой порядка n.

43.8. Доказать, что множество всех корней всевозможных степеней $n = 2, 3, \ldots$ из единицы образует бесконечную мультипликативную группу, в которой каждый элемент имеет конечный порядок.

43.9. Доказать, что множество корней n-й степени из комплексного числа z образует мультипликативную группу тогда и только тогда, когда $z = 1$.

43.10. Найти смежные классы:

а) мультипликативной группы ненулевых комплексных чисел по подгруппе всех корней n-й степени из единицы;

б) мультипликативной группы комплексных чисел, по модулю равных 1, по подгруппе всех корней n-й степени из единицы.

43.11. Доказать, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существует корень n-й степени из единицы, который не является корнем из единицы меньшей степени, чем n. Такой корень называется *первообразным корнем* n-й степени из единицы.

43.12. Доказать, что корень ε n-й степени из единицы является первообразным корнем тогда и только тогда, когда все его степени ε^k, $k = \overline{0, n-1}$, различны.

43.13. Доказать, что если ε – первообразный корень n-й степени из единицы, то ε^k тогда и только тогда будет первообразным корнем n-й степени из единицы, когда k и n взаимно просты.

43.14. Найти число первообразных корней из единицы степени: а) 2; б) 3; в) 12; г) 16; д) 24; е) p^k, где p – простое число.

43.15. Вычислить:

а) сумму всех корней степени n из единицы;

б) сумму s-х степеней всех корней степени n из единицы $(s \in \mathbb{Z})$;

в) произведение всех корней степени n из единицы.

43.16. Вычислить:

а) $1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + \ldots + n\varepsilon^{n-1}$,

б) $1 + 4\varepsilon + 9\varepsilon^2 + \ldots + n^2\varepsilon^{n-1}$,

где ε – корень n-й степени из единицы.

43.17. Пусть ε – первообразный корень степени $2n$ из единицы. Вычислить сумму $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^{n-1}$.

43.18. Найти суммы:

а) $\cos\dfrac{2\pi}{n} + 2\cos\dfrac{4\pi}{n} + \ldots + (n-1)\cos\dfrac{2(n-1)\pi}{n}$;

б) $\sin\dfrac{2\pi}{n} + 2\sin\dfrac{4\pi}{n} + \ldots + (n-1)\sin\dfrac{2(n-1)\pi}{n}$.

13—4271

43.19. Числа $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ $(n \geq 3)$ на комплексной плоскости являются вершинами правильного n-угольника, вписанного в некоторую окружность единичного радиуса. Найти:

а) $z_0 + z_1 + z_2 + \ldots + z_{n-1}$;

б) $z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_{n-1}^2$;

в) $|z_0|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 + \ldots + |z_{n-1}|^2$.

Вычислить следующие определители трехдиагональных матриц.

43.20. $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 2 \end{vmatrix}$. **43.21.** $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -5 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -5 & 2 \end{vmatrix}$.

43.22. $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ a & 0 & a & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a & 0 \end{vmatrix}$. **43.23.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

43.24. $\begin{vmatrix} 2i & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -1 & 2i & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2i & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 2i \end{vmatrix}$. **43.25.** $\begin{vmatrix} 2 & i & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ -i & 2 & i & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -i & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & i \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -i & 2 \end{vmatrix}$.

43.26. $\begin{vmatrix} i+1 & i & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & i+1 & i & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i+1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & i+1 & i \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & i+1 \end{vmatrix}$.

43.27. Доказать, что значение *циркулянта* определяется равенством

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \end{vmatrix} = f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\dots f(\varepsilon_n),$$

где $f(x) = a_1 + a_2x + a_3x^2 + \ldots + a_nx^{n-1}$ и $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ – все значения корня n-й степени из единицы.

43.28. Доказать, что в обозначениях предыдущей задачи

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \\ a_3 & a_4 & a_5 & \dots & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\dots f(\varepsilon_n).$$

43.29. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \dots & \alpha^{n-1} \\ \alpha^{n-1} & 1 & \alpha & \dots & \alpha^{n-2} \\ \alpha^{n-2} & \alpha^{n-1} & 1 & \dots & \alpha^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha & \alpha^2 & \alpha^3 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

43.30. Вычислить косой циркулянт (или кососциклический определитель)

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ -a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ -a_{n-1} & -a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_2 & -a_3 & -a_4 & \dots & a_1 \end{vmatrix}.$$

43.31. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ za_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ za_{n-1} & za_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ za_2 & za_3 & za_4 & \dots & a_1 \end{vmatrix}, \quad \text{где число } z \in \mathbb{C} \text{ произвольно.}$$

43.32. Пусть $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ и матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 & \varepsilon^3 & \ldots & \varepsilon^{n-1} \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon^4 & \varepsilon^6 & \ldots & \varepsilon^{2(n-1)} \\ 1 & \varepsilon^3 & \varepsilon^6 & \varepsilon^9 & \ldots & \varepsilon^{3(n-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{2(n-1)} & \varepsilon^{3(n-1)} & \ldots & \varepsilon^{(n-1)^2} \end{bmatrix}$$

представляет собой матрицу определителя Вандермонда чисел $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{n-1}$.

1) Вычисляя матрицу A^2, показать, что $|\det A| = n^{n/2}$.

2) Вычисляя $\det A$ как определитель Вандермонда, показать, что

$$\det A = i^{(n-1)(3n-2)/2} \prod_{0\leq j<k\leq n-1} 2\sin\frac{(k-j)\pi}{n}.$$

3) Вывести формулу

$$\det A = i^{(n-1)(3n-2)/2} n^{n/2}.$$

43.32.1. Вычислить матрицу A^{-1}, обратную к матрице из предыдущей задачи.

43.33. Пусть ε – первообразный корень n-й степени из единицы и элементы матрицы $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ заданы соотношениями $a_{ij} = \varepsilon^{ij}$. Найти обратную матрицу A^{-1}.

Ответы и указания

§1

1.1. а) $AB = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, $BA = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 9 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$.

1.2. а) $\begin{bmatrix} 52 \\ -84 \\ 32 \end{bmatrix}$; б) $[\,13 \;\; 98 \;\; -84 \;\; -21\,]$; в) $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}^T$; д) $O_{4\times4}$.

1.3. $O_{4\times2}$. Указание. Найти BC.

1.4. $[\,0 \;\; 0 \;\; 0\,]^T$. Указание. Найти BC.

1.5. $O_{2\times3}$. Указание. Найти BC.

1.6. $O_{4\times4}$. Указание. Найти BA.

1.7. $\begin{bmatrix} 7 & 14 & -7 & 21 \\ -5 & -10 & 5 & -15 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 6 \end{bmatrix}$. Указание. Найти BC.

1.8. $\begin{bmatrix} 42 & -64 \\ 22 & 34 \\ -18 & 242 \\ 104 & -48 \end{bmatrix}$. Указание. Найти BC.

1.9. $O_{3\times3}$. Указание. Найти BC, а затем AD.

1.10. $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 16 \end{bmatrix}$. **1.11.** $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. **1.13.** a_{ij}.

1.14. а) Матрица, у которой все столбцы нулевые, кроме j-го, на месте которого стоит i-й столбец матрицы A; б) матрица, у которой все строки нулевые, кроме i-й, на месте которой стоит j-я строка матрицы A.

1.15. а) $\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 5 & -4 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

1.18. а) $\begin{bmatrix} 64 & -64 \\ 64 & 64 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

1.19. а) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ при n четном, $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ при n нечетном;

б) $\begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} 1 & n\lambda \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

д) $\begin{bmatrix} x_n & x_{n-1} \\ x_{n-1} & x_{n-2} \end{bmatrix}$, где x_k – числа Фибоначчи (см. задачу 1.11);

е) $\begin{bmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{bmatrix}$.

1.20. а) $\begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & \dots & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & 3 & \dots & \frac{(n-1)n}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$;

в) $\begin{bmatrix} \lambda_1^m\lambda_n^m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^m\lambda_{n-1}^m & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^m\lambda_1^m \end{bmatrix}$ при $k = 2m$ и

$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \lambda_1^{m+1}\lambda_n^m \\ 0 & \dots & \lambda_2^{m+1}\lambda_{n-1}^m & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_n^{m+1}\lambda_1^m & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$ при $k = 2m+1$;

г) искомая степень – матрица $B = (b_{ij})$ – при $k < n$ имеет вид: $b_{i,i+k} = 1$, $i = \overline{1, n-k}$, прочие элементы b_{ij} равны нулю; при $k \geq n$ матрица B нулевая;

д) $\begin{bmatrix} 1 & C_{n-1}^1 & C_{n-1}^2 & \dots & C_{n-1}^{n-1} \\ 0 & 1 & C_{n-1}^1 & \dots & C_{n-1}^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$;

е) искомая степень – матрица $B = (b_{ij})$ – при $k < n$ имеет вид: $b_{i,i+k} = 1$, $i = \overline{1, n-k}$, $b_{i,i+k-n} = 1$, $i = \overline{n-k+1, n}$, прочие элементы b_{ij} равны нулю; при $k = n$ матрица B единичная; если же $k > n$, то матрица B такая же, как m-я степень исходной матрицы, где $k = mp + n$, $p \in \mathbb{N}$.

1.21. Указание. Применить индукцию по k.

1.22. а) $O_{3\times 3}$; б) $\begin{bmatrix} 0 & 6 & 3 \\ -6 & 0 & -5 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$.

1.25. а) $A^n = A$; б) $A^n = 5^n \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$; в) $A^n = (2\alpha - 1)^{n-1}A$;

г) $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (2^n - 1)\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$;

д) $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (6^n - 1)\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$;

е) $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{(2\alpha)^n - 1}{2\alpha - 1}\begin{bmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha - 1 & \alpha - 1 \end{bmatrix}$;

ж) $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + ((-4)^n - 1)\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Указание. В пунктах г)-е) представить каждую из матриц в виде $I + B$, а в пункте ж) – в виде $I - B$, затем воспользоваться задачей 1.24б.

1.26. а) $\begin{bmatrix} -27 & -28 \\ 56 & 57 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; г) $I + (2^{29} - 2)A$.

Указание. Найти n-ю степень матрицы A.

1.27. а) $\begin{bmatrix} 3a+b & 3a \\ 2a & b \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$;

д) матрицы $B = (b_{ij})$, у которых $b_{ii} = b_{jj}$, а остальные элементы j-й строки и i-го столбца нулевые;

е) матрицы, у которых суммы элементов каждой строки и каждого столбца одинаковы.

1.29. а) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

1.30. Указание. Воспользоваться задачей 1.28.

1.31. Указание. Применить результат предыдущей задачи.

1.32. Указание. Воспользоваться задачами 1.27д и 1.31.

1.33. Нет. **1.36.1.** Можно, только если $m = n = 1$.

1.36.2. Вообще говоря, нет.

1.37. Указание. Воспользоваться свойствами следа из задачи 1.35.

1.38. Указание. Воспользоваться предыдущей задачей.

1.40. Указание. Рассмотреть единичные вектор-столбцы ξ.

1.41. Указание. Рассмотреть единичные вектор-столбцы ξ, η.

1.42. Если $j = k$, $i \neq l$, то $[E_{ij}, E_{kl}] = E_{il}$; если $j \neq k$, $i = l$, то $[E_{ij}, E_{kl}] = -E_{kj}$; если $j = k \neq i = l$, то $[E_{ij}, E_{kl}] = E_{ii} - E_{jj}$. Указание. Показать, что $E_{ij}E_{kl} = E_{il}$ при $j = k$ и $E_{ij}E_{kl} = O$ при $j \neq k$.

1.43. Указание. Воспользоваться задачей 1.42.

1.46. Указание. В силу задачи 1.37 $\operatorname{tr}[A, B] = 0$; найти квадрат матрицы с нулевым следом.

1.47. Указание. Воспользоваться задачей 1.43 и свойствами коммутатора из задачи 1.44.

1.48. Указание. Рассмотреть произвольную диагональную матрицу D с различными диагональными элементами и, положив $X = (x_{ij})$, найти $[X, D]$.

§2

2.2. $n(n+1)(n+2)/6$. **2.3.** $\sum_{i=1}^{n} a_{ii}^{k}$.

2.4. Указание. Пусть, например, матрица A верхняя треугольная порядка n. Используя правило умножения треугольной матрицы $B = (b_{ij})$ на себя, найти последовательно все элементы главной диагонали, затем все элементы $b_{i,i+k}$, $i = \overline{1, n-k}$, для каждого $k = 1, 2, \ldots$.

2.6. $2(m_1 + m_2) + 1$.

2.8. а) $\left[\begin{array}{c|cc} 6 & 2 & 4 \\ 9 & 9 & 6 \\ \hline 8 & 9 & 1 \end{array}\right]$; б) $\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$; в) $\left[\begin{array}{cc|c} 4 & 5 & 3 \\ 6 & 4 & 1 \\ \hline -5 & 6 & 1 \end{array}\right]$; г) $\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ \hline 4 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 4 & 2 \end{array}\right]$.

2.9. а) Нет, не является. **2.13.** Нет, не верно.

2.14. Указание. Рассмотреть в качестве x сначала единичные столбцы, а затем суммы каких-либо двух различных единичных столбцов.

2.18. г) Произведение кососимметрических матриц A и B является кососимметрической матрицей тогда и только тогда, когда $AB = -BA$.

2.20. б) Да, единственно.

2.21. а) $\begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$;

в) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

2.23. Указание. Воспользоваться задачей 1.48.

2.24. Указание. Воспользоваться задачей 1.36.

2.25. Указание. Учитывая результат задачи 2.22а, рассмотреть величину $\operatorname{tr}(AB - BA)^2$ и воспользоваться свойствами следа из задачи 1.35. Для обоснования второй части утверждения задачи учесть 2.24а.

2.26. Да, верно. Указание. Воспользоваться задачей 2.24.

2.27. а) $\pm I$, $\pm\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$; б) $\pm I$, $\pm\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\pm\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ -\sin\alpha & -\cos\alpha \end{bmatrix}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

2.31. Указание. Воспользоваться задачей 2.5.

2.32. Указание. Пользуясь правилом умножения блочных матриц (задача 2.7), показать, что данная блочная матрица ортогональна тогда и только тогда, когда $A^T = A$ и $A^2 = O$, и воспользоваться задачей 2.26.

2.33. а) Нет. б) Да, $k = 2$. в) Да, $k = 3$. г) Нет. д) Да, $k = 2$. е) Да, $k = 2$. ж) Нет. Указание. В случаях а,г) доказать, что данная матрица A удовлетворяет соотношению $A^2 = \alpha A$, где $\alpha \neq 0$, а в случае ж) показать, что для любой степени матрицы ее элемент в позиции $(4, 4)$ равен 1.

2.34. Нет, не верно. **2.35.** $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$, где $a^2 = -bc$.

2.36. Указание. Найти диагональные элементы степеней треугольной матрицы.

2.37. Указание. б) Воспользоваться предыдущей задачей.

2.38. Указание. Показать, что коммутатор треугольных матриц является строго треугольной матрицей.

2.40. Указание. Пользуясь правилом умножения блочных матриц (задача 2.7), найти степени данной матрицы.

2.41. $\pm I$, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$, где $a^2 = 1 - bc$. **2.42.** Нет, не верно.

2.43. Указание. Умножить обе части равенства на $I - A$.

2.44. См. указание к задаче 2.40.

2.46. а) $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5/2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2.51. Указание. Воспользоваться задачей 1.39.

2.53. а) $A \otimes B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -4 & 6 \\ -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$, $B \otimes A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 0 \\ -4 & 6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$;

б) $A \otimes B = B \otimes A = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$;

в) $A \otimes B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B \otimes A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

2.56. Нет. **2.57.** Нет. **2.58.** Нет.

§3

3.1. а) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -6 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

в) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; д) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

3.2. Матрица T получается из единичной матрицы I таким же элементарным преобразованием. **3.3.** См. предыдущую задачу.

3.4. Указание. Использовать теорему 3.3.

3.5. Матрица B_1 получена из B таким же преобразованием столбцов.

3.6. а) Переставить первую и вторую строки; б) разделить первую строку на 2; в) из первой строки вычесть удвоенную вторую.

3.8.1. Нельзя. Указание. См. задачу 1.36.2.

3.11. Указание. Элементарными преобразованиями первого типа привести матрицу перестановки к единичной матрице.

3.12. Указание. Воспользоваться задачей 2.30.

3.13. Указание. См. указание к предыдущей задаче.

3.15. Указание. Пусть A – данная матрица перестановки n-го порядка. Так как всевозможные степени A^k также являются матрицами перестановок (задача 3.10), а общее количество матриц перестановок порядка n конечно, то найдутся такие $p, q \in \mathbb{N}$, $p > q$, что $A^p = A^q$.

3.18. Соответствующему элементарному преобразованию столбцов матрицы A и такому же преобразованию ее строк.

3.20. а) $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$;

г) $\begin{bmatrix} 5 & 6 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

3.21. $i = k$, $j = l$ или $(i-k)(j-l) \neq 0$.

3.22. $i = k$, $j = l$ или $(j-k)(i-l) \neq 0$.

§4

4.2. а) 4; б) 10; в) 14; г) 10; д) $\dfrac{n(n-1)}{2}$; е) $\dfrac{n(n+1)}{2}$; ж) $(n-k+1)(k-1)$; з) $\dfrac{(k-1)(k-2)}{2} + (n-k+1)(k-1)$.

4.3. а) $i = 3$, $k = 8$; б) $i = 5$, $k = 9$.

4.4. Если $\alpha_1 < \alpha_n$, то $p + 2(n-s) - 3$; если $\alpha_1 > \alpha_n$, то $p + 2(n-s) - 5$.

4.5. $\dfrac{n(n-1)}{2} - p$.

4.6. В перестановке $n, n-1, \ldots, 2, 1$, где число инверсий равно $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

4.7. $k - 1$. **4.8.** $n - k$.

4.8.1. а) $k - 1$; б) $n - 1 - k$. **4.8.2.** $n!/2$.

4.9. а) $\dfrac{3n(n-1)}{2}$; перестановка нечетна при $n = 4k-2$ и $n = 4k-1$, $k \in \mathbb{N}$;

б) $\dfrac{n(3n+1)}{2}$; перестановка нечетна при $n = 4k-2$ и $n = 4k-1$, $k \in \mathbb{N}$;

в) $3n(n-1)$; перестановка четна при любом n;

г) $n(3n-2)$; четность перестановки совпадает с четностью n;

д) $n(5n+1)$; перестановка четна при любом n.

4.10. $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

4.11. Для $n = 4k$, $n = 4k - 3$, $k \in \mathbb{N}$, одинакова, а для остальных n противоположна.

4.13. 1) 8; 2) 6; 3) 6.

§5

5.1. -1. **5.2.** 1. **5.3.** -3000. **5.4.** 0. **5.5.** -1. **5.6.** 0.
5.7. $-2b^3$. **5.8.** $4ab$. **5.9.** 1. **5.10.** $\sin(\beta - \alpha)$.
5.12. -3. **5.13.** $-c(a^2 + b^2)$. **5.14.** $6a^2 + 2$.
5.15. $3abc - a^3 - b^3 - c^3$. **5.16.** $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$. **5.17.** 0.

5.19. 4. Указание. Показать, что все члены определителя не могут быть положительны и потому искомое наибольшее значение меньше 6. В силу предыдущей задачи оно не превосходит 4. Наконец, рассмотреть определитель матрицы $A = (a_{ij})$ с элементами $a_{ii} = -1$ и $a_{ij} = 1$, $i \neq j$.

5.20. 2. Указание. Показать, что все три положительных члена, входящие в определитель, не могут равняться 1, и учесть, что определитель матрицы $A = (a_{ij})$ с элементами $a_{ij} = |\operatorname{sgn}(i - j)|$ равен 2.

5.33. Указание. К третьему столбцу определителя, стоящего в левой части, прибавить второй, умноженный на $a + b + c$, и вычесть первый, умноженный на $ab + bc + ca$.

5.39. а) Входит со знаком минус; б,д,е) не входит; в,г,ж) входит со знаком плюс; з,и) входит со знаком $(-1)^{n-1}$; к) входит со знаком $(-1)^n$.

5.40. а) Со знаком плюс; б) со знаком $(-1)^{n(n-1)/2}$.

5.41. $a_{12}a_{23}a_{31}a_{44}$, $a_{13}a_{24}a_{31}a_{42}$, $a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}$. **5.42.** $i = 5$, $j = 2$.

5.43. $i = 2$, $j = 6$, $k = 5$. **5.44.** $i = 7$, $j = 5$.

5.45. $j = 1$, $k = 3$, $i = l = 5$ или $l = 1$, $i = 3$, $k = j = 5$.

5.46. а) $a_{61}a_{72}$; б) $a_{62}a_{71}$.

5.47. $(-1)^{\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)}$. Указание. Применить теоремы 4.2, 4.4 из §4.

5.48. $abcd$. **5.49.** $abcd$. **5.50.** $-abcd$. **5.51.** 0. **5.52.** 0.

5.53. 0. **5.54.** $a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$. **5.55.** 0.

5.56. $(-1)^{n(n-1)/2}a_{1n}a_{2,n-1}\ldots a_{n1}$. **5.57.** $(-1)^{n+1}a_1a_2\ldots a_n$.

5.58. $(-1)^{(n-1)(n-2)/2}a_1a_2\ldots a_n$. **5.59.** а) 1; б) 1.

5.62. 3 и -2. **5.63.** -5 и 1.

5.64. а) $a_{n-k+1,n-i+1}$; б) $a_{n-i+1,n-k+1}$.

5.65. Если n четно, то число элементов на четных и нечетных местах одинаково и равно $n^2/2$. Если n – нечетно, то число элементов на четных местах равно $(n^2 + 1)/2$, а на нечетных – равно $(n^2 - 1)/2$.

5.66. Указание. Рассмотреть сумму индексов всех элементов, входящих в общий член определителя.

5.67. Определитель умножится на $(-1)^{n-1}$.

5.68. Определитель умножится на $(-1)^{n(n-1)/2}$.

5.69. Определитель не изменится.

5.70. Определитель не изменится.

5.71. Определитель не изменится. Указание. Рассмотреть общий член определителя.

5.72. Указание. Воспользоваться задачей 5.66.

5.74. Определитель обратится в нуль.

5.75. Определитель обратится в нуль, если он четного порядка, и удвоится, если нечетного. Указание. Разложить на сумму определителей по каждому столбцу.

5.76. Определитель умножится на $(-1)^{n(n-1)/2}$. **5.77.** 0.

5.78. 0. Указание. Переставить 1-ю и 2-ю строки в каждой матрице перестановок и проанализировать, как изменится искомая сумма.

5.79. 0.

5.80. Указание. Воспользоваться задачей 2.51 и показать, что все строчные суммы матрицы $[A, B]$ равны нулю.

5.81. Указание. Применить свойство 8 определителя. **5.82.** 0.

§6

6.1. Указание. Применить индукцию. В д) и е) воспользоваться формулой бинома Ньютона для $(1 \pm 1)^n$.

6.2. а) C_n^k; б) $\sum_{j=1}^k C_n^j C_k^j = C_{n+k}^k - 1$; в) $(C_n^k)^2$. **6.4.** C_n^k.

6.7. Указание. Разложить произвольный минор порядка выше k по любым его k строкам.

6.8. 200. **6.9.** -84.

6.10. -11. Указание. Разложить по первым двум столбцам.

6.11. -2. **6.12.** -2. **6.13.** 195. **6.14.** -16. **6.15.** 90.

6.16. 8. **6.17.** 1000. **6.18.** 3. **6.19.** -15. **6.20.** -10.

6.21. 2025.

6.22. $(x_1 - x_2)\sin(\gamma - \beta) + (y_2 - y_1)\sin(\alpha - \gamma) + (z_2 - z_1)\sin(\beta - \alpha)$.

6.23. $-(ayz + bxz + cxy)$. **6.24.** $-(aa_1 + bb_1 + cc_1)$.

6.25. $abc - x(bc + ca + ab)$. **6.26.** $(b^2 - c^2)^2$.

6.27. Указание. Разложить определитель по первым трем строкам.

6.28. 4. **6.29.** 25. **6.30.** -2. **6.31.** -2. **6.32.** -84.

6.33. 98. **6.34.** 43. **6.35.** -36. **6.36.** 8.

6.37. -1. **6.38.** $(-1)^n(nx + 1)x^n$. **6.39.** а,б) Нет. в,г) Да.

6.43. Определитель умножится на $(2-k)2^{k-1}$. Указание. Построить матрицу, умножение данной матрицы на которую слева вызывает требуемое преобразование.

6.44. а) $2^n|A|^2$; б) $(-2)^n|A|^2$; в) $|A|^2$.

§7

7.1. 30. **7.2.** -2. **7.3.** -11. **7.4.** 9. **7.5.** -18.

7.6. 90. **7.7.** -4. **7.8.** 0. **7.9.** 1. **7.10.** 5.

7.11. -10. **7.12.** -5. **7.13.** -1. **7.14.** 100. **7.15.** 0.

7.16. -24. **7.17.** 0. **7.18.** 360. **7.19.** 1875.

7.20. $4n+1$. Указание. Все строки, начиная со 2-й, прибавить к первой.

7.21. $(n-1)(-1)^{n-1}$. Указание. См. задачу 7.20.

7.22. $(2n-1)(n-1)^{n-1}$. **7.23.** $(-1)^{n(n+1)/2}(n+1)^{n-1}$.

7.24. $(x + (n-1)a)(x-a)^{n-1}$. **7.25.** $x^n + (-1)^{n+1}y^n$.

7.26. $(n+1)!$. **7.27.** $x_1(x_2 - a_{12})(x_3 - a_{23})\dots(x_n - a_{n-1,n})$.

7.28. $a_0(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$. **7.29.** $2(n-2)!(-1)^{(n^2-n+2)/2}$.

7.30. $(-1)^{n-1}n!$. **7.31.** $(a_1-b_1)(a_2-b_2)\dots(a_n-b_n)$.

7.32. $b_1b_2\dots b_n$. **7.33.** $(-1)^{n-1}(n-1)x^{n-2}$.

7.34. $(-1)^{n(n-1)/2}b_1b_2\dots b_n$. **7.35.** $(a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n)x^n$.

7.36. $(-1)^{n-1}x^{n-2}$. **7.37.** $(-1)^{n(n-1)/2}n$. **7.38.** 1.

7.39. $\left(na + \dfrac{n(n-1)}{2}\right)a^{n-1}$. Указание. К первому столбцу прибавить все остальные.

7.40. $(-1)^n(n+1)a_1a_2\ldots a_n$. Указание. К последнему столбцу прибавить все остальные.

7.41. 1. **7.42.** $(-1)^{n-1}n$.

7.43. 0 при $n \geq 3$, $-pq$ при $n = 2$, и $p+q+s$ при $n = 1$.

7.44. 0 при $n \geq 3$, -9 при $n = 2$, и 2 при $n = 1$.

7.45. 0, если n нечетно, и 1, если n четно. Указание. При нечетном n воспользоваться утверждением примера 5.5 §5. При четном n из каждой строки, начиная с первой и заканчивая предпоследней, вычесть последующую, а затем из каждого столбца, начиная со 2-го, вычесть предыдущий.

7.46. $(-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$. Указание. Из каждого столбца, начиная с 1-ого, вычесть последующий.

7.47. $(1-a^2)^{n-1}$. Указание. Из каждой строки, начиная со 2-й, вычесть предыдущую, умноженную на a.

7.48. 127. **7.49.** 127. **7.50.** $(1+(-1)^n)/2$.

7.51. 0, если $n = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$, и $(-1)^k$, если $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$. Указание. Проанализировать рекуррентное соотношение.

7.52. $(4^{n+1}-1)/3$. **7.53.** $4^{n+1}-3^{n+1}$. **7.54.** $5^n - 2(-4)^n$.

7.55. $6^n(1+n)$. **7.56.** $n+1$. **7.57.** $3^n(1-2n)$.

7.58. $3^n - 2^{n-1}$. **7.59.** 64. **7.60.** $a^6 - 5a^4 + 6a^2 - 1$.

7.61. $7 \cdot 5^{n-2} - 2^{n-1}$. Указание. Предварительно разложить определитель по последней строке.

7.62. $1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n}$.

7.63. $(2^{k+1}-1)(3^{l+1}-2^{l+1}) - 4(2^k-1)(3^l-2^l)$. Указание. Разложить по первым k строкам и применить метод рекуррентных соотношений.

7.64. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$.

7.65. Указание. Применить индукцию по n.

7.67. $a_0a_1a_2\ldots a_n\left(\dfrac{1}{a_0} + \dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}\right)$.

7.68. $1 - b_1 + b_1b_2 - b_1b_2b_3 + \ldots + (-1)^n b_1b_2\ldots b_n$.

7.69. $(x^2-1^2)(x^2-3^2)\ldots(x^2-(2m-1)^2)$, если $n = 2m$, $m \in \mathbb{N}$;
$x(x^2-2^2)(x^2-4^2)\ldots(x^2-(2m)^2)$, если $n = 2m+1$, $m \in \mathbb{N}$.

7.70. $-a_1a_2\ldots a_n\left(\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}\right)$.

7.71. $\sum\limits_{k=0}^{n-1}(-1)^k a_1a_2\ldots a_{n-k} + (-1)^n$.

7.72. $(a^2-b^2)^n$. **7.73.** $\prod\limits_{i=1}^{n}(a_ia_{2n+1-i} - b_ib_{2n+1-i})$.

7.74. $a_1a_2\ldots a_n\left(a_0 - \dfrac{1}{a_1} - \dfrac{2}{a_2} - \ldots - \dfrac{n}{a_n}\right)$.

7.75. $abc_1c_2\ldots c_n\left(\dfrac{c_0}{ab} - \dfrac{1}{c_1} - \dfrac{1}{c_2} - \ldots - \dfrac{1}{c_n}\right)$.

7.75.1. $c_1c_2\ldots c_n\left(c_0 - \dfrac{a_1b_1}{c_1} - \ldots - \dfrac{a_nb_n}{c_n}\right)$.

7.76. $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$. **7.77.** $\dfrac{x^{n+1}-1}{(x-1)^2} - \dfrac{n+1}{x-1}$.

7.78. $\dfrac{nx^n}{x-1} - \dfrac{x^n-1}{(x-1)^2}$. **7.79.** $a_1a_2\ldots a_n\left(1+\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\ldots+\dfrac{1}{a_n}\right)$.

7.80. $a_0x_1x_2\ldots x_n + a_1y_1x_2x_3\ldots x_n + a_2y_1y_2x_3\ldots x_n + \ldots + a_ny_1y_2\ldots y_n$.

7.81. $h(x+h)^n$. **7.82.** $1!\,2!\,3!\ldots n!$. **7.83.** $1!\,2!\,3!\ldots n!$.

7.84. $\prod\limits_{1\le i<k\le n+1}(a_i-a_k)$. **7.85.** $\prod\limits_{n\ge i>k\ge 1}(x_i-x_k)$.

7.86. $(-2)^{n(n-1)/2}\prod\limits_{1\le i<k\le n}\sin\dfrac{\varphi_i+\varphi_k}{2}\sin\dfrac{\varphi_i-\varphi_k}{2}$.

7.87. $2^{n(n-1)/2}\prod\limits_{n\ge i>k\ge 1}\cos\dfrac{\varphi_i+\varphi_k}{2}\sin\dfrac{\varphi_i-\varphi_k}{2}$.

7.88. $(-1)^n 1!\,2!\,3!\ldots n!$.

7.89. $\prod\limits_{n\ge i>k\ge 1}(x_i-x_k)$. **7.90.** $\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x_i}{x_i-1}\prod\limits_{n\ge i>k\ge 1}(x_i-x_k)$.

7.91. $1!\,3!\,5!\ldots(2n-1)!$. **7.92.** $\prod\limits_{1\le i<k\le n+1}(a_ib_k-a_kb_i)$.

7.93. $(x_1+x_2+\ldots+x_n)\prod\limits_{n\ge i>k\ge 1}(x_i-x_k)$. Указание. Определитель Вандермонда $V(x_1,x_2,\ldots,x_n,z)$ разложить по последней строке и вычислить коэффициент при z^{n-1}.

7.94. $x_1x_2\ldots x_n\left(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\ldots+\dfrac{1}{x_n}\right)\prod\limits_{n\ge i>k\ge 1}(x_i-x_k)$.

7.95. $(-1)^{n-1}\prod\limits_{n\ge i>k\ge 1}(x_i-x_k)$. Указание. Представить каждый элемент последнего столбца в виде $(s-x_i)^{n-1}$, где $s=x_1+x_2+\ldots+x_n$, и, разложив его по степеням x_i, свести определитель к определителю Вандермонда.

7.96. $(-1)^{n-1}\prod\limits_{n\ge i>k\ge 1}(x_i-x_k)$. Указание. Умножить i-ю строку ($i=\overline{1,n}$) на x_i и свести определитель к определителю Вандермонда.

7.97. $\prod\limits_{n\ge i>j\ge 1}(\lambda_j-\lambda_i)(1-\lambda_i\lambda_j)$. Указание. Вынести из i-й строки ($i=\overline{1,n}$) множитель λ_i^n.

7.98. $(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)$.

7.99. $(-1)^{n-1}(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)$.

7.100. $-3(x^2-1)(x^2-4)$. **7.101.** x^2z^2.

7.102. $(x-a-b-c)(x-a+b+c)(x+a-b+c)(x+a+b-c)$.

7.103. $(x+a_1+a_2+\ldots+a_n)\prod\limits_{k=1}^{n}(x-a_k)$.

7.104. $x^n+(a_1+a_2+\ldots+a_n)x^{n-1}$. **7.105.** $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$.

7.106. $(1-xa_{11})(1-xa_{22})\ldots(1-xa_{nn})$.

7.107. $\lambda_1=0$, $\lambda_2=2$, $\lambda_3=-3$. Указание. К 1-й строке прибавить остальные строки.

7.108. $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=-1$. Указание. Из 1-го столбца вычесть 3-й и ко 2-му столбцу прибавить удвоенный 3-й.

7.109. $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=1$. **7.110.** $\lambda_1=\lambda_2=1$, $\lambda_3=\lambda_4=2$.

7.111. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 4$.
7.112. $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 5$, $\lambda_3 = -2$, $\lambda_4 = -4$.
7.113. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = 8$.
7.114. $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 4$, $\lambda_4 = -2$.
7.115. $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$, $\lambda_n = n$.
7.116. $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$, $\lambda_n = n(n+1)/2$.
7.117. $(x_1-a_1)(x_2-a_2)\ldots(x_n-a_n)\left(1+\dfrac{a_1}{x_1-a_1}+\dfrac{a_2}{x_2-a_2}+\ldots+\dfrac{a_n}{x_n-a_n}\right)$.
Указание. Положить $x_i = (x_i - a_i) + a_i$.

7.118. 0, если $n \geq 3$, $(a_2-a_1)(b_2-b_1)$, если $n = 2$, и $a_1 - b_1$, если $n = 1$.

7.119. $(a_1-x_1)(a_2-x_2)\ldots(a_n-x_n)-a_1a_2\ldots a_n$. Указание. Представить элемент в левом верхнем углу как $1-1$ и разложить определитель в сумму определителей.

7.120. $\left[1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_i^2}{x_i^2-2a_ix_i}\right]\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i^2-2a_ix_i)$. Указание. Использовать результат задачи 7.117.

7.121. $x_1x_2\ldots x_n\left(1+\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{a_ib_i}{x_i}\right)$.

7.122. $(-1)^{n-1}xy\dfrac{x^{n-1}-y^{n-1}}{x-y}$. Указание. Представить элемент в правом нижнем углу как $x - x$ и разложить определитель в сумму определителей.

7.123. $\dfrac{x(a-y)^n - y(a-x)^n}{x-y}$.

7.124. $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$, где $f(z) = (a_1-z)(a_2-z)\ldots(a_n-z)$.

7.125. 0, если $n \geq 3$; $\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\beta_1-\beta_2)$, если $n = 2$; $\cos(\alpha_1-\beta_1)$, если $n = 1$.

7.126. 0, если $n \geq 3$; $-\sin^2(\alpha_1-\alpha_2)$, если $n = 2$; $\sin 2\alpha_1$, если $n = 1$.

7.127. $\prod\limits_{n\geq i>k\geq 1}(a_i-a_k)(b_i-b_k)$. Указание. Разложить в произведение определителей Вандермонда.

7.128. $C_n^1C_n^2\ldots C_n^n\prod\limits_{n\geq i>k\geq 0}(a_k-a_i)(b_i-b_k)$.

7.129. $\prod\limits_{n\geq i>k\geq 1}(x_i-x_k)^2$. Указание. Разложить в произведение определителей Вандермонда.

7.130. $\prod\limits_{i=1}^{n}(x-x_i)\prod\limits_{n\geq i>k\geq 1}(x_i-x_k)^2$. Указание. Представить искомый определитель в виде произведения

$$\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 & 1 \\ x_1 & \ldots & x_n & x \\ x_1^2 & \ldots & x_n^2 & x^2 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ x_1^n & \ldots & x_n^n & x^n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{n-1} & 0 \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^{n-1} & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

§8

8.1. Указание. Воспользоваться задачами 1.16 и 6.41.

8.2. Указание. Воспользоваться задачами 1.16 и 8.1.

8.3. Указание. Пусть все члены определителя положительны. Показать, что для любого минора 2-го порядка $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ его матрицы выполнено соотношение $\operatorname{sgn}(ad) = \operatorname{sgn}(bc)$. Затем рассмотреть первые три элементы каких-либо двух строк и прийти к противоречию.

8.5. а) $2^n d^2$; б) 0. **8.8.** Равенство выполнено не всегда.

8.9. Указание. Применить метод Гаусса к каждой блочной строке произведения $A \otimes B$.

8.10. Указание. Рассмотрим соотношение

$$\left|\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \hline -x & & & \\ \vdots & & A & \\ -x & & & \end{array}\right| + \left|\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & \ldots & 1 \\ \hline -x & & & \\ \vdots & & A & \\ -x & & & \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c|ccc} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \hline -x & & & \\ \vdots & & A & \\ -x & & & \end{array}\right|.$$

Второй определитель левой части лишь множителем отличается от определителя кососимметрической матрицы нечетного порядка, и значит, он равен нулю. Поэтому левая часть равна $|A|$. Вычитая 1-й столбец определителя в правой части из всех остальных столбцов, получим требуемое.

8.11. Указание. Рассмотреть определитель

$$\left|\begin{array}{ccc|c} & & & 1 \\ & A & & \vdots \\ & & & 1 \\ \hline 1 & \ldots & 1 & 1 \end{array}\right|.$$

8.12. Указание. Рассмотреть определитель

$$\begin{vmatrix} s_1 - a_{11} & \ldots & s_1 - a_{1n} & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_n - a_{n1} & \ldots & s_n - a_{nn} & 0 \\ -1 & \ldots & -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

8.13. Указание. Разложить определитель по последнему столбцу, а затем каждый дополнительный минор по его последней строке.

8.14. Указание. Рассмотреть определитель

$$\left|\begin{array}{ccc|c} & & & 1 \\ & A & & \vdots \\ & & & 1 \\ \hline -x & \ldots & -x & 1 \end{array}\right|$$

и воспользоваться предыдущей задачей.

8.15. Указание. Прибавить ко всем элементам матрицы левой части x и учесть, что получающийся определитель в силу задачи 8.14 является линейной функцией переменной x и, следовательно, может быть найден по любым своим значениям при $x = x_1$ и $x = x_2$.

8.16. Указание. Коэффициент при x_1 в сумме определителей, стоящих в левой части, равен $a_{11}A_{11} + \ldots + a_{n1}A_{n1} = |A|$.

8.17. Указание. Воспользоваться задачей 8.14.

8.18. Указание. Воспользоваться предыдущей задачей.

8.19. Указание. Рассмотреть равенство задачи 8.14 при $x = -1$.

8.20. Указание. Разложить в произведение определителей.

8.21. Указание. Разложить определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_{n1} & \ldots & b_{nn} \\ a_{11} & 0 & \ldots & 0 & b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & 0 & \ldots & 0 & b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

по первым n строкам.

8.22. Указание. а) Рассмотреть произведение матриц $[\ A \mid O\ ]$ и $\begin{bmatrix} B \\ O^T \end{bmatrix}$, где O – нулевая матрица размера $n \times (n-m)$. б) Рассмотреть определитель $\begin{vmatrix} A & O_n \\ -I_m & B \end{vmatrix}$.

8.23. Указание. Представить главный минор матрицы A^TA в виде произведения B^TB, где B – матрица, составленная из столбцов матрицы A, и воспользоваться результатом предыдущей задачи.

8.24. а) Сумма всевозможных произведений элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, одно из которых содержит все элементы, а другие получаются из него выбрасыванием одной или нескольких пар сомножителей с соседними номерами (если выброшены все сомножители, считаем член равным 1).
б) $(a_1a_2\ldots a_n) = (a_1a_2\ldots a_k)(a_{k+1}a_{k+2}\ldots a_n) + (a_1a_2\ldots a_{k-1})(a_{k+2}a_{k+3}\ldots a_n)$
Указание. а) Использовать рекуррентное соотношение для определителя Якоби. в) Применить индукцию по n.

8.25. Указание. Вычесть последний столбец из всех предыдущих. Затем вынести множители из всех строк и из всех столбцов, кроме последнего. От получающего определителя перейти к новому определителю Коши, но на единицу меньшего размера.

8.26. $\dfrac{(1!\,2!\ldots(n-1)!)^3}{n!\,(n+1)!\ldots(2n-1)!}$. Указание. Воспользоваться предыдущей задачей.

8.27. $(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$. Указание. Найти AA^T и использовать тождество $\det(AA^T) = (\det A)^2$.

8.29. 0, если $n \geq 2$, и $f_1(a_1)$, если $n = 1$.

8.30. Указание. Разложить в произведение определителей.

8.31. $(-1)^{n-1}(b_1a_2a_3\ldots a_n + b_1b_2a_3\ldots a_n + \ldots + b_1b_2\ldots b_{n-1}a_n)$.

8.32. $(-1)^n((x-1)^n - x^n)$. Указание. Из каждой строки вычесть предыдущую, в правом нижнем углу положить $1 = x + (1-x)$ и представить в виде суммы двух определителей.

8.33. $\left(x_1x_2\ldots x_n - (x_1-1)(x_2-1)\ldots(x_n-1)\right) \prod\limits_{n\geq i>k\geq 1}(x_i - x_k)$.

Указание. Элементы 1-го столбца представить в виде $x_i - (x_i - 1)$ и разложить определитель в разность двух определителей.

8.34. $\left(2x_1x_2\ldots x_n-(x_1-1)(x_2-1)\ldots(x_n-1)\right)\prod\limits_{n\geq i>k\geq 1}(x_i-x_k)$.

Указание. Приписать первую строку $1,0,0,\ldots,0$ и первый столбец из единиц, затем первый столбец вычесть из остальных, единицу в левом верхнем углу представить в виде $2-1$ и разложить определитель в разность двух определителей.

8.35. $1+\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i+b_i)+\sum\limits_{1\leq i<k\leq n}(a_i-a_k)(b_k-b_i)$.

8.36. $(-1)^n\left(1-n-\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i+\sum\limits_{1\leq i<k\leq n}(x_i-x_k)(y_i-y_k)\right)$.

Указание. Использовать пример 7.8 из §7.

8.37. $x^n+x^{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i-b_i)+x^{n-2}\sum\limits_{1\leq i<k\leq n}(a_i-a_k)(b_i-b_k)$.

Указание. Разложить определитель на сумму двух определителей относительно каждого столбца и воспользоваться результатом задачи 7.118.

8.38. 0, если $n\geq 3$, $xa^p(a^2-1)(1-a)$, если $n=2$, и a^p-x, если $n=1$.

8.38.1. $\prod\limits_{n\geq i>j\geq 0}(a_i-a_j)$. Указание. Рассмотреть определитель

$$\left|\begin{array}{c|ccc} 1 & a_0 & \ldots & a_0^n \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{array}\right|,$$

где A – матрица исходного определителя.

8.39. $(-1)^n\left(x^n-x^{n-1}\dfrac{a^{2n}-1}{a^2-1}\right)$.

8.40. $a_1a_2\ldots a_n\left(1+\dfrac{x}{a_1}+\dfrac{x}{a_2}+\ldots+\dfrac{x}{a_n}\right)$.

8.41. $(-1)^{n(n-1)/2}(a_0-a_1+a_2-\ldots+(-1)^na_n)$.

8.42. 1. Указание. Пользуясь равенством г) из задачи 6.1, вычесть из каждого столбца предыдущий, а затем из каждой строки предыдущую.

8.43. 1. Указание. См. указание к предыдущей задаче.

8.44. 1. Указание. Из каждой строки вычесть предыдущую.

8.45. $(-1)^{n(n+1)/2}$. Указание. Из каждого столбца, начиная со второго, вычесть предыдущий, затем из каждого столбца, начиная с третьего, вычесть предыдущий и т.д. То же самое проделать со строками полученного определителя.

8.46. 1. Указание. Из каждой строки, начиная со второй, вычесть предыдущую, затем из каждой строки, начиная с третьей, вычесть предыдущую и т.д.

8.47. 1. Указание. См. указание к предыдущей задаче.

8.48. $(x-1)^n$. Указание. Из каждой строки вычесть предыдущую и показать, что $D_{n+1}=(x-1)D_n$.

8.49. Указание. Пусть $x_i=im$. Тогда заметить, что в k-м столбце стоят одинаковые многочлены k-й степени от x_i. Так как определитель не меняется при прибавлении к его столбцам линейных комбинаций других столбцов, то его можно привести к определителю с элементами $b_{ij}=x_i^j/j!=(m^j/j!)i^j$.

8.50. а) $e^{(\alpha_1+\ldots+\alpha_n)x} \prod\limits_{n\geq i>j\geq 1} (\alpha_i - \alpha_j)$;

б) $x^{(\alpha_1+\ldots+\alpha_n)-n(n-1)/2} \prod\limits_{n\geq i>j\geq 1} (\alpha_i - \alpha_j)$.

§9

9.2. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$. **9.3.** $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$.

9.4. $\frac{1}{a^2+b^2}\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$. **9.5.** $-\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 7 \\ 7 & 0 & -21 \end{bmatrix}$.

9.6. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. **9.7.** $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

9.8. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 41 & -31 & 23 \\ 9 & -7 & 5 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. **9.9.** $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

9.10. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. **9.11.** $\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 2 & 0 \\ 9 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

9.12. $\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

9.14. Указание. Равенства в) и г) доказать сначала для невырожденных матриц A, B, а затем воспользоваться непрерывной зависимостью элементов обеих частей равенств от элементов рассматриваемых матриц.

9.15. Например, матрица, у которой i-й столбец и j-я строка нулевые, а при вычеркивании i-го столбца и j-й строки остается единичная матрица.

9.16. Матрица $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, в каждой строке и каждом столбце которой стоит ровно один положительный элемент, обладает требуемым свойством. Указание. Для доказательства единственности рассмотреть матрицу A, в которой $a_{ir}, a_{is} > 0$ для некоторого i, и, проанализировав элементы $\{AA^{-1}\}_{ij}$ при всех $j \neq i$, показать, что $\det \widehat{A} = 0$.

9.18. В матрице A^{-1}: а) поменяются местами i-й и j-й столбцы; б) i-й столбец разделится на α; в) из j-го столбца вычтется i-й, умноженный на β.

9.21. 2) Треугольное разложение не единственно. 3) Например, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Указание. 1) Показать, что если главные миноры $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n-1}$ отличны от нуля, то квадратную матрицу можно привести к верхнему ступенчатому виду, пользуясь элементарными преобразованиями строк только третьего типа. Затем воспользоваться задачами 2.1 и 9.19.

9.22. а) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

в) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

9.24. Указание. Воспользоваться предыдущей задачей.

9.25. Например, а) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;

б) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

9.26. $\begin{bmatrix} -6 & 9 & 4 \\ 2 & -3 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$. **9.27.** $\begin{bmatrix} -7/3 & 2 & -1/3 \\ 5/3 & -1 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

9.28. $\begin{bmatrix} 1/9 & 2/9 & 2/9 \\ 2/9 & 1/9 & -2/9 \\ 2/9 & -2/9 & 1/9 \end{bmatrix}$. **9.29.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

9.30. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 15 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **9.31.** $\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

9.32. $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **9.33.** $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

9.34. $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. **9.35.** $\begin{bmatrix} 1/\alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\alpha_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1/\alpha_n \end{bmatrix}$.

9.36. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1/\alpha_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1/\alpha_2 & \dots & 0 \\ 1/\alpha_1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$. **9.37.** $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & (-1)^{n-1} \\ 0 & 1 & -1 & 1 & \dots & (-1)^{n-2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \dots & (-1)^{n-3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$.

9.38. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$.

9.39. $\begin{bmatrix} \lambda^{-1} & -\lambda^{-2} & \lambda^{-3} & \dots & (-1)^{n-1}\lambda^{-n} \\ 0 & \lambda^{-1} & -\lambda^{-2} & \dots & (-1)^{n-2}\lambda^{1-n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda^{-1} \end{bmatrix}$.

9.40. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a^2 & -a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -a^3 & a^2 & -a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-a)^{n-1} & (-a)^{n-2} & (-a)^{n-3} & (-a)^{n-4} & \dots & -a & 1 \end{bmatrix}$.

9.41. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

9.42. $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **9.43.** $\begin{bmatrix} 2-n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{bmatrix}$.

9.44. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 2-n \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1-n \\ 1 & -2 & -3 & \dots & 2-n & 1-n & b_{nn} \end{bmatrix}$, где $b_{nn} = \dfrac{n(n+5)(n-2)}{6}$.

9.45. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -x_{1k} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -x_{2k} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -x_{k-1,k} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -x_{k+1,k} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -x_{n-1,k} & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -x_{nk} & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

9.47. $\dfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ и $\dfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

9.48. $\begin{bmatrix} 21 & -14 & -10 \\ -10 & 7 & 5 \\ -4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$. **9.49.** $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$. **9.50.** $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

9.51. $\dfrac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. **9.52.** $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

9.53. $\begin{bmatrix} 1 & a-1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a-1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a-1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$. **9.54.** $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

9.55. Указание. Рассмотреть разложение ее определителя, например, по первой строке как линейную функцию относительно того элемента a_{1i}, для которого дополнительный минор отличен от нуля.

9.59. Указание. Использовать задачу 3.11.

9.61. а) I, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, где $a + d = -1$, $ad - bc = 1$;

б) $\pm I$, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$, где $a^2 + bc = \pm 1$.

9.62. Указание. Найти обратную матрицу методом Гаусса–Жордана.

9.63. Указание. Воспользоваться предыдущей задачей.

9.64. Указание. Воспользоваться соотношением пункта е) задачи 2.52.

9.66. Указание. Учесть, что $|A^{-1}| = 1/|A|$.

9.67. Указание. Положив $C = (I_n + AB)^{-1}$, доказать, что $(I_m - BCA)(I_m + BA) = I_m$.

9.68. Указание. Пусть $A^k = O$. Воспользоваться тождеством $(I + A + A^2 + \ldots + A^{k-1})(I - A) = I$.

9.70. $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$.

9.71. Указание. Воспользоваться задачей 1.21.

9.72. Указание. Показать, что $J_n^2 = nJ_n$.

9.73. Указание. Использовать задачу 9.71.

9.74.

$$\widetilde{A}^{-1} = A^{-1} - \frac{h}{1 + hb_{ji}} r_i s_j,$$

где $b_{ji} = \{A^{-1}\}_{ji}$, и r_i – i-й столбец , а s_j – j-я строка матрицы A_{-1}. Указание. Воспользоваться задачей 9.73.

9.75. Пусть e – вектор-столбец (того же порядка, что и A), все элементы которого равны единице. Тогда

$$\widetilde{A}^{-1} = A^{-1} - \frac{h}{1 + hs} A^{-1} e e^T A^{-1},$$

где s – сумма всех элементов A^{-1}. Указание. См. указание к предыдущей задаче.

9.78. а) $\begin{bmatrix} I_n & -B \\ O & I_m \end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ O & D^{-1} \end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix} A^{-1} & O \\ -D^{-1}CA^{-1} & D^{-1} \end{bmatrix}$;

г) $\begin{bmatrix} -D^{-1}BA^{-1} & D^{-1} \\ A^{-1} & O \end{bmatrix}$. **9.79.** $\begin{bmatrix} I & -A & AB \\ O & I & -B \\ O & O & I \end{bmatrix}$.

9.80. Если $B^{-1} = \begin{bmatrix} D & r \\ q^T & d \end{bmatrix}$, то

$$d = (a - y^T A^{-1} x)^{-1},\ r = -dA^{-1}x,\ q^T = -dy^T A^{-1},\ D = A^{-1} + dA^{-1}xy^T A^{-1}.$$

9.81. Указание. Привести матрицу X к верхней квазитреугольной форме.

9.82. Нет, не верно. Указание. Воспользоваться предыдущей задачей; рассмотреть матрицу $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

9.84. Указание. Воспользоваться предыдущей задачей.

9.86. Нет, не верно.

9.87. Указание. Показать, что если $AS = SA$ для любой невырожденной матрицы S, то это же верно и для любой вырожденной матрицы S. Затем применить задачу 1.32.

9.89. Нет.

9.91. Вообще говоря, нет.

§10

10.6. Указание. Применить индукцию по n.

10.7. Указание. Применить индукцию по n.

10.8. Указание. Перейти к характеристическим функциям обеих частей равенства.

10.11. 2^n. **10.12.** $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

§11

11.1. а) Нет. б) Да, биективное отображение. в) Да, сюръективное отображение.

11.2. а,б,в) Да. г) Нет. Биективным является отображение п."б".

11.3. Да. **11.4.** а,б,в) $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; г) $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$.

11.5. Нет. **11.6.** а) Нет. б) Да.

11.7. Каждому подмножеству ставится в соответствие его характеристическая функция.

11.8. Включение в б) перейдет в равенство.

11.9. n^m. Указание. Применить индукцию по m.

11.10. Указание. б) Применить индукцию по m.

11.11. Указание. б) Применить индукцию по m.

11.12. Указание. а) Воспользоваться утверждениями задач 11.10а и 11.11а. б) Показать, что это число равно числу всех перестановок из n элементов.

11.13. Пусть $Y = \{y_1, \ldots, y_k\}$. Выделим в бесконечном множестве $X \setminus Y$ произвольную последовательность элементов $S = \{x_1, x_2, \ldots\}$ и положим $S_Y = \{y_1, \ldots, y_k, x_1, x_2, \ldots\}$. Тогда требуемое биективное отображение можно установить по правилу:

– каждому элементу последовательности S_Y поставим в соответствие элемент последовательности S с тем же порядковым номером,

– оставшиеся части $X \setminus S_Y$ и $(X \setminus Y) \setminus S$ совпадают, поэтому соответствие между ними можно выбрать тождественным.

11.15. а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, в обратном порядке – $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

б) в обоих порядках – $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, в обратном порядке – $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$;

г) в обоих порядках – $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

д) в обоих порядках – $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 6 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

11.16. Указание. Воспользоваться теоремами 4.2 и 4.4.

11.17. Указание. Использовать определение обратного отображения и результат задачи 11.8.

§12

12.1. Примеры на множестве $X = \mathbb{R}$: а) $x\mathcal{R}y$, если $(x-y)xy = 0$; б) $x\mathcal{R}y$, если $x \leq y$; в) $x\mathcal{R}y$, если $xy \neq 0$.

12.2. Не доказано, что для любого $x \in X$ найдется $y \in X : x\mathcal{R}y$.

12.4. а) $f = e_X$; б) $f^{-1} = f$; в) $ff = f$. **12.5.** Да.

12.5.1. Нет. **12.5.2.** Нет.

12.6. Для правил а), б), г).

12.7. а) Является отношением эквивалентности; фактор-множество – $\{\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-\}$. б) Является отношением эквивалентности; фактор-множество – $\{X_\alpha \,|\, 0 \le \alpha < 1\}$, где X_α – множество всех чисел $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, у которых дробная часть равна α. в) Отношение не симметрично.

12.8. Отношение: а) не симметрично; б) не симметрично и не транзитивно; в) является отношением эквивалентности; г) не транзитивно; д) рефлексивно и симметрично; е) рефлексивно и симметрично.

12.9. Фактор-множество состоит из двух подмножеств $\mathbb{R}^2$: $\{(x_1, x_2) \,|\, x_1 = x_2\}$ и $\{(x_1, x_2) \,|\, x_1 \ne x_2\}$.

12.10. Отношение: а) является отношением эквивалентности; б) не транзитивно.

12.11. а) Каждый класс эквивалентности содержит ровно одну верхнюю ступенчатую матрицу следующей структуры

$$\left[\begin{array}{c|cccccccccccccc} & 1 & a_{k_1+1,1} & \dots & a_{k_2-1,1} & 0 & a_{k_2+1,1} & \dots & a_{k_3-1,1} & 0 & \dots & 0 & a_{k_r+1,1} & \dots & a_{n1} \\ O & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a_{k_2+1,2} & \dots & a_{k_3-1,2} & 0 & \dots & 0 & a_{k_r+1,2} & \dots & a_{n2} \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 & a_{k_r+1,r} & \dots & a_{nr} \\ \hline O & \multicolumn{14}{c}{O} \end{array}\right],$$

где $r \le \min(m, n)$, $1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_r \le n$ (причем вторая клеточная строка или первый клеточный столбец могут отсутствовать), и все матрицы, которые могут быть из нее получены элементарными преобразованиями строк.

б) Каждый класс эквивалентности содержит ровно одну нижнюю ступенчатую матрицу структуры, аналогичной описанной в п. "а", и все матрицы, которые могут быть из нее получены элементарными преобразованиями столбцов.

в) Каждый класс эквивалентности содержит ровно одну матрицу вида

$$\begin{bmatrix} I_r & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix},$$

где $r \le \min(m, n)$, и все матрицы, которые могут быть из нее получены элементарными преобразованиями строк и столбцов.

12.12. Классами эквивалентности являются множества $K_y = \{x \in X \,|\, f(x) = y\}$, где $y \in f(X)$.

12.13. а) Множество прямых, параллельных прямой l или совпадающих с ней. б) Две полуплоскости, определяемые прямой l, и сама прямая l.

12.14. Фактор множество содержит p классов K_0, $K_1, \ldots, K_{p-1}$, где K_r объединяет все целые числа, дающие остаток r при делении на p.

12.15. Каждый класс эквивалентности K_x содержит все пары $(p, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ такие, что дробь $\dfrac{p}{m}$ равна рациональному числу x.

12.16. Каждый класс эквивалентности является неопределенным интегралом $\int f'(x)\,dx$, т.е. содержит все функции вида $f(x) + C$, где $C \in \mathbb{R}$ произвольно.

12.17. Отношение: а) не транзитивно; б) не симметрично.

12.18. Каждый класс эквивалентности объединяет все подмножества, содержащие одинаковое число элементов.

12.19.

1) Сложение: K, A, N, S; вычитание: не обладает ни одним из свойств; умножение: K, A, N; деление – не алгебраическая операция;
2) сложение – не алгебраическая операция;
вычитание – не алгебраическая операция;
умножение: K, A, N, S; деление: не обладает ни одним из свойств;
3) сложение – не алгебраическая операция; умножение: A, N, S;
4) сложение – не алгебраическая операция; умножение: A, N, S;
5) K, A, N, S; 6) K, A, N, S; 7) A;
8) не является алгебраической операцией; 9) K, A, N, S;
10) не обладает ни одним из свойств;
11) K, N; 12) N, S; 13) A, N; 14) K, A, N, S.

12.22. Относительно каждой операции существует нейтральный элемент, однако симметричный элемент существует не для каждого подмножества множества X.

12.23. Указание. Необходимость: сначала для некоторого $a \in X$ рассмотреть $e'_a \in X$: $a * e'_a = a$ и показать, что для $\forall b \in X$: $b * e'_a = b$, т.е. правый нейтральный элемент $e'_a = e'$ не зависит от выбора a. Аналогично – для левого нейтрального элемента e''. Так как $e'' = e'' * e' = e'$, то $e = e' = e''$ – нейтральный элемент относительно рассматриваемой алгебраической операции. Затем рассмотреть для $\forall a \in X$ элементы $a_1^{-1}, a_2^{-1} \in X$: $a_1^{-1} * a = a * a_2^{-1} = e$ и показать, что $a_1^{-1} = a_2^{-1}$.

§13

13.1. 1) Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ перпендикулярны либо один из них нулевой. 2) Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ противоположно направлены, причем $|\mathbf{a}| \geq |\mathbf{b}|$, либо вектор $\mathbf{b}$ нулевой. 3) Если $\lambda = -1$, то $\mathbf{a} = \mathbf{0}$; если $\lambda = 1$, то $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Если $\lambda \neq \pm 1$, то векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не равны между собой и коллинеарны. 4) Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ сонаправлены либо один из них нулевой. 5) Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ противоположно направлены либо один из них нулевой. 6) Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ сонаправлены и ненулевые.

13.2. $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$. **13.3.** $\overrightarrow{AM} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)/2$.

13.4. Указание. Воспользовавшись равенством задачи 13.3, показать, что $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CK} = \mathbf{0}$.

13.5. Указание. Показать, что сумма этих векторов равна $\mathbf{0}$.

13.6. Указание. Показать, что $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{NM}$.

13.7. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD} = (\mathbf{a} - \mathbf{b})/2$, $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA} = (\mathbf{a} + \mathbf{b})/2$.

13.8. $\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{\lambda+1}(\lambda\mathbf{a} - \mathbf{b})$, $\overrightarrow{BC} = \dfrac{1}{\lambda+1}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$, $\overrightarrow{CD} = \dfrac{1}{\lambda+1}(-\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b})$, $\overrightarrow{DA} = -\dfrac{\lambda}{\lambda+1}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

13.9. Указание. Воспользоваться тем, что $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF}$.

13.10. См. указание к предыдущей задаче.

13.11. $\overrightarrow{BC} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AL} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{CD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AL} - \frac{4}{3}\overrightarrow{AK}$. Указание. Выразить сначала векторы $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{AL}$ через векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CD}$.

13.12. Указание. Положив $\overrightarrow{AO} = \lambda\overrightarrow{AM}$ и $\overrightarrow{BO} = \mu\overrightarrow{BN}$, выразить, например, вектор $\overrightarrow{AO}$ через векторы $\mathbf{b} = \overrightarrow{AB}$ и $\mathbf{c} = \overrightarrow{AC}$ двумя способами.

13.12.1. 3/2. **13.12.2.** $3 : 3 : 1$.

13.13. $\overrightarrow{BC} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$, $\overrightarrow{CD} = \mathbf{q}$, $\overrightarrow{DE} = -\mathbf{p}$, $\overrightarrow{EF} = -\mathbf{p} - \mathbf{q}$.

13.14. Пусть сумма этих векторов $\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n$ равна $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Тогда в результате поворота многоугольника вокруг его центра на угол $2\pi/n$ сумма останется неизменной, а вектор $\mathbf{b}$ изменится.

13.15. Указание. Воспользоваться результатом предыдущей задачи.

13.16. Точка пересечения медиан треугольника.

13.16.1. Точка пересечения диагоналей.

13.16.2. Точка пересечения прямых, соединяющих середины противоположных сторон.

13.17. $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} + \dfrac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}$. **13.18.** $\overrightarrow{AD} = \dfrac{\overrightarrow{AB}|\overrightarrow{AC}| + \overrightarrow{AC}|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}|}$.

13.19. $\overrightarrow{AO} = \dfrac{b}{a+b+c}\mathbf{b} + \dfrac{c}{a+b+c}\mathbf{c}$, $\overrightarrow{BO} = -\dfrac{a+c}{a+b+c}\mathbf{b} + \dfrac{c}{a+b+c}\mathbf{c}$. Указание. Воспользоваться тем же приемом, что и в задаче 13.12, и показать, что если $\overrightarrow{AO} = \lambda\overrightarrow{AL}$, то $\lambda = \dfrac{b+c}{a+b+c}$.

13.20. Указание. Пусть $(CC_1P) = \lambda$. Выразить вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

13.21. Указание. Положить $\overrightarrow{AA_1} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{A_1B_1} = \mathbf{c}$ и, пользуясь условиями, показать, что $\exists x \in \mathbb{R}$, что: а) $\overrightarrow{BC_1} = x\overrightarrow{CB_1}$; б) $\overrightarrow{A_1B_1} = x\overrightarrow{A_1C_1}$.

13.22. а) $\alpha + \beta = 1$, $\alpha, \beta > 0$; б) $\alpha + \beta < 1$, $\alpha, \beta > 0$; в) либо $\alpha + \beta > 1$, либо $\alpha < 0$, либо $\beta < 0$. Указание. Воспользоваться теоремой 13.7.

13.23. а) $\alpha + \beta + \gamma = 1$, $\alpha, \beta, \gamma > 0$; б) $\alpha + \beta + \gamma < 1$, $\alpha, \beta, \gamma > 0$; в) либо $\alpha + \beta + \gamma > 1$, либо $\alpha < 0$, либо $\beta < 0$, либо $\gamma < 0$.

13.24. $\overrightarrow{A'B'} = \mathbf{p}$, $\overrightarrow{A'D'} = \mathbf{q}$, $\overrightarrow{A'C'} = \mathbf{p} + \mathbf{q}$, $\overrightarrow{A'B} = \mathbf{p} - \mathbf{r}$, $\overrightarrow{A'D} = \mathbf{q} - \mathbf{r}$, $\overrightarrow{A'C} = \mathbf{p} + \mathbf{q} - \mathbf{r}$.

13.25. $\overrightarrow{BC} = \mathbf{c} - \mathbf{b}$, $\overrightarrow{CD} = \mathbf{d} - \mathbf{c}$, $\overrightarrow{DB} = \mathbf{b} - \mathbf{d}$, $\overrightarrow{DM} = -\mathbf{d} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})/2$, $\overrightarrow{AQ} = (\mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d})/3$.

13.26. $\overrightarrow{MN} = (\mathbf{b} + \mathbf{c} - \mathbf{a})/2$, $\overrightarrow{PQ} = (\mathbf{c} + \mathbf{a} - \mathbf{b})/2$, $\overrightarrow{RS} = (\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c})/2$.

13.27. $\overrightarrow{EF} = (2\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})/6$. **13.28.** $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2$.

13.29. $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3)/3$. **13.30.** $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3)/2$.

13.31. $\mathbf{r}_4 = \mathbf{r}_1 + \lambda(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2)$, $\mathbf{r}' = \dfrac{\mathbf{r}_1 + \lambda\mathbf{r}_3}{1+\lambda}$, $\mathbf{r}'' = \dfrac{\lambda\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\lambda - 1}$.

13.32. $\mathbf{r}_C = \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_D - \mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_{B'} = \mathbf{r}_B - \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{A'}$, $\mathbf{r}_{C'} = \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_D + \mathbf{r}_{A'} - 2\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_{D'} = \mathbf{r}_D - \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{A'}$.

13.33. $\mathbf{r} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3)/3$. **13.33.1.** $(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_4)/4$.

13.34. $(CAB) = -\dfrac{1}{1+\lambda}$.

13.35. $(PRQ) = \dfrac{(1+\nu)(\mu-\lambda)}{(1+\lambda)(\nu-\mu)}$, если $\nu \neq \mu$.

13.35.1. $(ABR) = \dfrac{\lambda+\mu+2\lambda\mu}{2+\lambda+\mu}$, если $\lambda+\mu \neq -2$.

13.36. Указание. Показать, что: 1) $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{NM}$; 2) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

13.37. M – точка, в которой пересекаются семь прямых: три прямые, проходящие через середины противоположных ребер, и четыре прямые, проходящие через вершины тетраэдра и точки пересечения медиан противоположных граней.

13.38. $\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$.

13.39. а) $\sin 2A : \sin 2B : \sin 2C$; б) $\cos(A/2) : \cos(B/2) : \cos(C/2)$; в) $\sin A : \sin B : \sin C$.

13.40. Если все углы треугольника меньше $2\pi/3$, то точка M существует и $\widehat{BMC} = \widehat{CMA} = \widehat{AMB} = 2\pi/3$. Если один из углов треугольника ABC больше $2\pi/3$, то такой точки нет.

13.41. $\overrightarrow{MM'} = (\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'})/3$.

13.42. $\overrightarrow{CH} = \dfrac{a^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{CA} + \dfrac{b^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{CB}$. Указание. Воспользоваться подобием треугольников ABC, CAH и CBH.

13.43. $\mathbf{r} = \dfrac{a\mathbf{r}_1 + b\mathbf{r}_2 + c\mathbf{r}_3}{a+b+c}$. Указание. Применить теорему из задачи 13.19.

13.44. $\mathbf{r} = \dfrac{\mathbf{r}_3 \operatorname{ctg} B + \mathbf{r}_2 \operatorname{ctg} C}{\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C}$.

13.45. Указание. Ввести радиус-векторы вершин тетраэдра.

13.46. Указание. Ввести радиус-векторы $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$ точек A_1, A_2, $\ldots$, A_n и рассмотреть точку M с радиус-вектором $(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \ldots + \mathbf{r}_n)/n$.

§14

14.1. 1. Да, если прямая проходит через точку O. 2. Да. 3,4,5. Нет.

14.2. а,б) Нет. в) Да.

14.4. Нет, так как не выполнена аксиома 7.

14.5. 1а. Да. 1б. Нет. 2а,2б,3. Да. **14.6.** 1,2,3. Да. 4. Нет.

14.7. 1а. Да. 1б. Нет. 1в,1г. Да. 2,3. Нет. 4. Да.

14.8. 1. Нет. 2а,2в,2д,2е,2ж. Да. 2б,2г. Нет. 3. Нет.

14.9. 1,2,3,4,7,12,13. Да. 5,6,8,9,10,11. Нет.

14.10. Не доказано, что для любого $a \in V$ найдутся $b \in V$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ такие, что $a = \alpha b$.

14.11. Достаточно ввести умножение на число по правилу: $\alpha a = \theta$, $\forall a \in V$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

14.12. Пользуясь только дистрибутивностью и существованием противоположного элемента, доказать, что $0x = \theta\ \forall x \in V$. Вывести отсюда, что $(-1)x = -x$. Наконец, используя ассоциативность сложения, доказать, что $x + y = y + x$.

§15

15.5. Указание. Показать, что если два вектора линейно выражаются через предыдущие, то векторы $a_1, \ldots, a_k$ должны быть линейно зависимы.

15.8. Указание. Использовать результаты задач 15.6 и 15.7.

15.9. Указание. Составить линейные комбинации этих векторов с коэффициентами γ, β и α.

15.10. Указание. Воспользоваться утверждением задачи 15.7.

15.11. а,б) Да. в) Нет. Указание. Использовать утверждение задачи 15.7.

15.12. а) При $\lambda \neq \pm 1$; б) при $\lambda \neq (-1)^n$. Указание. Использовать утверждением задачи 15.7.

15.13. Нет. **15.14.** Да. **15.15.** Нет. **15.16.** Нет.

15.17. Да. **15.18.** Да, только если $\varepsilon = 0$. **15.19.** Да.

15.20. Нет. **15.21.** Нет. **15.22.** Нет.

15.23. Указание. Предположить, что существует нетривиальная линейная комбинация: $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_s x_s = \theta$, и выбрать j так, чтобы $|\alpha_j| = \max_{1 \leq k \leq s} |\alpha_k|$. Далее рассмотреть j-ю компоненту левой части этой линейной комбинации.

15.25. Указание. Использовать результат задачи 15.6.

15.26. $5t^3 - 5t^2 - 4t + 6$ в обоих случаях. Система линейно зависима.

15.27. Например, $\alpha(5f_1 + f_2 - 4f_3) + (1 - \alpha)(f_1 + 9f_2 - 4f_4)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ произвольно.

15.28. Нет.

15.31. Указание. Использовать свойство линейности кронекерова произведения (задача 2.52а,б) и критерий равенства кронекерова произведения нулю (задача 2.55а).

15.32. Указание. Пусть в линейной комбинации $\alpha_0 I + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \ldots + \alpha_k A^k = O$ коэффициент α_s – ненулевой с минимальным номером. Тогда требуемое соотношение для A^{-1} получится, если обе части линейной комбинации умножить на A^{-s-1}.

15.33. Указание. В случаях в),г),д) два раза продифференцировать и применить индукцию. В случаях е),ж) использовать определитель Вандермонда.

15.34. Указание. Использовать определитель Вандермонда.

15.35. Указание. Достаточность следует из свойств определителя. Необходимость: если $f_1, \ldots, f_n$ линейно независимы, то найдется точка a_1 такая, что $f_1(a_1) \neq 0$; проверить, что система $f_i - \dfrac{f_i(a_1)}{f_1(a_1)} f_1$, $i = \overline{2, n}$, линейно независима и завершить доказательство индукцией по n.

15.36. Указание. Продифференцировать $n - 1$ раз равенство $\alpha_1 f_1(x) + \ldots + \alpha_n f_n(x) = 0$. Обратное утверждение неверно. Для проверки этого факта, например, при $n = 2$ достаточно рассмотреть функции $f_1(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ и $f_2(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0, \\ x^2, & x < 0. \end{cases}$

§16

16.1. Указание. Разложить любой минор $(r+2)$-го порядка по строке.

16.2. Указание. Рассмотреть два разложения произвольного минора $(r+1)$-го порядка по двум различным строкам.

16.3. Указание. Рассмотреть разложения произвольного минора $(r+1)$-го порядка по каждой из его $r+1$ строк.

16.4. 1. **16.5.** 4.

16.6. 3. Указание. Применить результат задачи 15.23.

16.7. 3. **16.8.** 4. **16.9.** 3.

16.10. При $\lambda = 0$ ранг равен 2, при $\lambda \neq 0$ ранг равен 3.

16.11. При $\lambda = 3$ ранг равен 2, при $\lambda \neq 3$ ранг равен 3.

16.12. При $\lambda = 3$ ранг равен 2, при $\lambda \neq 3$ ранг равен 3.

16.13. При $\lambda = 0$ ранг равен 1, при $\lambda \neq 0$ ранг равен 4.

16.14. При $\lambda = 0$, $\lambda = 3$ ранг равен 1, при остальных λ ранг равен 2.

16.15. При $\lambda = 1$ ранг равен 1, при $\lambda = -3$ ранг равен 3, при остальных λ ранг равен 4.

16.16. Указание. Рассмотреть минор k-го порядка, стоящий в первых k столбцах.

16.17. Указание. Показать, что ранг матрицы, составленной из этих строк (столбцов) равен k.

16.18. Указание. Воспользоваться предыдущей задачей.

16.19. Указание. Показать, что любой столбец матрицы линейно выражается через столбцы, в которых расположен минор M_r.

16.20. Указание. Воспользоваться результатом задачи 15.23.

16.20.1. Нет.

16.23. Указание. Воспользоваться предыдущей задачей.

16.24. Либо не изменится, либо изменится на единицу.

16.25. Либо не изменится, либо изменится на единицу.

16.26. Ранг изменяется: а) не более, чем на единицу; б) не более, чем на k.

16.27. Либо не изменится, либо изменится на единицу. Указание. Их всех строк, начиная со второй, вычесть первую и использовать задачу 16.25.

16.28. Да, в обоих случаях.

16.31. $0 \leq \operatorname{rg} A \leq \min(2(n-k), n)$, причем оценка точная при $n \leq 2k$.

16.32. $1 \leq \operatorname{rg} A \leq 3$, причем оценка точная при $n \geq 3$.

16.33. Указание. В силу теоремы 16.10 $A = PDQ$, где P, Q невырождены, а $D = \operatorname{diag}(1, \ldots, 1, 0)$. Тогда $\operatorname{rg}(I - D) = 1$ и матрица $PDQ + P(I-D)Q$ невырождена.

16.34. Указание. Применить к матрице A метод Гаусса вычисления ранга.

16.35. Указание. Элементарными преобразованиями строк матрицы A привести матрицы A_{11} и A_{22} к верхней ступенчатой форме.

16.36. Указание. Воспользоваться задачей 16.34 и равенством
$$\operatorname{rg}\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = \operatorname{rg}\begin{bmatrix} A+B & B \\ B & B \end{bmatrix}.$$

16.37. Указание. Применить теорему о базисном миноре.

16.38. Указание. Пусть B – матрица, составленная из рассматриваемых r линейно независимых строк, и M – рассматриваемый минор. Тогда $\operatorname{rg} M \leq \operatorname{rg} B = r$. С другой стороны, по теореме о базисном миноре столбцы B линейно выражаются через столбцы M, и потому $\operatorname{rg} B \leq \operatorname{rg} M$.

16.39. Указание. Рассмотреть базисные строки симметричной матрицы и использовать результат предыдущей задачи.

16.40. Указание. Воспользоваться указанием к задаче 16.39.

16.41. Указание. См. пример 5.5 из §5 и предыдущую задачу.

16.42. Указание. Взять в качестве x базисный столбец матрицы A и воспользоваться теоремой о базисном миноре.

16.43. Указание. Использовать представление, полученное в предыдущей задаче.

16.44. Указание. Использовать задачу 16.43.

16.45. Указание. Составить матрицу B из базисных столбцов матрицы A и найти матрицу C с помощью теоремы о базисном миноре. Для доказательства того, что $\operatorname{rg} C = r$, применить теорему о ранге произведения матриц.

16.46. Указание. а) Использовать определитель задачи 7.121. б) Показать, что среди главных миноров порядка $n-1$ матрицы $I + yx^T$ найдется ненулевой.

16.47. Указание. Воспользоваться задачами 16.42 и 16.46а.

16.48. Указание. Воспользоваться представлением из задачи 16.42 и определителем из задачи 7.121.

16.48.1. Вообще говоря, нет.

16.49. Указание. В силу теоремы 16.10 $A = PI_rQ$ ($r = \operatorname{rg} A$) и $B = RI_sT$ ($s = \operatorname{rg} B$). Тогда $AB = PI_rCI_sT$, где P, C, T невырождены, откуда $\operatorname{rg} AB = \operatorname{rg} I_rCI_s$. Матрица I_rC получается из невырожденной матрицы C заменой всех строк, кроме первых r, на нулевые, и поэтому $\operatorname{rg} I_rC = r$. Матрица I_rCI_s получается из I_rC заменой всех столбцов, кроме первых s, на нулевые, и в силу задачи 16.26 $\operatorname{rg} I_rCI_s \geq r - (n-s)$.

16.50. Указание. Необходимость следует из теоремы 16.5. Достаточность – следствие неравенства Сильвестра из задачи 16.49.

16.51. Указание. Так как A^TA – симметрическая матрица, то в силу задачи 16.39 ее ранг определяется лишь по ее главным минорам. Пусть главный минор M_k расположен в некоторых k столбцах матрицы A^TA. Обозначим через B матрицу, состоящую из столбцов матрицы A с теми же номерами. Тогда $M_k = B^TB$ и в силу утверждения задачи 16.50 минор M_k отличен от нуля тогда и только тогда, когда $\operatorname{rg} B = k$, т.е. столбцы матрицы B линейно независимы.

16.52. Указание. Воспользоваться неравенством Сильвестра из задачи 16.49.

16.52.1. Указание. Показать, что если A вырождена, то существует ненулевая вырожденная матрица B, для которой $AB = O$.

16.52.2. Указание. Показать, что если A – ненулевая вырожденная матрица, то существует ненулевая матрица B, для которой $AB = O$ и $BA \neq O$.

16.53. Указание. Пусть порядок матриц A и B равен $2k+1$. Тогда из задачи 16.52 следует, что $\operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B \leq 2k+1$. Поэтому либо $\operatorname{rg} A \leq k$, либо $\operatorname{rg} B \leq k$.

16.54. Указание. Использовать результаты задач 16.36 и 16.52.

16.55. $\operatorname{rg} \widehat{A} = n$, если $|A| \neq 0$; $\operatorname{rg} \widehat{A} = 1$, если $\operatorname{rg} A = n-1$; $\operatorname{rg} \widehat{A} = 0$, если $\operatorname{rg} A \leq n-2$. Указание. В случае, когда $\operatorname{rg} A = n-1$, воспользоваться результатом задачи 16.52.

16.56. $A = xy^T$, где столбцы x, y удовлетворяют соотношению $x^Ty = 0$. Указание. В силу результата задачи 16.49 ранг такой матрицы равен 0 или 1. Далее использовать задачи 16.42 и 16.43.

16.57. $A = \pm I$ или $A = xy^T \pm I$, где столбцы x, y удовлетворяют соотношению $x^Ty = \mp 2$. Указание. Пусть $A \neq \pm I$. Тогда в силу задачи 16.54 одна из матриц $A - I$ или $A + I$ имеет ранг 1. Пусть $\operatorname{rg}(A+I) = 1$. Тогда в силу задачи 16.42 $A + I = xy^T$ для некоторых столбцов x и y. Так как $A^2 = I$, то $x^Ty = 2$.

16.58. Указание. Пользуясь определением кронекерова произведения и тем фактом, что в неквадратной матрице либо строки, либо столбцы линейно зависимы, показать, что или строки, или столбцы матрицы $A \otimes B$ будут линейно зависимы.

16.59. Указание. а) Используя теорему 9.4, привести матрицу $A \otimes B$ элементарными преобразованиями только строк к квазидиагональной форме, у которой все клетки на главной диагонали равны B. б) Применить основной процесс, приводящий матрицу A к верхней ступенчатой форме, к клеточным строкам матрицы $A \otimes B$ (см. задачу 3.25).

16.60. Указание. Использовать подходящие элементарные преобразования строк и столбцов блочной матрицы (см. задачу 3.25).

16.61. См. указание к предыдущей задаче.

16.62. Указание. Вычесть из второго клеточного столбца первый столбец, умноженный справа на матрицу $A^{-1}B$.

16.63. Указание. Использовать элементарные преобразования блочных строк и столбцов (см. задачу 3.23).

16.64. Указание. Использовать элементарные преобразования блочных строк и столбцов (см. задачу 3.23).

16.65. Указание. Воспользоваться теоремой 16.10.

§17

17.4. Размерность равна 1. **17.5.** Размерность равна 2.

17.6. Размерность равна 1.

17.7. Пространство бесконечномерно.

17.8. Размерность равна: 1) $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$; 2) $\left[\frac{n+1}{2}\right]$.

17.9. Указание. 1. Рассмотреть функции $f_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha & \text{при } 0 \leq x \leq \alpha, \\ 0 & \text{при } \alpha < x \leq 1. \end{cases}$
2. Рассмотреть функции вида $f_\alpha(x) = \begin{cases} \alpha - x, & \text{если } 0 \leq x \leq \alpha, \\ 0, & \text{если } \alpha < x \leq 1. \end{cases}$

17.10. Нет, система линейно зависима. **17.11.** Да.

17.12. Да. **17.13.** Нет, их количество меньше $n = 4$.

17.14. Указание. Использовать результат задачи 15.25.

17.15. Указание. а) Разложить этот вектор x по базису: $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$, и пусть $\alpha_1 \neq 0$. Показать, что вместо e_1 в базис e можно включить вектор x. б) Воспользоваться теоремой 17.1.

17.16. Указание. Применить теоремы 17.2 и 17.3.

17.17. Например, $e_1, e_2, e_3 = (0,1,1,0)$, $e_4 = (0,0,0,1)$ и $e_1' = e_1, e_2' = e_2$, $e_3' = (0,1,1,1)$, $e_4' = (0,0,0,2)$.

17.18. Например, двумя многочленами t^5 и $t^5 - 1$.

17.19. Например, тремя матрицами $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

17.20. Указание. Рассмотреть матрицы $E_1 + E_2 + E_3$, $E_1 + E_2 + E_4$, $E_1 + E_3 + E_4$, $E_2 + E_3 + E_4$.

17.21. $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - \mathbf{c} = \{-12, -2\}$, $16\mathbf{a} + 5\mathbf{b} - 9\mathbf{c} = \mathbf{0}$.

17.22. $\mathbf{c} = 1\mathbf{a} + 1\mathbf{b}$, $\mathbf{d} = 0\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$.

17.23. $-5\mathbf{a} + \mathbf{b} - 6\mathbf{c} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$, $3\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c} - \mathbf{d} = \{1, -7, -3\}$,

17.24. $\mathbf{x} = 1\mathbf{a} + 1\mathbf{b} + 1\mathbf{c}$, $\mathbf{y} = 0\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 0\mathbf{c}$, $\mathbf{z} = 0\mathbf{a} + 1\mathbf{b} + 1\mathbf{c}$.

17.25. При попарно различных α, β, γ.

17.26. а) $\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z} = \mathbf{0}$; б) $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ некомпланарны; в) $2\mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{z} = \mathbf{0}$.

17.27. $\overrightarrow{BD} = \{-1, 1\}$, $\overrightarrow{CO} = \{-1/2, -1/2\}$, $\overrightarrow{KD} = \{-1, 1/2\}$.

17.28. $\overrightarrow{AM} = \{1/2, 0\}$, $\overrightarrow{AO} = \{1/3, 1/3\}$, $\overrightarrow{MO} = \{-1/6, 1/3\}$.

17.29. $\overrightarrow{AB} = \{3/5, -2/5\}$, $\overrightarrow{BC} = \{2/5, 2/5\}$, $\overrightarrow{CD} = \{-2/5, 3/5\}$, $\overrightarrow{DA} = \{-3/5, -3/5\}$.

17.30. а) $\overrightarrow{AB} = \{-1,1,0\}$, $\overrightarrow{BC} = \{0,-1,1\}$, $\overrightarrow{AC} = \{-1,0,1\}$; б) $\overrightarrow{KL} = \{-1/2,1/2,0\}$, $\overrightarrow{PQ} = \{-1/2,1/2,0\}$, $\overrightarrow{CN} = \{1/2,1/2,-1\}$, $\overrightarrow{MP} = \{1/2,0,0\}$, $\overrightarrow{KQ} = \{-1/2,1/2,1/2\}$; в) $\overrightarrow{OS} = \{1/3,1/3,1/3\}$, $\overrightarrow{KS} = \{-1/6,1/3,1/3\}$.

17.31. а) $\overrightarrow{OM} = \left\{\dfrac{n}{n+m}, \dfrac{m}{n+m}\right\}$; б) $\overrightarrow{ON} = \left\{\dfrac{n}{n-m}, \dfrac{m}{m-n}\right\}$.

17.32. $\overrightarrow{AC} = \{1/4,1\}$, $\overrightarrow{AM} = \{1/5,4/5\}$, $\overrightarrow{AS} = \{0,4/3\}$, $\overrightarrow{SM} = \{1/5,-8/15\}$.

17.33. $A = \{-1,2,-1,1\}$. **17.34.** $A = \{1,1,-1,1,1,1\}$.

17.35. $p(t) = \left\{p(\alpha), p'(\alpha), \dfrac{p''(\alpha)}{2!}, \dfrac{p'''(\alpha)}{3!}, \ldots, \dfrac{p^{(n)}(\alpha)}{n!}\right\}$.

17.36. $\{4,2,-3\}$.

17.37. $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$, $(\xi_1', \ldots, \xi_6')^T = Q(\xi_1, \ldots, \xi_6)^T$.

17.38. $Q = \begin{bmatrix} 9 & 7 & 4 \\ -3 & -2 & -2 \\ 8 & 5 & 3 \end{bmatrix}$, $(\xi_1', \xi_2', \xi_3')^T = Q(\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$.

17.39. $Q = \begin{bmatrix} 0 & -18 & 1 & -10 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 4 \\ 1 & -5 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, $(\xi_1', \xi_2', \xi_3', \xi_4')^T = Q(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)^T$.

17.40. $Q = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $(\xi_1', \xi_2', \xi_3')^T = Q(\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$.

17.41. а) Поменяются местами i-я и j-я строки; б) поменяются местами i-й и j-й столбцы; в) все строки, а затем все столбцы перепишутся в обратном порядке.

17.42. а) S^{-1}; б) SQ^{-1}.

17.43. а) Каждый вектор f_i коллинеарен e_i, $i = \overline{1,n}$; б) $f_i = \alpha e_i$, $i = \overline{1,n}$; в) каждый вектор f_i линейно выражается через $e_1, e_2, \ldots, e_i$; г) каждый вектор f_i линейно выражается через $e_i, e_{i+1}, \ldots, e_n$.

17.44. Указание. Воспользоваться определением базиса и теоремой 17.1.

17.45. Указание. Так как $e_1, e_2, \ldots, e_m$ линейно зависимы, то существует нетривиальная линейная комбинация $\beta_1 e_1 + \ldots + \beta_m e_m = \theta$. Пусть $\beta_1 \neq 0$. Тогда, так как $e_2, \ldots, e_m$ также линейно зависимы, то существует нетривиальная линейная комбинация $\gamma_2 e_2 + \ldots + \gamma_m e_m = \theta$. Пусть $\beta = \sum_{i=1}^m \beta_i$ и $\gamma = \sum_{i=2}^m \gamma_i$ отличны от нуля. Тогда линейная комбинация $\gamma(\beta_1 e_1 + \ldots + \beta_m e_m) - \beta(\gamma_2 e_2 + \ldots + \gamma_m e_m)$ – искомая.

17.46. Указание. Пусть Q – матрица перехода от f к e. Так как она невырождена, то среди миноров k-го порядка, стоящих к первых k столбцах, обязательно есть ненулевой. Номера строк, в которых он находится, и определяют требуемый набор векторов из базиса f. Чтобы убедиться в этом, достаточно составить матрицу перехода от f к вновь построенному базису.

17.47. Нет, не обязательно. Можно, например, взять векторы $f_1 = e_1 - e_2$ и $f_2 = e_2 - e_3 - e_1$. Тогда $f_1 + f_2 + e_3 = \theta$.

17.48. Указание. Использовать задачу 15.31.

17.49. Указание. Использовать задачу 15.30.

§18

18.1. а,б,в,д) Нет. г) Да.

18.2. а,г,д) Нет. б) Да, только если прямая проходит через точку O. в) Да.

18.3. $\{\mathbf{0}\}$, V_3, множества векторов, концы которых лежат на некоторой прямой или плоскости, проходящей через начало координат.

18.4. а,б,в,д,ж) Да. г,е) Нет. **18.5.** а,б,в,д,е) Да. г,ж,з) Нет.

18.6. Да, в обоих случаях. **18.7.** Множество из одного вектора; все пространство V.

18.7.1. Указание. Пусть $\forall x_1, x_2 \in P$ и $\forall \alpha \in \mathbb{R}$: $\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2 \in P$. Покажем, что P – линейное многообразие. Для этого достаточно показать, что: а) множество $L = \{y = x_1 - x_2 | x_1, x_2 \in P\}$ является линейным подпространством; б) $P = x_1 + L$, где x_1 – произвольный вектор из P. В силу теоремы 18.1 для доказательства а) достаточно воспользоваться соотношениями:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall x_1, x_2 \in P: \quad \alpha(x_1 - x_2) = [\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2] - x_2,$$

$$\forall x_1, x_2, x_3, x_4 \in P: \quad (x_1 - x_2) + (x_3 - x_4) = \left[2\frac{x_1 + x_3}{2} - \frac{x_2 + x_4}{2}\right] - \frac{x_2 + x_4}{2}.$$

Для обоснования же б) отметим, что

$$\forall y \in x_1 + L \Rightarrow \exists x_2, x_3 \in P: \; y = x_1 + x_2 - x_3 = \frac{2x_1 - x_3}{2} + \frac{2x_2 - x_3}{2} \in P.$$

18.7.2. Да, во всех случаях.

18.7.3. а,б,г,д) Нет; в,е,ж) да. Образует подпространство в пункте "е".

18.7.4. Да во всех случаях; размерность равна 1 в пункте "в", равна 2 в пунктах "а,б,г,д,е", равна 3 в пункте "ж".

18.7.5. а,б,в,г,д) Да; е,ж,з,и) нет.

18.7.6. а,б,е,ж,з) Да; в,г,д) нет.

18.8. Указание. Необходимость: учесть, что $\theta \in P$.

18.9. Указание. Показать, что в этом случае $x_0 \in L$.

18.10. Указание. Если $e_1, \ldots, e_k$ – базис L и x_0 – вектор сдвига, то рассмотреть векторы x_0, $x_0 + e_1, \ldots$, $x_0 + e_k$.

18.11. Указание. Для множества векторов $x_1, x_2, \ldots, x_{k+2}$ линейного многообразия рассмотреть векторы $x_2 - x_1, \ldots$, $x_{k+2} - x_1$.

18.12. Указание. Если $x_0, x_1, \ldots, x_k$ – заданная система векторов, то в качестве вектора сдвига искомого многообразия можно взять x_0, а направляющим подпространством – множество всевозможных линейных комбинаций векторов $x_1 - x_0, \ldots$, $x_k - x_0$.

18.13. Указание. Применить построение из решения задачи 18.12.

§19

19.1. Система несовместна. **19.2.** $x = -2$, $y = -3$, $z = 2$.

19.3. $x = 2$, $y = -2$, $z = 3$. **19.4.** $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$.

19.5. При $\lambda = -2$ система несовместна; при $\lambda \neq -2$: $x = \dfrac{-\lambda^2 - 7\lambda + 10}{\lambda + 2}$, $y = \dfrac{\lambda^2 + 7\lambda}{\lambda + 2}$.

19.6. При $\lambda = -3$ система несовместна; при $\lambda = 3$: $x = 1 - y$, $y \in \mathbb{R}$; при $\lambda \neq \pm 3$: $x = \dfrac{\lambda+1}{\lambda+3}$, $y = \dfrac{-2}{\lambda+3}$.

19.7. а,б) Да, является. Указание. Показать, что матрица, составленная из строк $a_1, a_2, \ldots, a_n$, невырождена.

19.8. Указание. Показать, что для определения $f(t)$ требуется решить систему с невырожденной матрицей.

19.10. $f(t) = t^2 - 5t + 3$. **19.11.** $f(t) = 2t^3 - 5t^2 + 7$.

19.12. Указание. Показать, что матрица системы для нахождения коэффициентов многочлена $f(t)$ треугольная.

19.13. Указание. Искать многочлен $f(t)$ в виде $f(t) = \alpha_0 + \alpha_1(t - t_1) + \alpha_2(t-t_2)^2 + \ldots + \alpha_n(t-t_n)^n$.

19.14. Указание. Искать многочлен в виде

$$f(t) = (t-t_2)^{l+1}\sum_{i=0}^{k}\alpha_i(t-t_1)^i + (t-t_1)^{k+1}\sum_{j=0}^{l}\alpha_j(t-t_2)^j.$$

19.15. Указание. Свести задачу к системе уравнений с квадратной невырожденной матрицей.

19.16. Указание. См. указание к предыдущей задаче.

19.17. $x = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $y = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, $z = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.

19.18. Указание. Определитель системы равен $-(a^2+b^2+c^2+d^2)^2$.

19.19. $x_k = \dfrac{\prod_{i\neq k}(b-a_i)}{\prod_{i\neq k}(a_k-a_i)} = \dfrac{f(b)}{(b-a_k)f'(a_k)}$, где $f(x) = \prod_{i=1}^{n}(x-a_i)$.

19.20. $x_k = (-1)^{n+k}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i f_{ik}}{\prod_{j\neq i}(a_i-a_j)}$, где f_{ik} есть сумма всевозможных произведений по $n-k$ из $n-1$ чисел $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n$.

19.21. $x_k = \left(\displaystyle\prod_{i\neq k}(a_k-a_i)\right)^{-1}\sum_{i=1}^{n} b_i f_{ki}$, где символ f_{ki} имеет тот же смысл, что и в задаче 19.21.

19.22. $x_k = \dfrac{(-1)^k P_{n-k}}{n!}$, где P_i есть сумма всевозможных произведений по i из n чисел $1, 2, \ldots, n$ и $P_0 = 1$.

19.23. $x_k = \dfrac{c_k}{b-a} - \dfrac{a\sum_{i\neq k} c_i}{(b-a)[b+(n-1)a]}$.

19.24. $x_k = -\dfrac{g(a_k)}{f'(a_k)}$, где $g(x) = (x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_n)$, а $f(x)$ – тот же многочлен, что и в задаче 19.20. Указание. Использовать задачу 8.25.

19.25. Указание. Продифференцировать n раз обе части равенства $f(t)h(t) = g(t)$ и составить систему относительно $f, f', \ldots, f^{(n)}$.

19.26. Указание. Умножить обе части равенства $Ax = b$ на присоединенную матрицу $\widehat{A}$ слева.

19.27. Нет, неверно.

§20

20.1. Утверждения 1, 3, 5, 6.

20.2. $\operatorname{rg} A = m \leq n$. **20.2.1.** $\operatorname{rg} A = m = n$.

20.5. Указание. Использовать теорему 20.6.

20.6. Указание. Воспользоваться теоремой 20.1.

20.7. Указание. Если $Ax = b$, $Ay = b$, $x \neq y$, то $A(x - y) = 0$ и в силу теоремы 20.5 $\operatorname{rg} A$ меньше числа столбцов A.

20.8. Указание. У систем одинаковое число свободных неизвестных, а следовательно, равные ранги основных матриц. Далее использовать задачу 16.22.

20.9. Указание. Воспользоваться задачами 20.8 и 16.23.

20.10. Указание. Как и в задаче 20.8, $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \begin{bmatrix} A \\ a' \end{bmatrix}$ и в силу критерия совместности $\operatorname{rg}[A|b] = \operatorname{rg} \left[\begin{array}{c|c} A & b \\ a' & \beta \end{array}\right]$. Далее см. задачу 16.22.

20.11. Указание. Воспользоваться задачами 20.10 и 16.23.

20.12. Указание. К системам, которым удовлетворяют столбцы матрицы X, применить теорему 20.1.

20.13. $\alpha_1 x^{(1)} + \alpha_2 x^{(1)} + \ldots + \alpha_k x^{(k)}$, где $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = 1$.

20.14. $\alpha_1 x^{(1)} + \alpha_2 x^{(1)} + \ldots + \alpha_k x^{(k)}$, где $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = 0$.

20.15. Указание. Воспользоваться определением кронекерова произведения из задачи 2.52.

20.16. См. указание к предыдущей задаче.

§21

21.1. Система несовместна. **21.2.** $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$.

21.3. $x_3 = 2x_2 - x_1$, $x_4 = 1$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. **21.4.** Система несовместна.

21.5. $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = \dfrac{5}{3}$, $x_4 = -\dfrac{4}{3}$.

21.6. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$. **21.7.** Система несовместна.

21.8. $x_1 = 2$, $x_2 = x_3 = x_4 = 1$.

21.9. $x_1 = -\dfrac{11x_3}{7}$, $x_2 = -\dfrac{x_3}{7}$, $x_3 \in \mathbb{R}$.

21.10. Система несовместна. **21.11.** $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

21.12. $x_1 = -8$, $x_2 = 3 + x_4$, $x_3 = 6 + 2x_4$, $x_4 \in \mathbb{R}$.

21.13. Система несовместна.

21.14. $x_1 = \dfrac{7}{6}x_5 - x_3$, $x_2 = \dfrac{5}{6}x_5 + x_3$, $x_4 = \dfrac{x_5}{3}$, $x_3, x_5 \in \mathbb{R}$.

21.15. $x_1 = -16 + x_3 + x_4 + 5x_5$, $x_2 = 23 - 2x_3 - 2x_4 - 6x_5$, $x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$.

21.16. $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = x_5$, $x_5 \in \mathbb{R}$.

21.17. $x_1 = \dfrac{1 + x_5}{3}$, $x_2 = \dfrac{1}{3} + x_3 + x_4 - \dfrac{5x_5}{3}$, $x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$.

21.18. $x_1 = -\dfrac{x_5}{2}$, $x_2 = -1 - \dfrac{x_5}{2}$, $x_3 = 0$, $x_4 = -1 - \dfrac{x_5}{2}$, $x_5 \in \mathbb{R}$.

21.19. $x_1 = \dfrac{1 + 5x_4}{6}$, $x_2 = \dfrac{1 - 7x_4}{6}$, $x_2 = \dfrac{1 + 5x_4}{6}$, $x_4 \in \mathbb{R}$.

21.20. При $\lambda \neq 5$ система несовместна. При $\lambda = 5$: $x_1 = -4 + x_3$, $x_2 = \dfrac{11}{2} - 2x_3$, $x_3 \in \mathbb{R}$.

21.21. При $\lambda \neq 0$ система несовместна.

При $\lambda = 0$: $x_1 = \dfrac{-3 - 5x_3 - 13x_4}{2}$, $x_2 = \dfrac{-7 - 7x_3 - 19x_4}{2}$, $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$.

21.22. При $\lambda = -3$ система несовместна. При $\lambda \neq -3$: $x_1 = -\dfrac{1}{\lambda+3}$, $x_2 = \dfrac{4\lambda+11}{3(\lambda+3)}$, $x_3 = -\dfrac{\lambda+11}{3(\lambda+3)}$.

21.23. При $\lambda = 0$ система несовместна. При $\lambda \neq 0$: $x_1 = \dfrac{4-\lambda}{5\lambda} - \dfrac{3}{5}x_3$, $x_2 = \dfrac{9\lambda-16}{5\lambda} - \dfrac{8}{5}x_3$, $x_4 = \dfrac{1}{\lambda}$, $x_3 \in \mathbb{R}$.

21.24. Система совместна при любом $\lambda \in \mathbb{R}$. При $\lambda = 8$: $x_2 = 4 + 2x_1 - 2x_4$, $x_3 = 3 - 2x_4$, $x_1, x_4 \in \mathbb{R}$. При $\lambda \neq 8$: $x_1 = 0$, $x_2 = 4 - 2x_4$, $x_3 = 3 - 2x_4$, $x_4 \in \mathbb{R}$.

21.25. Система совместна при любом $\lambda \in \mathbb{R}$. При $\lambda = 8$: $x_3 = -1$, $x_4 = 2 - x_1 - \dfrac{3}{2}x_2$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. При $\lambda \neq 8$: $x_2 = \dfrac{4-2x_1}{3}$, $x_3 = -1$, $x_4 = 0$, $x_1 \in \mathbb{R}$.

21.26. При $\lambda = 1$ система несовместна. При $\lambda = -2$: $x_1 = x_2 = 1 + x_3$, $x_3 \in \mathbb{R}$. При $\lambda \neq 1, -2$: $x_1 = x_2 = -\dfrac{1}{\lambda-1}$, $x_3 = \dfrac{2}{\lambda-1}$.

21.27. При $\lambda = -3$ система несовместна. При $\lambda = 1$: $x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4$, $x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}$. При $\lambda \neq 1, -3$: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \dfrac{1}{\lambda+3}$.

21.28. При $\lambda = 1$ и $\lambda = -2$ система несовместна. При $\lambda \neq 1, -2$: $x_1 = x_2 = -\dfrac{3}{(\lambda-1)(\lambda+2)}$, $x_3 = \dfrac{3(\lambda+1)}{(\lambda-1)(\lambda+2)}$.

21.29. При $\lambda = 0$ и $\lambda = -3$ система несовместна. При $\lambda \neq 0, -3$: $x_1 = \dfrac{2-\lambda^2}{\lambda(\lambda+3)}$, $x_2 = \dfrac{2\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)}$, $x_3 = \dfrac{\lambda^3+2\lambda^2-\lambda-1}{\lambda(\lambda+3)}$.

21.30. Система совместна при любом $\lambda \in \mathbb{R}$. При $\lambda = 0$: $x_1 = -x_2 - x_3$, $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. При $\lambda = -3$: $x_1 = x_2 = x_3$, $x_3 \in \mathbb{R}$. При $\lambda \neq 0, -3$: $x_1 = 2 - \lambda^2$, $x_2 = 2\lambda - 1$, $x_3 = \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 1$.

21.31. При $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$ система несовместна. При $\lambda = -1$: $x_1 = 1 - \dfrac{3x_3}{5}$, $x_2 = -1 - \dfrac{3x_3}{5}$, $x_3 \in \mathbb{R}$. При $\lambda \neq 0, \pm 1$: $x_1 = -x_3 = \dfrac{1}{\lambda(\lambda-1)}$, $x_2 = \dfrac{\lambda}{\lambda-1}$.

21.32. При $\lambda = 1$ и $\lambda = -2$ система несовместна. При $\lambda = 0$: $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_1 \in \mathbb{R}$. При $\lambda \neq 0, 1, -2$: $x_1 = \dfrac{-4\lambda^2+12\lambda-10}{(\lambda-1)(\lambda+2)}$, $x_2 = \dfrac{3\lambda^2-3\lambda+2}{(\lambda-1)(\lambda+2)}$, $x_3 = -\dfrac{2\lambda}{\lambda+2}$.

21.33. $\lambda = 0, 7$. **21.34.** $\lambda = 0, 3, 4$.

21.36. Если a, b, c – попарно различны, то

$$x = \frac{(b-d)(c-d)}{(b-a)(c-a)}, \quad y = \frac{(d-a)(d-c)}{(b-a)(b-c)}, \quad z = \frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

Если среди чисел a, b, c, d имеется только два различных, то система неопределенна, например, если $d = a \neq b = c$, то $x = 1$, $y = -z$, $z \in \mathbb{R}$. Если $a = b = c = d$, то $x = 1 - y - z$, $y, z \in \mathbb{R}$. Если же среди чисел a, b, c два различны и d не равно ни одному из них или если $a = b = c \neq d$, то система несовместна.

21.37. Если $D = abc - a - b - c + 2 \neq 0$, то

$$x = \frac{(b-1)(c-1)}{D}, \quad y = \frac{(a-1)(c-1)}{D}, \quad z = \frac{(a-1)(b-a)}{D}.$$

Если $D = 0$, причем одно и только одно из чисел a, b, c отлично от единицы, то система неопределенна, например, если $a \neq b = c = 1$, то $x = 0$, $y = 1 - z$, $z \in \mathbb{R}$. Если $a = b = c = 1$, то $x = 1 - y - z$, $y, z \in \mathbb{R}$. Если $D = 0$ и ни одно из чисел a, b, c не равно единице, то система несовместна.

21.38. Если $D = abc - a - b - c + 2 \neq 0$, то

$$x = \frac{abc - 2bc + b + c - a}{D}, y = \frac{abc - 2ac + a + c - b}{D}, z = \frac{abc - 2ab + a + b - c}{D}.$$

Если $D = 0$ и только одно из чисел a, b, c отлично от единицы, то система неопределенна, например, если $a \neq b = c = 1$, то $x = 1$, $y = -z$, $z \in \mathbb{R}$. Если $a = b = c = 1$, то $x = 1 - y - z$, $y, z \in \mathbb{R}$. Если $D = 0$, причем все числа a, b, c отличны от единицы, то система несовместна. Указание. Для доказательства несовместности системы в последнем случае показать справедливость тождеств: $D - D_x = 2(b-1)(c-1)$, $D - D_y = 2(a-1)(c-1)$, $D - D_z = 2(a-1)(b-1)$, где D_x, D_y, D_z – соответственно числители в написанных выше выражениях для x, y, z.

21.39. Если a, b, c все различны, то $x = abc$, $y = -(ab + ac + bc)$, $z = a + b + c$. Если среди a, b, c лишь два равных, то система неопределенна, например, если $a = b \neq c$, то $x = ac(z - a - c)$, $y = a^2 + ac + c^2 - (a + c)z$, $z \in \mathbb{R}$. Если $a = b = c$, то $x = a^3 - a^2 z - ay$, $y, z \in \mathbb{R}$.

21.40. Если $b(a-1) \neq 0$, то $x = \dfrac{2b-1}{b(a-1)}$, $y = \dfrac{1}{b}$, $z = \dfrac{2ab - 4b + 1}{b(a-1)}$. Если $a = 1$, $b = 1/2$, то $x = 4 - z$, $y = 1$, $z \in \mathbb{R}$. В остальных случаях система несовместна.

21.41. Если $b(a-1)(a+2) \neq 0$, то $x = z = \dfrac{a-b}{(a-1)(a+2)}$, $y = \dfrac{ab + b - 2}{b(a-1)(a+2)}$. Если $a = b = -2$, то $x = z = -1 - 2y$, $y \in \mathbb{R}$. Если $a = b = 1$, то $x = 1 - y - z$, $y, z \in \mathbb{R}$. В остальных случаях система несовместна.

21.42. Если $a(a-b) \neq 0$, то $x = \dfrac{a^2(b-1)}{b-a}$, $y = \dfrac{b(a^2-1)}{a(a-b)}$, $z = \dfrac{a-1}{a(b-a)}$. Если $a = b = 1$, то $x = 1 - y - z$, $y, z \in \mathbb{R}$. В остальных случаях система несовместна.

21.43. Если $b = c = 1$, то $x = 1 - y - z$, $y, z \in \mathbb{R}$. Если $b = c \neq 0, 1$, то $x = 1 + b^{-1} + z$, $y = -1$, $z \in \mathbb{R}$. Если $c = 1$, $b \neq \pm 1$, то $x = \dfrac{2+b}{1+b} - z$, $y = \dfrac{-b}{1+b}$, $z \in \mathbb{R}$. В остальных случаях система несовместна.

21.44. Если $(a-1)(a+2) \neq 0$, то $x = \dfrac{a + 1 - b - c}{(a-1)(a+2)}$, $y = \dfrac{b(a+1) - 1 - c}{(a-1)(a+2)}$, $z = \dfrac{c(a+1) - 1 - b}{(a-1)(a+2)}$. Если $a = -2$, $b + c = -1$, то $x = z - \dfrac{b+1}{3}$, $y = z - \dfrac{1+2b}{3}$, $z \in \mathbb{R}$. Если $a = b = 1$, то $x = 1 - y - z$, $y, z \in \mathbb{R}$. В остальных случаях система несовместна.

21.45. Если $a(b-1)(b+1) \neq 0$, то $x = \dfrac{5-b}{a(b+1)}$, $y = -\dfrac{2}{b+1}$, $z = \dfrac{2(b-1)}{b+1}$.

Если $a = 0$, $b = 5$, то $y = -1/3$, $z = 4/3$, $x \in \mathbb{R}$. Если $b = 1$, то $y = 1 - ax$, $x \in \mathbb{R}$. В остальных случаях система несовместна.

21.46. а,г) Нет, не является; б) $b = 3a_1 + 2a_2 - a_3$; в) $b = 3a_1 - 5a_3 + 11a_4$.

21.47. При $i = 1$: $x = (1, 2, 1)^T$, при $i = 2$: $x = (1, 1, 1)^T$, при $i = 3$: $x = (1, -1, 1)^T$. Указание. Составить расширенную матрицу $\left[A|b_1b_2b_3\right]$.

21.48. а) $\lambda \neq 5, 7$; б) $\lambda \neq \pm 3$; в) $\lambda \neq 1, 3$; г) $\lambda \neq -2, -4$.

21.49. Указание. Составить уравнения для нахождения столбцов A^{-1}.

21.50. $\begin{bmatrix} 10 & 3 & 15 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. **21.51.** $\begin{bmatrix} -15/2 & -4 & 11/2 & -7/2 \\ 7/2 & 2 & -5/2 & 3/2 \\ -4 & -3 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

21.52. $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)^T$. Указание. Решить систему $Ax = e_3$.

21.53. $(0, 0, 0, 1, -1)$. Указание. Найти последний столбец $(A^T)^{-1}$.

21.54. а) $x_1 = 1 + x_3$, $x_2 = -2x_3$, $x_3 \in \mathbb{R}$; б) $x_1 = x_3$, $x_2 = -2x_3$, $x_3 \in \mathbb{R}$; в) неизвестные x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 удовлетворяют соотношениям: $2x_1 + x_2 + 3(y_2 + 2y_3) = 0$, $3(x_1 + x_2 + x_3) = y_1 + y_2 + y_3$.

21.55. Верны утверждения 1 и 4. Указание. Для утверждения 2: взять $n = m - 1$ и построить A и b так, чтобы $\operatorname{rg} A = n$, $\operatorname{rg}(A|b) = m$. Для утверждения 3: построить A так, чтобы $\operatorname{rg} A = m$; тогда $\operatorname{rg}(A|b) = m$ для любого вектор-столбца b.

21.56. Указание. Дописать к системе $Ax = b$ уравнение $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ и исследовать получающуюся систему на совместность.

21.57. Указание. Пользуясь методом Гаусса, перейти к эквивалентной системе с верхней трапециевидной матрицей.

21.58. Указание. Воспользоваться результатом задачи 21.57.

21.59. а,в) $n = m = \operatorname{rg} A$; б,г) $n > m = \operatorname{rg} A$; д) ни одна система не обладает указанным свойством.

21.60. Указание. Необходимость: воспользоваться равенством $b^Ty = x^TA^Ty$. Достаточность: так как системы $A^Ty = 0$ и $\begin{cases} A^Ty = 0, \\ b^Ty = 0 \end{cases}$ эквивалентны, то в силу утверждения задачи 20.8 строка b^T линейно выражается через строки матрицы A^T.

21.62. Указание. Умножить обе части равенства $A^TAy = 0$ на вектор-строку y^T слева.

21.63. Указание. Воспользоваться предыдущей задачей и теоремой Фредгольма (задача 21.60).

§22

22.1. Любой базис пространства $\mathbb{R}^4$.

22.2. $e_1 = (-7, 3, 0, 0)^T$, $e_2 = (5, 0, 3, 0)^T$.

22.3. $e_1 = (0, 0, 0, 6, -1)^T$, $e_2 = (0, 1, 0, 2, 0)^T$, $e_3 = (0, 0, 1, 5, 0)^T$.

22.4. Система имеет только нулевое решение.

22.5. $e_1 = (1, 1, -1, 1)^T$.

22.6. $e_1 = (2, -1, 1, 0, 0)^T$, $e_2 = (8, -2, 0, 1, 0)^T$.

22.7. $e_1 = (1, 1, -3, -3, 7)^T$.

22.8. $e_1 = (-1, 1, -1, 1, 0)^T$, $e_2 = (3, -3, 3, 0, 1)^T$.

22.9. Система имеет только нулевое решение.

22.10. $e_1 = (2,0,-5,7)^T$, $e_2 = (0,1,5,-7)^T$.

22.11. $e_1 = (4,0,0,-9,3)^T$, $e_2 = (0,2,0,-3,1)^T$, $e_3 = (0,0,1,-2,1)^T$.

22.12. $e_1 = (1,1,1,1,0,0)^T$, $e_2 = (-1,0,0,0,1,0)^T$, $e_3 = (0,-1,0,0,0,1)^T$.

22.13. $e_1 = (0,1,3,0,0)^T$, $e_2 = (0,-2,0,0,3)^T$.

22.14. Например, $e_1 = (1,0,1,0)$, $e_2 = (0,1,0,1)$ и $e_1' = e_1$, $e_2' = (1,1,1,1)$.

22.15. $x = \alpha_1(7,-5,0,2)^T + \alpha_2(-7,5,1,0)^T$.

22.16. $x = \alpha_1(-9,3,4,0,0)^T + \alpha_2(-3,1,0,2,0)^T + \alpha_3(-2,1,0,0,1)^T$.

22.17. $x = \alpha_1(-9,-3,11,0,0)^T + \alpha_2(3,1,0,11,0)^T + \alpha_3(-10,4,0,0,11)^T$.

22.18. $x = \alpha_1(-3,2,1,0,0)^T + \alpha_2(-5,3,0,0,1)^T$.

22.19. Если $n \neq 3k+2$, то система имеет только нулевое решение. Если $n = 3k+2$, то $x = \alpha(-1,1,0,-1,1,0,\ldots,0,-1,1)^T$.

22.20. $x = (0,0,2,-1)^T + \alpha_1(13,0,9,-1)^T + \alpha_2(0,13,-27,3)^T$.

22.21. $x = (2,1,-1,0,1)^T + \alpha_1(1,0,4,0,-1)^T + \alpha_2(0,1,-8,0,2)^T$.

22.22. $x = (2,-2,3,-1)^T + \alpha_1(-13,8,-6,7)^T$.

22.23. $x = (0,-6,0,-4,2)^T + \alpha_1(1,0,-2,-4,-4)^T + \alpha_2(0,1,-1,-2,-2)^T$.

22.24. $x = (3,0,-5,11)^T$.

22.25. $x = (1,1,0,-2,0,0)^T + \alpha_1(-4,0,0,0,-1,3)^T + \alpha_2(-1,0,0,1,0,0)^T + \alpha_3(-3,1,0,0,0,0)^T$.

22.26. При $\lambda = 0$ система несовместна. При $\lambda = 6$ размерность равна двум, при остальных значениях λ – равна нулю.

22.27. При $\lambda = 2$ система несовместна. При $\lambda = -1$ размерность равна двум, при остальных значениях λ – равна нулю.

22.28. Указание. Переменные x_4, x_5 не могут быть выбраны свободными неизвестными, и следовательно, 4й и 5й столбцы основной матрицы системы входят в любой ее базисный минор и потому не выражаются через остальные столбцы.

22.29. x_1, x_2; x_1, x_4; x_2, x_3; x_2, x_5; x_3, x_4; x_4, x_5.

22.30. а) $x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$; б) $\left\{\begin{aligned} x_1 + 2x_4 &= 0, \\ 2x_2 - x_3 - x_4 &= 0; \end{aligned}\right.$ в) $\left\{\begin{aligned} x_1 &= -2x_2, \\ x_2 &= x_3, \\ x_3 &= x_4. \end{aligned}\right.$

Указание. Согласно формуле общего решения любое решение искомой системы $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ линейно выражается через векторы указанной системы, т.е. система $\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_k y_k = x$ относительно неизвестных $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ совместна.

22.31. а) $\left\{\begin{aligned} 5x_1 - x_2 + x_3 - x_5 &= 0, \\ 2x_2 + 10x_3 - x_4 - 14x_5 &= 0; \end{aligned}\right.$

б,в) Указание. Добавить к системе из а) любые уравнения, являющиеся ее следствиями.

22.32. а) Указание. Построить любую систему, единственным решением которой является вектор y_1.

б) $\left\{\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &= 3, \\ x_1 + 3x_3 &= 3, \\ 2x_1 - 3x_4 &= 0, \\ x_1 - 3x_5 &= 0; \end{aligned}\right.$ в) $\left\{\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= -1, \\ x_2 - x_3 &= -3, \\ x_3 - x_4 &= 2, \\ x_4 - x_5 &= -3; \end{aligned}\right.$ г) $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0$.

Указание. Если линейное многообразие задается принадлежащими ему векторами $y_1, \ldots, y_k$ $(k \geq 2)$, то в качестве вектора сдвига можно взять

y_1, а направляющее подпространство описать однородной системой уравнений, Ф.С.Р. которой является максимальная линейно независимая подсистема совокупности векторов $y_2 - y_1, \ldots, y_k - y_1$.

22.33. Нет, так как вектор y_2 линейно не выражается через другую систему.

22.34. Нет, так как ни один вектор y_i линейно не выражается через другую систему.

22.35. Да.

22.36. Нет, так как вектор z_3 линейно не выражается через другую систему.

22.37. Указание. Пусть свободными в системе являются ее последние p неизвестных. Тогда базисные миноры (порядка p) M_A в матрице A и M_B в матрице B оба расположены в последних p столбцах и $C = M_B M_A^{-1}$.

22.38. Указание. Ф.С.Р. содержит один вектор.

22.39. Указание. Использовать то, что присоединенная матрица $\widehat{A}$ удовлетворяет равенству $A\widehat{A} = O$.

22.40. Указание. Воспользоваться предыдущей задачей.

22.41. Указание. Дописать к основной матрице системы любую ее строку и разложить определитель получающейся квадратной матрицы по этой строке. Далее воспользоваться задачей 22.38.

22.42. Частное решение: $x = (-2, -6, 7)^T$. Общее решение: $\alpha x, \alpha \in \mathbb{R}$.

22.43. Частное решение: $x = (3, 2, 0)^T$. Общее решение: $\alpha x, \alpha \in \mathbb{R}$.

22.44. Частное решение: $x = (-6, 11, -9, 4)^T$ Общее решение: $\alpha x, \alpha \in \mathbb{R}$.

22.45. Частное решение: $x = (3, 0, 2, 0)^T$. Общее решение: $\alpha x, \alpha \in \mathbb{R}$.

22.46. $e = ad - bc$.

22.47. Матрица A и столбец b нулевые. Указание. Рассмотреть в качестве x нулевой вектор и единичные векторы пространства $\mathbb{R}^n$.

22.48. Указание. Столбцы B суть решения системы $Ax = 0$.

22.49. Ранг расширенной матрицы системы должен при вычеркивании k-го столбца уменьшаться на единицу.

22.50. 2) $k(n - \operatorname{rg} A)$. Указание. Если x – столбец, составленный из элементов искомой матрицы X, занумерованных по столбцам, то $A_1 x = 0$, где A_1 – блочная матрица, диагональные блоки которой равны A, а внедиагональные являются нулевыми матрицами.

22.51. 2) $nk - \operatorname{rg} A \operatorname{rg} B$.

§23

23.1. а) $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(3/2, 1/2)$, $D(1,1)$, $E(0,1)$, $F(-1/2, 1/2)$; б) $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(3/2, \sqrt{3}/2)$, $D(1, \sqrt{3})$, $E(0, \sqrt{3})$, $F(-1/2, \sqrt{3}/2)$.

23.2. $C(5,3)$, $D(2,7)$ или $C(-1,-5)$, $D(-4,-1)$.

23.3. а) $M_1(-x,-y)$; б) $M_1(x,-y)$; в) $M_1(-x,y)$; г) $M_1(y,x)$; д) $M_1(-y,-x)$.

23.4. $D(1,-2)$. **23.5.** $D(11,7)$. **23.6.** $M(12,-11)$.

23.7. а) $M_1(-x,-y,-z)$; б) $M_1(x,y,-z)$; в) $M_1(-x,-y,z)$.

23.8. а) $M_0(x,0,0)$; б) $M_0(0,y,z)$.

23.9. а) $C(1,1,0)$, $B_1(1,0,1)$, $C_1(1,1,1)$; б) $K(1/2,0,1)$, $L(1,1,1/2)$; в) $M(1/2,1/2,1)$, $N(1/2,0,1/2)$; г) $O(1/2,1/2,1/2)$.

23.10. $(1/3,1/3,0)$ для грани AOB; $(0,1/3,1/3)$ для грани BOC; $(1/3,0,1/3)$ для грани COA; $(1/3,1/3,1/3)$ для грани ABC.

23.11. 1) $(-8/3,5/3)$; 2) $(9,5)$; 3) $(-22/3,1/3)$; 4) $(1/4,5/2)$.

23.12. 1) $(-1,5)$; 2) $(0,0)$; 3) $(1/2,1/2)$. **23.13.** $B(0,-7)$.

23.14. $(11/5,0)$ и $(0,-11)$.

23.15. $x=(x_1+x_2+x_3)/3$, $y=(y_1+y_2+y_3)/3$.

23.16. $(-3,3)$, $(7,5)$, $(-3,-3)$.

23.17. $C(10,9)$, $D(4,-4)$. **23.18.** 4. **23.19.** $C(0,-1)$, $D(4,-4)$.

23.20. $A(3,-1)$, $B(0,8)$. **23.21.** $B(-3,16/3)$. **23.22.** -2.

23.23. $A(160,-131)$, $B(-225,184)$.

23.24. $(BNO)=\dfrac{1+\nu}{\mu}$, $(CMO)=\dfrac{1+\mu}{\nu}$. Указание. Ввести систему координат так, чтобы $A(0,0)$, $B(0,1)$, $C(1,0)$.

23.26. $(AMK)=3$, $(BNK)=3/5$.

23.27. Центр $(0,5)$. **23.28.** $(-2,1)$.

23.29. 1) $(3,2/3,2)$; 2) $(-30,8,13)$; 3) $(-6/5,8/5,17/5)$; 4) $(21/2,-1,-1/2)$. **23.30.** $(3,0,5)$.

23.31. $A(14/3,-8,12)$, $B(-11/3,7,-13)$ и остальные точки деления: $D(4/3,-2,2)$, $E(-1/3,1,-3)$.

23.32. $C(4,-5,-2)$. **23.33.** $7/2$, $1/5$, $-1/2$.

23.34. Пересекаются в точке $(-3/2,5/2,11)$.

23.35. Пересекает ось Oz. **23.36.** $A(-5,4)$, $B(-12,5)$, $C(-7,3)$.

23.37. $O'(6,-2)$, $\mathbf{e}_1'=\{1,0\}$, $\mathbf{e}_2'=\{0,1\}$; $O(-6,2)$, $\mathbf{e}_1=\{1,0\}$, $\mathbf{e}_2=\{0,1\}$.

23.38. $A(3\sqrt{3},1)$, $B(\sqrt{3}/2,3/2)$, $C(3,-\sqrt{3})$.

23.39. $M(\sqrt{2},2\sqrt{2})$, $N(-3\sqrt{2},2\sqrt{2})$, $P(-\sqrt{2},-2\sqrt{2})$.

23.40. $x=-\dfrac{1}{2}x'-\dfrac{\sqrt{3}}{2}y'-4$, $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x'-\dfrac{1}{2}y'+2$. **23.41.** $A(2,3)$.

23.42. 1) $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x'-\dfrac{1}{\sqrt{2}}y'+1$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{2}}x'+\dfrac{1}{\sqrt{2}}y'+1-\sqrt{2}$; 2) $x=-x'+4$, $y=-y'+8$; 3) $x=\dfrac{1}{2}x'-\dfrac{\sqrt{3}}{2}y'+\dfrac{3}{2}$, $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x'+\dfrac{1}{2}y'-\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$; 4) $x=-y'$, $y=x'+4$. Указание. Показать, что $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=(I-C)\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}+C\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, где (α,β) – координаты точки A, а C – матрица поворота на угол φ.

23.43. $C(-3\sqrt{3}/2,(5-4\sqrt{3})/2)$.

23.44. $D(-5,7)$, $C(0,9)$ или $D(-1,-3)$, $C(4,-1)$.

23.45. $B(5/2,7/3)$ или $B(-5/2,-13/3)$. Указание. Выполнить поворот вокруг точки B на угол $\pi-2\operatorname{arctg}\frac{5}{6}=\arccos(-\frac{11}{61})$.

23.46. 2. Указание. Принять указанную ось за одну из осей новой системы координат.

23.47. $C(4,3)$, $D(-2,-5)$. Указание. Выполнить поворот на угол $\pi/2$ вокруг середины отрезка AB.

23.48. $B(-1+2\sqrt{3},-\sqrt{3}-2)$, $C(-1-2\sqrt{3},\sqrt{3}-2)$.

23.49. $C(5\pm\sqrt{3},\pm2\sqrt{3})$, $D(1\pm\sqrt{3},2\pm2\sqrt{3})$.

23.50. $\big(x_0+(x_1-x_0)\cos\alpha_k-(y_1-y_0)\sin\alpha_k, y_0+(x_1-x_0)\sin\alpha_k+(y_1-y_0)\cos\alpha_k\big)$, где $\alpha_k=\pm\dfrac{2\pi(k-1)}{n}$.

23.51. 1) $x=2x'+7y'+3$, $y=5x'+9y'+1$; 2) $x=5x'+3$, $y=4y'+5$; 3) $x=-7y'$, $y=2x'+2$; 4) $x=ax'$, $y=by'$; 5) $x=by'$, $y=ax'$.

23.52. $x = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}x' + \frac{1}{3}y'$, $y = \frac{7}{3} + \frac{2}{3}x' - \frac{1}{3}y'$; $x' = x + y - 2$, $y' = 2x - y + 3$; $O'(-1/3, 7/3)$, $\mathbf{e}'_1 = \{1/3, 2/3\}$, $\mathbf{e}'_2 = \{1/3, -1/3\}$; $O(-2, 3)$, $\mathbf{e}_1 = \{1, 2\}$, $\mathbf{e}_2 = \{1, -1\}$.

23.54. $O'(3, -2)$, $\mathbf{e}'_1 = \{2, -1\}$, $\mathbf{e}_2 = \{-5, 2\}$. **23.55.** $C^T C = I$.

23.56. $x = 6x' + 4y' - 4$, $y = -2x' + 6y' + 2$.

23.57. $O(0, 0)$, $A(4/3, -2/3)$, $C(2/3, 2/3)$, $B(-2/3, 4/3)$.

23.58. $x = -x' - y' + 2$, $y = -x' + y' + 1$.

23.59. $x = -\frac{3}{5}x' + \frac{2}{5}y' + \frac{3}{5}$, $y = -\frac{2}{5}x' - \frac{2}{5}y' + \frac{2}{5}$.

23.60. $x = -x' - 2y' + 2$, $y = -2x' - y' + 2$.

23.61. $x = -\frac{3}{5}x' - \frac{4}{5}y' + \frac{48}{25}$, $y = \frac{4}{5}x' - \frac{3}{5}y' + \frac{36}{25}$.

23.62. 1) $x = 2x' + z' + 2$, $y = 4x' + 4y' + z' + 1$, $z = x' + 4y' + 3$;
2) $x = 4x' + 5y' + 3z' + 1$, $y = 2x' + 3y' + 2z' + 1$, $z = x' + 2y' + z' + 2$.

23.63. а) $O'(-1, 3, -2)$, $\mathbf{e}'_1 = \{1, -1, -1\}$, $\mathbf{e}'_2 = \{1, 0, -1\}$, $\mathbf{e}'_3 = \{1, 1, 0\}$;
б) $O'(-1, 0, 1)$, $\mathbf{e}'_1 = \{-2, 0, 1\}$, $\mathbf{e}'_2 = \{-1, -1, 3\}$, $\mathbf{e}'_3 = \{-1, -1, 1\}$.

23.64. $x = -\frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}z' + 1$, $y = -x' + 1$, $z = \frac{5}{2}x' + \frac{3}{2}y' - \frac{1}{2}z' - 1$; $O'(1, 1, -1)$, $\mathbf{e}'_1 = \{-1/2, -1, 5/2\}$, $\mathbf{e}'_2 = \{-1/2, 0, 3/2\}$, $\mathbf{e}'_3 = \{-1/2, 0, -1/2\}$; $O(1, -1/2, 3/2)$, $\mathbf{e}_1 = \{0, -1/2, -3/2\}$, $\mathbf{e}_2 = \{-1, 3/2, -1/2\}$, $\mathbf{e}_3 = \{0, 1/2, -1/2\}$

23.65.1. б) Нет, неверно.

23.66. $x = \frac{1}{\sqrt{2}}x'$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}y'$, $z = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' + z'$.

23.67. $x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{2}y' + \frac{1}{2}z'$, $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}z'$, $z = \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z'$.

23.68. $x = \frac{1}{3}x' - \frac{2}{3}y' + \frac{2}{3}z' + 1$, $y = -\frac{2}{3}x' - \frac{2}{3}y' - \frac{1}{3}z' + 2$, $z = \frac{2}{3}x' - \frac{1}{3}y' - \frac{2}{3}z' + 3$.

23.69. $x = -\frac{2}{3}x' - \frac{1}{\sqrt{18}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z' + 2$, $y = -\frac{1}{3}x' + \frac{2\sqrt{2}}{3}y' + 1$, $z = -\frac{2}{3}x' - \frac{1}{\sqrt{18}}y' - \frac{1}{\sqrt{2}}z' + 2$.

23.70. $x = \frac{1}{2}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' - \frac{1}{2}z' - 1$, $y = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' - \frac{1}{2}z' + 3$, $z = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}z' + 5$.

23.71. $x = \frac{1}{3}x' - \frac{2}{3}y' - \frac{2}{3}z' + \frac{2}{3}$, $y = -\frac{2}{3}x' + \frac{1}{3}y' - \frac{2}{3}z' + \frac{2}{3}$, $z = -\frac{2}{3}x' - \frac{2}{3}y' + \frac{1}{3}z' + \frac{2}{3}$.

23.72. $C^T C = I$. **23.73.** $x = -2x' - 2y' - z' + 2$, $y = y' + z'$, $z = z'$.

23.74. $x = 2x' + y' + \frac{1}{3}z' - 1$, $y = y' + \frac{1}{3}z'$, $z = -x' - y' + 1$.

23.75. $x = \frac{2}{3}x' - \frac{1}{3}y' - \frac{1}{3}z' + \frac{1}{3}$, $y = -\frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' - \frac{1}{3}z' + \frac{1}{3}$, $z = -\frac{1}{3}x' - \frac{1}{3}y' - \frac{1}{3}z' + \frac{1}{3}$.

23.76. $x = 2x' + 2y' + z'$, $y = x' + 2y' + z'$, $z = -x' - y' - z' + 1$.

23.77. $x = -z' + 1$, $y = y' + 2z' - 1$, $z = -x' - y' - 3z' + 2$.

§24

24.1. Нет. **24.2.** а,б) Нет. в,г) Да.

24.3. Нет в обоих случаях. **24.4.** а) 20; б) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; в) 0; г) 18; д) -3.

24.6. $-3/2$. **24.7.** -13. **24.9.** $\pi/3$.

24.10. Указание. Предположить противное, затем каждое из десяти получающихся неравенств возвести почленно в квадрат и сложить все неравенства.

24.11. -19. **24.12.** $\alpha = \arccos(-4/5)$.

24.13. $\alpha = \arccos(4/5)$. **24.14.** $\sqrt{10}$, $5\sqrt{2}$.

24.15. $\arccos(1/3)$. **24.16.** $\arccos(1/3)$, $\arccos(2/3)$.

24.17. $\pi - \arccos(\sqrt{2}/3)$. **24.18.** $\pi/2$. **24.19.** $\arccos(1/6)$.

24.20. Указание. Выразить векторы, коллинеарные биссектрисам, через три вектора, выходящих из вершины трехгранного угла и параллельных его ребрам.

24.21. Указание. Выразить векторы, коллинеарные указанным отрезкам, через три вектора, выходящих из одной вершины и параллельных ребрам.

24.22. Указание. См. указание к задаче 24.21.

24.23. Указание. См. указание к задаче 24.21.

24.24. Указание. См. указание к задаче 24.21.

24.25. $2a(\sqrt{3} - \sqrt{2})$. **24.26.** $\frac{\lambda}{1+\lambda}a^2 + \frac{1}{1+\lambda}b^2 - \frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}c^2$.

24.27. $\frac{|\mathbf{a}|^2\,\mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2\,\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2}$. Указание. Использовать задачу 13.22.

24.28. $\frac{|\mathbf{c}|^2 - (\mathbf{b}, \mathbf{c})}{|\mathbf{b} - \mathbf{c}|^2}\,\mathbf{b} + \frac{|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{b}, \mathbf{c})}{|\mathbf{b} - \mathbf{c}|^2}\,\mathbf{c}$. Указание. См. указание к предыдущей задаче.

24.29. $\frac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})\,\mathbf{a} - |\mathbf{a}|^2\,\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2}$.

24.30. $\frac{\Delta_a}{\Delta}\mathbf{a} + \frac{\Delta_b}{\Delta}\mathbf{b} + \frac{\Delta_c}{\Delta}\mathbf{c}$, где $\Delta = |\mathbf{a} - \mathbf{c}|^2 |\mathbf{b} - \mathbf{c}|^2 - (\mathbf{a} - \mathbf{c}, \mathbf{b} - \mathbf{c})^2$,

$\Delta_a = \begin{vmatrix} (\mathbf{b}, \mathbf{b} - \mathbf{c}) & (\mathbf{c}, \mathbf{b} - \mathbf{c}) \\ (\mathbf{b}, \mathbf{c} - \mathbf{a}) & (\mathbf{c}, \mathbf{c} - \mathbf{a}) \end{vmatrix}$, $\Delta_b - \begin{vmatrix} (\mathbf{c}, \mathbf{b} - \mathbf{c}) & (\mathbf{a}, \mathbf{b} - \mathbf{c}) \\ (\mathbf{c}, \mathbf{c} - \mathbf{a}) & (\mathbf{a}, \mathbf{c} - \mathbf{a}) \end{vmatrix}$,

$\Delta_c = \begin{vmatrix} (\mathbf{a}, \mathbf{b} - \mathbf{c}) & (\mathbf{b}, \mathbf{b} - \mathbf{c}) \\ (\mathbf{a}, \mathbf{c} - \mathbf{a}) & (\mathbf{b}, \mathbf{c} - \mathbf{a}) \end{vmatrix}$.

24.32. Указание. Пусть O – точка пересечения диагоналей. Выразить все квадраты в искомой величине через радиус-векторы точек A, B, C, D, X.

24.33. Указание. Показать, например, что $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC}) = 0$.

24.34. Указание. Пусть O – точка пересечения медиан треугольника ABC. Выразить все квадраты расстояний через радиус-векторы точек A, B, C, X.

24.34.1. Указание. См. задачи 13.37 и 13.45.

24.34.2. Указание. Использовать задачу 13.46.

24.35. $\pi/2$. Указание. Пусть O – точка пересечения диагоналей. Выразить квадраты всех сторон через радиус-векторы точек вершин четырехугольника.

24.36. Указание. Выразить векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{DA}$ через векторы $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{MN}$.

24.37. Указание. Использовать радиус-векторы точек A, B, C, D, M относительно произвольной точки O.

24.38. а) $2nR^2$; б) n^2R^2.

24.39. Указание. Выразить квадраты в левой части доказываемого соотношения через радиус-векторы точек $A_1, \ldots, A_n$, X.

24.40. Указание. См. указание к предыдущей задаче.

24.42. а) 31; б) 6; в) 0; г) -2.

24.43. а) $\arccos(1/3)$; б) $\arccos(1/3)$; в) $\pi/2$; г) $\pi/3$.

24.44. а) 0; б) 27; в) 12; г) -30.

24.45. а) $\{3, 2, 4\}$; б) $\{73, 32, 8\}$; в) $\{84, 34, 64\}$. **24.46.** $\{2/3, -2/3, -1/3\}$.

24.47. $\pi/4$ или $3\pi/4$. **24.48.** $\arcsin(6/11)$, $\arcsin(2/11)$, $\arcsin(9/11)$.

24.49. $\pi/3$. **24.50.** $\arccos(\sqrt{3}/4)$. **24.51.** $\arccos(-4/9)$.

24.52. $\widehat{A} = \arccos\sqrt{3/5}$, $\widehat{B} = \pi/2$, $\widehat{C} = \arccos\sqrt{2/5}$.

24.53. $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + 2bc\cos\alpha + 2ca\cos\beta + 2ab\cos\gamma}$,

$$\cos\widehat{DOA} = \frac{a + b\cos\gamma + c\cos\beta}{d}, \quad \cos\widehat{DOB} = \frac{a\cos\gamma + b + c\cos\alpha}{d},$$

$$\cos\widehat{DOC} = \frac{a\cos\beta + b\cos\alpha + c}{d}.$$

24.54. $d = 15$, $\widehat{BAC_1} = \arccos(25/27)$. **24.55.** $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \pi/2$.

24.56. $\{-24, 32, 30\}$. **24.57.** $\{3, -3, -3\}$.

24.58. $\{-5/\sqrt{2}, 11/\sqrt{2}, -4/\sqrt{2}\}$.

24.59. $\mathbf{x} = \dfrac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$, $\mathbf{y} = \mathbf{b} - \dfrac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$.

24.60. $\mathbf{x} = \dfrac{|\mathbf{b}|^2\mathbf{a} - (\mathbf{a}, \mathbf{b})\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}, \mathbf{b})^2}$.

24.61. $\mathbf{x} = |G(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})|^{-1}\begin{vmatrix} \mathbf{a} & (\mathbf{a}, \mathbf{b}) & (\mathbf{a}, \mathbf{c}) \\ \mathbf{b} & (\mathbf{b}, \mathbf{b}) & (\mathbf{b}, \mathbf{c}) \\ \mathbf{c} & (\mathbf{c}, \mathbf{b}) & (\mathbf{c}, \mathbf{c}) \end{vmatrix}$, где $G(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ – матрица Грама векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

24.62. $\mathbf{a} - \dfrac{(\mathbf{a}, \mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}$. **24.63.** $\{-6, 6, -3\}$. **24.64.** 6.

24.65. $\sqrt{3}$. **24.66.** $\{6, 6, 0\}$. **24.67.** $\{3, -1, 1\}$. **24.68.** $3\mathbf{a}/2$.

24.69. Нет, так как из этого следует лишь, что $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d} \perp \mathbf{e}$.

24.70. Указание. Показать, что вектор, равный сумме этих десяти векторов, определяет требуемую ось.

24.71. $\{5/3, 2/3, 1/3\}$. Указание. Показать, что $\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{c}$ – меньшая внутренняя диагональ.

24.72. а) $|\mathbf{e}_1|=\sqrt{g_{11}}$, $|\mathbf{e}_2|=\sqrt{g_{22}}$; б) $\cos\omega=g_{12}/\sqrt{g_{11}g_{22}}$; в) $\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}$.

24.73. а) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}a_ib_j$; б) $|\mathbf{a}| = \sqrt{g_{11}a_1^2+2g_{12}a_1a_2+g_{22}a_2^2}$, $\cos\alpha = (g_{11}a_1+g_{12}a_2)/(\sqrt{g_{11}}|\mathbf{a}|)$, $\cos\beta = (g_{12}a_1+g_{22}a_2)/(\sqrt{g_{22}}|\mathbf{a}|)$;
в) $\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \dfrac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$.

24.74. $\{4/5, -1/5\}$. **24.75.** $2\sqrt{61}$.

24.76. $AB = 6$, $AC = 4$, $\widehat{A} = \pi/3$.

24.77. $|\mathbf{e}_1| = 2$, $|\mathbf{e}_2| = 1$, $(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2}) = 2\pi/3$.

24.78. $|\mathbf{e}_1| = \sqrt{10}/2$, $|\mathbf{e}_2| = 3\sqrt{2}/2$, $(\widehat{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2}) = \arccos(-2/\sqrt{5})$.

24.79. $A_1B_1 = 1$, $A_1C_1 = 5$, $\widehat{A_1} = \arccos(4/5)$.

24.80. а) $G(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2) = [G(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)]^{-1}$;
б) $\mathbf{f}_1 = g^{-1}\{g_{22}, -g_{12}\}$, $\mathbf{f}_2 = g^{-1}\{-g_{12}, g_{11}\}$, где $g = |G(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)|$;
в) $|\mathbf{f}_1| = \sqrt{g_{22}/g}$, $|\mathbf{f}_2| = \sqrt{g_{11}/g}$; г) $\arccos(-g_{12}/(g_{11}g_{22}))$.

24.82. 1) $\mathbf{e}_1' = \left\{\cos\varphi - \dfrac{g_{12}\sin\varphi}{\sqrt{g}}, \dfrac{g_{11}\sin\varphi}{\sqrt{g}}\right\}$,
$$\mathbf{e}_2' = \left\{-\frac{g_{22}\sin\varphi}{\sqrt{g}}, \cos\varphi + \frac{g_{12}\sin\varphi}{\sqrt{g}}\right\};$$
2) $\mathbf{e}_1' = g^{-1/2}\{-g_{12}, g_{11}\}$, $\mathbf{e}_2' = g^{-1/2}\{-g_{22}, g_{12}\}$.

24.83. $\mathbf{a}' = a_1\mathbf{e}_1' + a_2\mathbf{e}_2'$, где координаты $\mathbf{e}_1'$ и $\mathbf{e}_2'$ такие же, как и в предыдущей задаче.

24.84. 1) $\mathbf{e}_1' = \left\{\dfrac{\sin(\omega-\varphi)}{\sin\omega}, \dfrac{\sin\varphi}{\sin\omega}\right\}$, $\mathbf{e}_2' = \left\{-\dfrac{\sin\varphi}{\sin\omega}, \dfrac{\sin(\omega+\varphi)}{\sin\omega}\right\}$;
2) $\mathbf{e}_1' = (\sin\omega)^{-1}\{-\cos\omega, 1\}$, $\mathbf{e}_2' = (\sin\omega)^{-1}\{-1, \cos\omega\}$.

24.85. а) $|\mathbf{e}_1| = \sqrt{g_{11}}$, $|\mathbf{e}_2| = \sqrt{g_{22}}$, $|\mathbf{e}_3| = \sqrt{g_{33}}$;
б) $\cos\omega_{12} = g_{12}/\sqrt{g_{11}g_{22}}$, $\cos\omega_{23} = g_{23}/\sqrt{g_{22}g_{33}}$, $\cos\omega_{13} = g_{13}/\sqrt{g_{11}g_{33}}$.

24.87. а) $|\mathbf{a}| = \sqrt{g_{11}a_1^2+g_{22}a_2^2+g_{33}a_3^2+2g_{12}a_1a_2+2g_{23}a_2a_3+2g_{13}a_1a_3}$;
б) $\cos(\widehat{\mathbf{a}, \mathbf{b}}) = \dfrac{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$, где $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij}a_ib_j$.

24.88. а) $\cos\alpha_1 = \dfrac{g_{11}a_1+g_{12}a_2+g_{13}a_3}{\sqrt{g_{11}}|\mathbf{a}|}$, $\cos\alpha_2 = \dfrac{g_{21}a_1+g_{22}a_2+g_{23}a_3}{\sqrt{g_{22}}|\mathbf{a}|}$,
$\cos\alpha_3 = \dfrac{g_{31}a_1+g_{32}a_2+g_{33}a_3}{\sqrt{g_{33}}|\mathbf{a}|}$, где $|\mathbf{a}|$ определяется равенством из предыдущей задачи;
б) $\cos\alpha_1 = \dfrac{a_1+a_2\cos\omega_{12}+a_3\cos\omega_{13}}{|\mathbf{a}|}$, $\cos\alpha_2 = \dfrac{a_1\cos\omega_{21}+a_2+a_3\cos\omega_{23}}{|\mathbf{a}|}$,
$$\cos\alpha_3 = \frac{a_1\cos\omega_{31}+a_2\cos\omega_{32}+a_3}{|\mathbf{a}|},$$
где $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2+2a_1a_2\cos\omega_{12}+2a_2a_3\cos\omega_{23}+2a_3a_1\cos\omega_{13}}$.

24.89. G^{-1}. **24.92.** $\left\{\sum_{j=1}^{3} g_{1j}a_j, \sum_{j=1}^{3} g_{2j}a_j, \sum_{j=1}^{3} g_{3j}a_j\right\}$.

24.93. $|\mathbf{f}_1| = |\mathbf{f}_2| = |\mathbf{f}_3| = \sqrt{6}/2$, $(\widehat{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2}) = (\widehat{\mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3}) = (\widehat{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_3}) = \arccos(-1/3)$.

24.94. $\cos\theta_1 = \dfrac{\sqrt{\Omega}}{\sin\omega_{23}}$, $\cos\theta_2 = \dfrac{\sqrt{\Omega}}{\sin\omega_{31}}$, $\cos\theta_3 = \dfrac{\sqrt{\Omega}}{\sin\omega_{12}}$,
где $\Omega = \begin{vmatrix} 1 & \cos\omega_{12} & \cos\omega_{13} \\ \cos\omega_{12} & 1 & \cos\omega_{23} \\ \cos\omega_{13} & \cos\omega_{23} & 1 \end{vmatrix}$.

§25

25.1. Да. **25.2.** а) Нет; б) да; в) нет; г) да. **25.3.** Нет.
25.4. $\{-12, 7, 4\}$, $\{4, -2, -1\}$, $\{5, -3, -2\}$. Образуют.
25.5. 1) $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$; 2) $-2[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$; 3) $6[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. **25.7.** $\alpha = -15$.
25.13. $\arcsin(1/3)$. **25.14.** $\arccos(1/3)$.
25.17. Либо векторы нулевые, либо имеют единичную длину и попарно ортогональны.
25.18. 9. **25.21.** Указание. Показать, что $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BM}] = [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CN}]$.
25.22. $7S$. Указание. Вычислить $[\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{B_1C_1}]$.
25.23. 1/7. Указание. Выразить $[\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{QR}]$ через $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}]$.
25.24. а) 12; б) 8; в) $3\sqrt{19/2}$; г) $7\sqrt{3}/2$. Указание. Вычислить $|[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}]|/2$.
25.25. 93/2.
25.28. Указание. Воспользоваться предыдущей задачей.
25.29. Указание. Воспользоваться задачей 25.26. **25.33.** $5S$.
25.34. Указание. Показать, что $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CE}] = \mathbf{0}$.
25.35. $\{6\sqrt{5}/25, -\sqrt{5}/5, -8\sqrt{5}/25\}$.
25.36. $\{1/2, (-1-\sqrt{5})/4, (-1+\sqrt{5})/4\}$.
25.37. $\{5\sqrt{2}, -11/\sqrt{2}, 4/\sqrt{2}\}$. **25.38.** $\{2, -28, 3\}$.
25.39. $\mathbf{x} = \dfrac{\alpha[\mathbf{b}, \mathbf{c}] + \beta[\mathbf{c}, \mathbf{a}] + \gamma[\mathbf{a}, \mathbf{b}]}{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}$. Указание. Разложить $\mathbf{x}$ по векторам $[\mathbf{b}, \mathbf{c}]$, $[\mathbf{c}, \mathbf{a}]$, $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.
25.40. $\{0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\}$. **25.41.** $\{-7/\sqrt{74}, 3/\sqrt{74}, 4/\sqrt{74}\}$.
25.42. $\{-\sqrt{2}/6, \sqrt{2}/6, 4\sqrt{2}/6\}$.
25.43. $\cos\alpha = -2/\sqrt{10}$, $\cos\beta = (1+\sqrt{2})/\sqrt{10}$, $\cos\gamma = (1-\sqrt{2})/\sqrt{10}$.
25.44. $\{5/\sqrt{26}, -1/\sqrt{26}, 0\}$; луч лежит вне трехгранного угла.
25.45. Тройки одинаково ориентированы.
25.46. $\mathbf{d} = \operatorname{sgn}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})\big(|\mathbf{a}|[\mathbf{b}, \mathbf{c}] + |\mathbf{b}|[\mathbf{c}, \mathbf{a}] + |\mathbf{c}|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]\big)$. Указание. Перейти к взаимной тройке (см. пример 25.5).
25.47. $\cos\alpha = \dfrac{\Delta_\alpha}{\sin\varphi}$, $\cos\beta = \dfrac{\Delta_\beta}{\sin\varphi}$, $\cos\gamma = \dfrac{\Delta_\gamma}{\sin\varphi}$, где
$\Delta_\alpha = \begin{vmatrix} \cos\beta_1 & \cos\gamma_1 \\ \cos\beta_2 & \cos\gamma_2 \end{vmatrix}$, $\Delta_\beta = \begin{vmatrix} \cos\gamma_1 & \cos\alpha_1 \\ \cos\gamma_2 & \cos\alpha_2 \end{vmatrix}$, $\Delta_\gamma = \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\beta_1 \\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2 \end{vmatrix}$,
φ – угол между данными лучами и $\sin\varphi = \sqrt{\Delta_\alpha^2 + \Delta_\beta^2 + \Delta_\gamma^2}$.
25.48. $\sin\varphi = 4\sqrt{2}/45$.
25.49. 48. **25.50.** $abc\sqrt{1 + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma}$.
25.52. 1/3. **25.53.** 7.
25.54. 1/27. Указание. Выбрать базисными векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.

25.57. $\dfrac{|(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{n})|}{|\mathbf{n}|} = \mathrm{abs}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix} \Big/ \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}.$

25.58. Указание. Выбрать базисными векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$.

25.59. Указание. Показать, что смешанное произведение направляющих векторов этих биссектрис равно нулю.

25.60. $\mathbf{b} = \mathbf{a}\cos\varphi + [\mathbf{n},\ \mathbf{a}]\sin\varphi$.

25.61. $\overrightarrow{OH} = \dfrac{(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c})}{|[\mathbf{b},\ \mathbf{c}] + [\mathbf{c},\ \mathbf{a}] + [\mathbf{a},\ \mathbf{b}]|^2}([\mathbf{b},\ \mathbf{c}] + [\mathbf{c},\ \mathbf{a}] + [\mathbf{a},\ \mathbf{b}])$.

25.62. Указание. Ввести ортонормированный базис пространства (см. пример 25.6).

25.63. Указание. См. указание к предыдущей задаче.

25.64. Либо вектор $\mathbf{b}$ перпендикулярен векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$, либо векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{c}$ коллинеарны.

25.64.1. Векторы $[\mathbf{b},\ \mathbf{c}]$ и $[\mathbf{a},\ \mathbf{d}]$ ортогональны.

25.65. а) $(\mathbf{a},\ \mathbf{b}) = 0$; б) $\mathbf{x} = -\dfrac{[\mathbf{a},\ \mathbf{b}]}{|\mathbf{a}|^2} + \lambda\mathbf{a}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ произвольно.

25.66. б) $\mathbf{x} = \dfrac{\alpha\mathbf{a}_2 - [\mathbf{a}_1,\ \mathbf{b}]}{(\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2)}$; в) при условии $[\mathbf{a}_1,\ \mathbf{b}] = \alpha\mathbf{a}_2$ общее решение имеет вид $\mathbf{x} = \dfrac{\alpha\mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}_1|^2} + \lambda\mathbf{a}_2$, $\forall\lambda \in \mathbb{R}$.

25.67. б) $\mathbf{x} = [\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2]/(\mathbf{a}_1,\ \mathbf{b}_2)$.

25.68. Если $\mathbf{a}^4 > 4(\mathbf{b}^2 + p\,\mathbf{a}^2)$, то задача имеет два решения: $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{a} + \dfrac{[\mathbf{a},\ \mathbf{b}]}{|\mathbf{a}|^2}$, $\mathbf{y} = (1-\lambda)\mathbf{a} - \dfrac{[\mathbf{a},\ \mathbf{b}]}{|\mathbf{a}|^2}$, где $\lambda = \dfrac{\mathbf{a}^2 \pm \sqrt{\mathbf{a}^4 - 4(\mathbf{b}^2 + p\,\mathbf{a}^2)}}{2\mathbf{a}^2}$. Если $\mathbf{a}^4 = 4(\mathbf{b}^2 + p\,\mathbf{a}^2)$, то задача имеет одно решение: $\mathbf{x} = \dfrac{\mathbf{a}}{2} + \dfrac{[\mathbf{a},\ \mathbf{b}]}{|\mathbf{a}|^2}$, $\mathbf{y} = \dfrac{\mathbf{a}}{2} - \dfrac{[\mathbf{a},\ \mathbf{b}]}{|\mathbf{a}|^2}$. В остальных случаях решений нет.

25.69. а) $\cos A = \dfrac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$, $\cos B = \dfrac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma}$,

$$\cos C = \frac{\cos\gamma - \cos\beta\cos\alpha}{\sin\beta\sin\alpha}.$$

Указание. Рассмотреть трехгранный угол, ребра которого имеют направления $[\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2]$, $[\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3]$, $[\mathbf{e}_3,\ \mathbf{e}_1]$, и учесть, что его плоские углы равны $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$.

25.70. Указание. Показать, что расстояние от точки P до каждой грани равно $k \cdot |(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c})|$, где $k > 0$.

25.71. Указание. Воспользоваться результатом задачи 25.46.

25.72. $\sqrt{|G|}$. **25.73.** $V = \sqrt{|G|}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$. **25.74.** $1/V$.

25.76. $\sqrt{|G(\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3)|}\left\{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right\}$.

§26

26.1. 1) $x - 3 = 0$; 2) $x + 2y - 7 = 0$.

26.2. 1) $3x - 2y = 0$; 2) $8x - y = 0$.

26.3. 1) $5x + y - 13 = 0$; 2) $3x + y - 1 = 0$.

26.4. 1) $3x - y + 4 = 0$; 2) $5x - 3y - 15 = 0$; 3) $3x + 8y - 9 = 0$.
26.5. $\operatorname{arctg}(1/2)$.
26.6. $y = 0$, $y = 2\sqrt{3}$, $y = \sqrt{3}x + 5\sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}x + 5\sqrt{3}$.
26.7. $x + y - 6 = 0$ и $x - y + 14 = 0$. **26.8.** $x - 2y - 4 = 0$.
26.9. 9. **26.10.** $3x + 2y - 6 = 0$ и $3x + 8y + 12 = 0$.
26.11. $x = 5 + 2t$, $y = -3 - 4t$. **26.12.** $x = -6 + 7t$, $y = -4 - 3t$.
26.13. $x = -\sqrt{3}t$, $y = t$. **26.14.** $x = 3 + 3t$, $y = 5t$.
26.15. 1) $x = -2t$, $y = -\frac{5}{6} + t$; 2) $x = t$, $y = 5 - 3t$; 3) $x = t$, $y = -3$; 4) $x = 4 + 2t$, $y = t$; 5) $x = 2$, $y = t$; 6) $x = 3t$, $y = -2t$.
26.16. 1) $3x + y - 1 = 0$; 2) $7x + 5y - 34 = 0$; 3) $3x + y - 1 = 0$; 4) $y = 3$.
26.17. $y = \dfrac{k_1 + k_2}{2}x + \dfrac{b_1 + b_2}{2}$.
26.18. $x - 4y - 9 = 0$, $5x + 3y - 22 = 0$, $6x - y - 8 = 0$.
26.19. $5x + 7y - 11 = 0$. **26.20.** $x + y - 12 = 0$; $(0,0)$, $(4,8)$, $(2,10)$.
26.21. $16x + 13y - 68 = 0$, $17x + 11y - 106 = 0$.
26.22. $142x - 183y - 489 = 0$.
26.23. $x - 5y + 3 = 0$; $(1,5)$, $(-3,0)$, $(2,1)$.
26.24. $(-3,7)$, $(-6,10)$, $(9,-17)$; $9x + 5y + 4 = 0$.
26.25. $3x + 8y - 17 = 0$, $6x - y - 17 = 0$, $9x + 7y + 17 = 0$; $(-5,4)$, $(3,1)$.
26.26. Отрезок, соединяющий середину основания и середину высоты треугольника. Указание. Принять за оси координат прямые, содержащие основание и высоту треугольника.
26.27. Отрезок, соединяющий середины диагоналей. Указание. Принять за оси координат прямые, содержащие диагонали четырехугольника.
26.28. $x = 2$, $y = 6$, $z = -3$.
26.29. 1) $x + 2y + z - 9 = 0$; 2) $x + y - 2 = 0$.
26.30. $4x - 11y + 3z = 0$. **26.31.** $27x + 11y + z - 65 = 0$.
26.32. $x - z - 6 = 0$, $x + y - 10 = 0$, $x + 2y - z - 8 = 0$, $2x + y - z - 14 = 0$, $x - y - z - 2 = 0$, $2x + y + z - 16 = 0$, $5x + y - 2z - 28 = 0$.
26.33. $14x - 10y + 33z - 70 = 0$.
26.34. $x + y + z - 1 = 0$, $x + y - z - 15 = 0$, $-x + y - z - 9 = 0$ или $x - y - z - 5 = 0$.
26.35. $7x + 7y - 6z - 50 = 0$ или $-7x + 7y + 2z - 16 = 0$.
26.36. $35x + 21y - 15z - 105 = 0$. **26.37.** $a = 4$, $b = -4$, $c = 4/7$.
26.38. 27. **26.39.** $x - 2z = 0$. **26.40.** $5x - 6y - 7z + 41 = 0$.
26.41. $x = 2 - 5u + 4v$, $y = 3 + 6u - 2v$, $z = -5 + 4u$.
26.42. $x - 2y = 0$, $2x + z = 0$, $4y + z = 0$.
26.43. $5x + 3y = 0$, $x - 3z = 0$, $y + 5z = 0$.
26.44. $3x - z = 0$ и $x - z = 0$. **26.45.** $x - z - 2 = 0$.
26.46. $x = 1 + u$, $y = 7 - 13u$, $z = 8 - 14u + v$. **26.47.** $10x + 9y + 5z = 74$.
26.48. 1) $x = -13$, $y = 13$, $z = -9$; 2) $u = -1/5$, $v = 2/5$.
26.49. 1) $x = -6$, $y = -4$, $z = -3$; 2) $u + v - 1 = 0$, $u = 0$, $v = 0$; 3) $39u + 9v = 1$.
26.50. 1) $x - 4y - z + 16 = 0$; 2) $x + 5y - z + 5 = 0$; 3) $y = -2$; 4) $y + 2z - 15 = 0$.

§27

27.1. 1) Пересекаются в точке $(1,2)$; 2) параллельны; 3) совпадают; 4) пересекаются в точке $(-5,0)$; 5) параллельны; 6) пересекаются в точке $(-4,10)$.

27.2. 1) $Aa+Bb\neq 0$; 2) $Aa+Bb=0$, $Ax_0+By_0+C\neq 0$; 3) $Aa+Bb=0$, $Ax_0+By_0+C=0$.

27.3. 1) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$; 2) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & a_1 \\ y_2-y_1 & b_1 \end{vmatrix}\neq 0$;

3) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & a_1 \\ y_2-y_1 & b_1 \end{vmatrix}=0$.

27.4. 1) Совпадают; 2) пересекаются в точке $(-4,-3)$; 3) параллельны; 4) пересекаются в точке $(4,6)$; 5) совпадают.

27.5. 1) Пересекаются в точке $(15,-10)$; 2) параллельны; 3) совпадают.

27.6. $3x-2y-13=0$.

27.7. Такой прямой на существует, так как данная точка лежит на данной прямой.

27.8. $x-2=0$ и $x-3y+13=0$.

27.9. $3x-5y+9=0$, $x-y+3=0$, $x-3y+11=0$.

27.10. $x-3y-7=0$, $2x+5y-3=0$.

27.11. $3x+4y-16=0$, $5x+3y-1=0$, $2x-y-7=0$.

27.12. $2x+5y\pm 10=0$.

27.13. $x+y-7=0$. **27.15.** $x-y-7=0$, $x-2y-10=0$.

27.16. $x+2y-3=0$, $2x-y-6=0$, $x+2y-23=0$, $2x-y+14=0$.

27.17. $2x+y-1=0$, $2x-y+1=0$, $6x-3y+19=0$, $6x+3y-19=0$.

27.18. $9x+12y+20=0$, $5x-12y+36=0$.

27.19. 1) Проходят через одну точку; 2) параллельны; 3) проходят через одну точку; 4) параллельны; 5) образуют треугольник; 6) первые две прямые параллельны, а третья их пересекает.

27.20. $5x-2y=0$. **27.21.** $25x+29y-21=0$.

27.22. $38x-19y+30=0$.

27.23. $32x-9=0$, $32y-19=0$. **27.24.** $x+y-6=0$ или $x-y-8=0$.

27.25. $8x-49y+20=0$.

27.26. Определитель матрицы $\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix}$ и все миноры второго порядка, стоящие в ее первых двух строках, отличны от нуля.

27.27. $(A_1x+B_1y+C_1)\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}=(A_2x+B_2y+C_2)\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}$.

27.28. $x'=\dfrac{A_1x+B_1y+C_1}{A_1x_0+B_1y_0+C_1}$, $y'=\dfrac{A_2x+B_2y+C_2}{A_2x_0+B_2y_0+C_2}$.

27.29. 1) Пересекаются; 2) пересекаются; 3) параллельны; 4) пересекаются; 5) совпадают.

27.30. 1) $A=B=0$, $CD\neq 0$; 2) $A\neq 0$ или $B\neq 0$; 3) $A=B=D=0$, $C\neq 0$.

27.31. 1) $C\neq 0$; 2) $C=0$, $D\neq 0$; 3) $C=D=0$.

27.32. 1) Пересекаются; 2) параллельны; 3) совпадают.

27.33. 1) $\operatorname{rg} A=3$; 2) $\operatorname{rg} A=2$, $\operatorname{rg} B=3$; 3) $\operatorname{rg} A=\operatorname{rg} B=2$.

27.34. $x-2y+4z-17=0$.

27.35. $2x+3y+4z-1=0$, $x+3y+9=0$, $z-1=0$.

27.36. $x-2y-3z=0$, $4x-y+2z=0$ и $2x+3y+z=0$, $3x-6y-2z=0$.

27.37. 1) $\operatorname{rg} G=3$; 2) $\operatorname{rg} G=\operatorname{rg} F=2$ и никакие две строки матрицы G не пропорциональны; 3) $\operatorname{rg} G=2$, $\operatorname{rg} F=3$ и никакие две строки матрицы G не пропорциональны; 4) $\operatorname{rg} G=2$, $\operatorname{rg} F=3$ и две строки матрицы G пропорциональны; 5) $\operatorname{rg} G=1$, $\operatorname{rg} F=2$ и никакие две строки матрицы F не пропорциональны; 6) $\operatorname{rg} G = \operatorname{rg} F = 2$ и две строки матрицы F пропорциональны; 7) $\operatorname{rg} G = 1$, $\operatorname{rg} F = 2$ и две строки матрицы F не пропорциональны; 8) $\operatorname{rg} G = \operatorname{rg} F = 1$.

27.38. 1) Пересекаются в точке $(3, 5, 7)$; 2) параллельны; 3) проходят через одну общую прямую; 4) попарно пересекаются, причем прямая пересечения любых двух плоскостей параллельна третьей плоскости; 5) первая и третья плоскости параллельны, вторая плоскость их пересекает.

27.39. $6x + 9y - 22z = 0$. **27.40.** $20x + 19y - 5z + 41 = 0$.

27.41. $5y + 13z - 60 = 0$.

27.42. $2x - 2y - 2z - 1 = 0$ и $14x - 2y + 2z - 21 = 0$. **27.43.** 2.

27.44. $3x + 5y - 4z + 25 = 0$. **27.45.** $7x + y - 3z = 0$.

27.46. $x + 3y - 2z - 10 = 0$. **27.47.** $3x + 4y - z + 1 = 0, x - 2y - 5z + 3 = 0$.

27.48. $41x - 19y + 52z - 68 = 0$, $33x + 4y - 5z - 63 = 0$.

27.49. $11x + 16y + 5z + 4 = 0$. **27.50.** $4y - 3z - 3 = 0$.

27.51. $16x + 50y - 3z - 132 = 0$.

27.52. 1) $10x - 7z = 0$; 2) $6y - 7 = 0$; 3) $39x - 29y - 7z = 0$.

27.53. $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \end{vmatrix} = 0, \operatorname{rg} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{bmatrix} = 3.$

27.54. Определитель матрицы $\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \end{bmatrix}$ и все миноры третьего порядка, стоящие в ее первых трех строках, отличны от нуля.

§28

28.1. $Q \in \angle BMC$, $R \in \angle CMD$, $S \in \angle DMA$, $T \in \angle BMC$.

28.2. 1) Принадлежат смежным углам; 2) принадлежат одному углу; 3) принадлежат вертикальным углам.

28.3. Точки A, B, C принадлежат одной полосе, точки D и F – одной внешней области, точка E – другой внешней области.

28.4. Пересекает продолжение отрезка AB за точку B.

28.6. Принадлежит обоим отрезкам. **28.7.** 9/8.

28.8. $-\dfrac{1}{6} \le u \le \dfrac{1}{3}$.

28.9. $(Ax_0 + By_0 + C_1)(Ax_0 + By_0 + C_2) < 0$. **28.10.** $(C_1 - D)(D - C_2) > 0$.

28.11. Точка M лежит на продолжении стороны BC за точку B; точка N лежит в области, ограниченной стороной AB и продолжениями сторон CB за точку B и стороны CA за точку A; точка P лежит в области, ограниченной продолжениями сторон CB и AB за точку B.

28.12. Числа $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1$, $A_2x_0 + B_2y_0 + C_2$, $A_3x_0 + B_3y_0 + C_3$ должны иметь соответственно или такие же знаки, как числа $\begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} A_3 & B_3 \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$, или противоположные знаки.

28.13. Параллельна стороне BC и пересекает продолжения сторон BA и CA за точку A.

28.14. Точки A, B, C лежат по одну сторону от плоскости, точки D и E – по другую сторону.

28.15. Точки A, B лежат внутри одного двугранного угла, точка E – внутри угла, вертикального к нему, точки C и D – в вертикальных углах, смежных с углом, содержащим точку A.

28.16. Точки A, B лежат между данными плоскостями, а точки C и D – в разных внешних областях.

28.17. Пересекает продолжение отрезка AB за точку A.

28.18. 1) $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \neq Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D$;

2) $(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D) < 0$;

3) $(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D) > 0$ и $|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D| < |Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D|$;

4) $(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D) > 0$ и $|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D| > |Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D|$.

28.19. $(D_1 - E)(E - D_2) > 0$. **28.20.** $(ABC) = 4/39$.

28.21. Пусть $\Delta \equiv \begin{vmatrix} B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \end{vmatrix} \neq 0$ (в силу задачи 27.37(3) $\operatorname{rg} F = 3$).

Тогда три числа

$$\frac{\Delta}{\begin{vmatrix} B_2 & B_3 \\ C_2 & C_3 \end{vmatrix}(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1)}, \quad \frac{\Delta}{\begin{vmatrix} B_3 & B_1 \\ C_3 & C_1 \end{vmatrix}(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2)},$$

$$\frac{\Delta}{\begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix}(A_3x_0 + B_3y_0 + C_3z_0 + D_3)}$$ должны быть больше 1.

28.22. $(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1)d_1 < 0$, $(A_ix_0 + B_iy_0 + C_iz_0 + D_i)d_i > 0$, $i = 2, 3, 4$, где d_i – алгебраическое дополнение элемента D_i в матрице $\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \end{bmatrix}$.

28.23. $(A_ix_0 + B_iy_0 + C_iz_0 + D_i)d_i > 0$, $i = \overline{1,4}$, где d_i – алгебраическое дополнение элемента D_i в матрице $\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \end{bmatrix}$.

§29

29.1. $3x - 4y + 12 = 0$. **29.2.** $(2, -7)$. **29.3.** $(2, 3)$.

29.4. $22x + 33y - 35 = 0$, $5x - y + 3 = 0$, $17x + 34y - 38 = 0$,

29.5. $C(2, 4)$.

29.6. $BC: x - y - 3 = 0$, $AC: 4x + 5y - 20 = 0$, $CK: 3x - 12y - 1 = 0$.

29.7. $39x - 9y - 4 = 0$.

29.8. $2x + 7y + 22 = 0$, $7x + 2y - 13 = 0$, $x - y + 2 = 0$.

29.9. $3x + 4y - 15 = 0$. **29.10.** $(29/18, 47/54)$.

29.11. $3x - 2y + 11 = 0$, $2x + y - 9 = 0$, $x + 4y - 1 = 0$.

29.12. $M(-1/2, 1/2)$.

29.13. $3x - 2y + 8 = 0$, $2x + 3y - 56 = 0$, $3x - 2y - 10 = 0$.

29.14. $M(2/5, 13/5)$ или $M(4/7, 17/7)$.

29.15. $21x - 13y - 185 = 0$, $23x - 9y - 185 = 0$.

29.16. $4x - y - 5 = 0$. Указание. Найти точки, симметричные точке A относительно данных биссектрис.

29.17. Основание: $x + 7y - 8 = 0$, $x + 7y - 58 = 0$, боковые стороны: $3x - 4y - 24 = 0$, $4x + 3y + 18 = 0$.

29.18. $x + 3y + 12 = 0$, $3x - y - 4 = 0$, $3x - y + 16 = 0$.

29.19. $5x + y - 16 = 0$, $x - 5y + 2 = 0$.

29.20. $72x - y = 0$, $12x + 71y = 0$. **29.21.** $(4,0)$ и $(-1,5)$.

29.22. 1) 5; 2) -7; 3) $-21/20$; 4) $56/33$.

29.23. $5x - 12y + 62 = 0$, $x - 2 = 0$.

29.24. Основание $2x - 3y + 7 = 0$, боковые стороны: $14x + 5y + 23 = 0$, $10x + 11y - 95 = 0$.

29.25. $2x - y + 4 = 0$. **29.26.** $x = 2$. **29.27.** $C(6, 31/4)$.

29.28. $12x - y - 23 = 0$, $26x - 7y + 71 = 0$, $2x - 5y + 1 = 0$ или $8x + 9y - 25 = 0$, $14x + 23y + 65 = 0$, $2x - 5y + 1 = 0$.

29.29. $x - (2 \pm \sqrt{3})y - 2 = 0$.

29.30. $x - 5y + 23 = 0$ или $5x + y + 11 = 0$.

29.31. $x - y + 1 = 0$, $3x - y - 1 = 0$, $x - 2y + 5 = 0$, $C(7/5, 16/5)$ или $x - y + 1 = 0$, $x - 3y + 5 = 0$, $2x - y - 2 = 0$, $C(11/5, 12/5)$.

29.32. $CA : x + 3 = 0$, $CB : 2x - 11y + 28 = 0$ или $CA : 3x - 4y + 17 = 0$, $CB : 2x + y + 4 = 0$.

29.33. $3x + y + 16 = 0$. **29.34.** $(2, -4)$. **29.35.** $x + 3y - 13 = 0$.

29.36. -7, 2, $1/3$. **29.37.** 1) $-\dfrac{5}{13}$; 2) $-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

29.38. В тупом угле.

29.39. $(A_1A_2 + B_1B_2)\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \end{vmatrix} < 0$.

29.40. $5x + 12y + 64 = 0$, $5x + 12y - 66 = 0$. **29.41.** $\dfrac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

29.42. $x + 2y + 3 = 0$, $x + 2y + 7 = 0$ или $x - 2y + 3 = 0$, $x - 2y + 7 = 0$.

29.43. 1) $6x + 1 = 0$, $2y - 9 = 0$; 2) $64x + 8y + 11 = 0$, $14x - 112y + 41 = 0$; 3) $x = 0$, $y = 0$; 4) $(3 \pm \sqrt{5})x + 2(2 \pm \sqrt{5})y = 0$.

29.44. 1) $4x - 4y + 5 = 0$; 2) $12x - 12y - 1 = 0$.

29.45. 1) $3x + y - 10 = 0$; 2) $8x - 12y + 3 = 0$. **29.46.** $(3, 2)$.

29.47. $(0, 2\sqrt{2} \pm \sqrt{2})$. **29.48.** $(8, 1)$ и $(152/49, -191/49)$.

29.49. $(3, 5)$, $(-37, 45)$. **29.50.** $(-3/10, 0)$, $(0, 9/2)$.

29.51. $(0, 6)$, $(-1, 13/2)$. **29.52.** $(-10, 1)$, $(-4, 3)$.

29.53. $(5, 5)$, $(-3, 11)$, $(3, 19)$ и $(11, 13)$.

29.54. $3x - y - 21 = 0$, $3x - y - 1 = 0$.

29.55. $5x - 12y + 46 = 0$, $5x - 12y - 32 = 0$.

29.56. $y + 1 = 0$, $3x + 4y - 17 = 0$. **29.57.** $4x + 3y + 3 = 0$, $y + 1 = 0$.

29.58. $x - 10 = 0$ или $x + 4 = 0$. **29.59.** $(3 \pm \sqrt{3})x + 4y = 0$.

29.60. $3x + 4y - 64 = 0$, $3x + 4y - 14 = 0$, $4x - 3y - 2 = 0$, $4x - 3y + 48 = 0$; $(0, 16)$, $(8, 10)$, $(2, 2)$, $(-6, 8)$.

29.61. $(0, 1)$. **29.62.** $C(-2, 4)$, $r = \sqrt{2}$ или $C(-3, 1)$, $r = 2\sqrt{2}$.

29.63. $(5/12, -5/12)$.

29.64. $(-2, -6)$. **29.65.** $x - y = 0$, $7x - 56y + 25 = 0$, $77x + 21y - 50 = 0$.

29.66. $11x + 3y + 10 = 0$.

29.67. $3x + 4y - 64 = 0$, $3x + 4y - 14 = 0$, $4x - 3y - 2 = 0$, $4x - 3y + 48 = 0$.

29.68. $2x - 11y - 23 = 0$, $2x - 11y - 73 = 0$.

29.69. $3x + y - 14 = 0$, $x - 3y + 32 = 0$, $3x + y + 11 = 0$, $x - 3y - 18 = 0$.

29.70. $3x - y + 9 = 0$, $3x - y - 3 = 0$, $x + 3y + 7 = 0$.

29.71. $y = 0$, $y = 5$ и $20x + 21y - 20 = 0$, $20x + 21y - 165 = 0$.

29.72. $x-3y+1=0$, $x-3y+12=0$, $3x+y-1=0$, $3x+y+10=0$ или $7x+y-15=0$, $7x+y-26=0$, $x-7y+7=0$, $x-7y-4=0$.

29.73. $AB: 3x+5y-57=0$, $BC: 5x-3y+37=0$, $CD: 3x+5y-9=0$, $DA: 5x-3y-11=0$ или $AB: 9x-y-27=0$, $BC: x+9y-31=0$, $CD: 9x-y+21=0$, $DA: x+9y-79=0$.

29.74. $3x+y-14=0$ или $x-3y+12=0$.

29.75. $AB: x+2y-3=0$, $CD: x+2y-23=0$; $BC: 2x-y-6=0$, $AD: 2x-y+14=0$ или $BC: 2x+y-18=0$, $AD: 2x+y+2=0$.

29.76. Окружность, построенная на заключенном между данными прямыми отрезке прямой, перпендикулярной к ним, как на диаметре, за исключением концов этого диаметра.

29.77. Пусть P, Q, R – точки пересечения биссектрис внутренних углов при вершинах A, B и C со сторонами BC, CA и AB соответственно. Искомое геометрическое место состоит из отрезка PQ и лучей прямых PR и QR с началом в точках P и Q соответственно, не содержащих точки R. Указание. Принять за оси координат катеты треугольника.

29.78. Пара прямых: $A_1x+B_1y+C_1=\pm\lambda(A_2x+B_2y+C_2)$,
где $\lambda=k\sqrt{(A_1^2+B_1^2)/(A_2^2+B_2^2)}$.

29.79. $\varphi=\arccos(4/13)$. **29.80.** $x+20y+7z=0$, $x-z=0$.

29.81. $x+20y+7z-12=0$, $x-z+4=0$. **29.82.** 2/7, 3/7, 6/7.

29.82.1. $\sqrt{a^2+b^2}$.

29.83. 1) $-\dfrac{4}{3\sqrt{21}}$; 2) $-\dfrac{1}{3}$. **29.84.** 1/3. **29.85.** 73/75.

29.86. $(A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2)(A_1A_3+B_1B_3+C_1C_3)(A_2A_3+B_2B_3+C_2C_3)<0$.

29.87. $4x-4y+4z-7=0$, $10x+6y-4z-5=0$.

29.88. $8x+5y-9z-24=0$. **29.89.** $3x-y+2z-2=0$.

29.90. $14x-2y+4z-1=0$.

29.91. $Ax+By+Cz+D\pm\sqrt{A^2+B^2+C^2}d=0$.

29.92. $d=\dfrac{|D_2-D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. **29.93.** $1/\sqrt{11}$.

29.94. $(-19/6,-5/6,0)$. **29.95.** $(0,0,3)$. **29.96.** $(0,-3,0)$.

29.97. $2x+y-4z+17=0$ или $2x+y-4z-25=0$.

29.98. $6x+3y+2z-75=0$ или $6x+3y+2z-19=0$.

29.99. $(3/2,-3/2,-3/2)$, $r=3/2$.

29.100. $x+2y+2z-9=0$ или $y-2=0$.

29.101. $3x-4y-5=0$, $387x-164y-24z-421=0$.

29.102. $x+2y-2z=0$. **29.103.** $2x-y+2z+3=0$, $8x-4y-z+9=0$.

§30

30.1. а) $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{k\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}}{g_{11}+kg_{12}}$; б) $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{k\sin\omega}{1+k\cos\omega}$.

30.2. а) $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{(k_2-k_1)\sqrt{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}}{g_{11}+g_{12}(k_1+k_2)+g_{22}k_1k_2}$;

б) $\operatorname{tg}\varphi=\dfrac{(k_2-k_1)\sin\omega}{1+(k_1+k_2)\cos\omega+k_1k_2}$.

30.3. $A_1A_2g_{22}-g_{12}(A_1B_2+A_2B_1)+B_1B_2g_{11}=0$.

30.4. $\omega=\pi/3$ или $\omega=5\pi/3$.

30.5. $(A\cos\omega-B)(x-x_0)+(A-B\cos\omega)(y-y_0)=0$.

30.6. $11x + y - 17 = 0$.

30.7. а) $g_{11}x + g_{12}y + C = 0$; б) $g_{21}x + g_{22}y + C = 0$.

30.8. $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{\tilde{g}_{11}A^2 + 2\tilde{g}_{12}AB + \tilde{g}_{22}B^2}}$.

30.9. $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|\sin\omega}{\sqrt{A^2 - 2AB\cos\omega + B^2}}$. **30.10.** $x\sqrt{g_{11}} \pm y\sqrt{g_{22}} = 0$.

30.11. $(1 \pm \sqrt{5})x + (\pm\sqrt{5} - 1)y + (\pm 2\sqrt{5} - 1) = 0$.

30.12. $3\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}$.

30.13. $\sqrt{g_{11}}x \pm \sqrt{g_{22}}y = 2\sqrt{g_{11}} \mp \sqrt{g_{22}}$.

30.14. $5x + 4y - 13 = 0$, $(-3, 7)$.

30.15. $x + \sqrt{2}y - 1 - 2\sqrt{2} = 0$.

30.16. $|C_1 - C_2|\sin\omega/\sqrt{A^2 - 2AB\cos\omega + B^2}$.

30.17. $g_{11} = 1$, $g_{12} = g_{22} = 1/4$.

30.18. $\omega = 2\pi/3$.

30.20. $d = |Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D| \cdot \left(\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & A \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & B \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & C \\ A & B & C & 0 \end{vmatrix} \right)^{-1/2}$.

30.21. $\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & A_1 \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & B_1 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & 0 \end{vmatrix} = 0$. **30.22.** $\cos\varphi = \pm \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & A_1 \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & B_1 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & 0 \end{vmatrix} \cdot$

$\cdot \left(\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & A_1 \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & B_1 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & C_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & A_2 \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & B_2 \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & C_2 \\ A_2 & B_2 & C_2 & 0 \end{vmatrix} \right)^{-1/2}$.

30.23. $\sqrt{g_{11}}x + \sqrt{g_{22}}y \pm \sqrt{g_{33}}z = \sqrt{g_{11}} + 2\sqrt{g_{22}} \mp 3\sqrt{g_{33}}$, $\sqrt{g_{11}}x - \sqrt{g_{22}}y \pm \sqrt{g_{33}}z = \sqrt{g_{11}} - 2\sqrt{g_{22}} \mp 3\sqrt{g_{33}}$.

30.24. $8\sqrt{\det G}$. Указание. См. задачу 25.72.

30.25. $x - y = 0$. **30.26.** $x + y - 4z + 4 = 0$.

30.27. $\arcsin \dfrac{a^2}{\sqrt{4 + (a-2)^2}\sqrt{a^2 + (a+1)^2}}$.

§31

31.1. $\{0, 0, 1\}$.

31.2. 1) $x = -2t$, $y = 7t$, $z = 4t$; 2) $x = t$, $y = -8 - 4t$, $z = -3 - 3t$.

31.3. 1) $x = 2 + 2t$, $y = 3 + 3t$, $z = 1 + 8t$; 2) $x = t$, $y = 1$, $z = 9 - t$; 3) $x = 1$, $y = t$, $z = 1$.

31.4. 1) $x - 5z - 33 = 0$, $y + 4z + 17 = 0$; 2) $5x - z + 5 = 0$, $5y + z - 5 = 0$.

31.5. 1) $x = 3 + 4t$, $y = 5 - 3t$, $z = 1$; 2) $x + 2y + 10 = 0$, $z - 4 = 0$.

31.6. 1) $x = 1$, $y = 2$; $y = 2$, $z = 3$; $z = 3$, $x = 1$; 2) $3y - 2z = 0$, $x = 1$; $3x - z = 0$, $y = 2$; $2x - y = 0$, $z = 3$; 3) $x = 1$; $y = 2$; $z = 3$.

31.7. 1) $3x + 2y - 6 = 0$, $z = 0$; 2) $3x + 2y - 6 = 0$.

31.8. $x = 0$, $z = 3$. **31.9.** 1) $x \pm y = 0$; 2) $x - y = 0$, $z = 0$.

31.10. 1) $11x - 4y + 6 = 0$, $z = 0$; 2) $6x + 5y - 38 = 0$, $z = 0$.

31.11. 1) $(-1, 15/2, 0)$, $(2, 0, 3)$, $(0, 5, 1)$;
2) $(6, -2, 0)$, $(7, 0, -5/2)$, $(0, -14, 15)$.

31.12. $\left(-\dfrac{x_2z_1}{z_2-z_1}, \dfrac{y_1z_2}{z_2-z_1}, 0\right)$.

31.13. 1) Пересекаются в точке $(-3,5,-5)$ и лежат в плоскости $9x+10y-7z-58=0$; 2) параллельны и лежат в плоскости $5x-22y+19z+9=0$; 3) скрещиваются; 4) совпадают.

31.14. 1) Пересекаются в точке $(-3,0,4)$ и лежат в плоскости $2x-y+6z-18=0$; 2) скрещиваются; 3) параллельны и лежат в плоскости $18x+25y+46z-18=0$; 4) совпадают.

31.15. 1) Совпадают; 2) параллельны и лежат в плоскости $12x-3y+8z=0$; 3) скрещиваются; 4) пересекаются в точке $(10,-1,0)$ и лежат в плоскости $x-7y+3z-17=0$.

31.16. $\operatorname{rg}\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{bmatrix} = 2$

или $\operatorname{rg}\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{bmatrix} = \operatorname{rg}\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{bmatrix} = 3.$

31.17. 1) $\operatorname{rg} G = 3$, $\operatorname{rg} F = 4$; 2) $\operatorname{rg} G = \operatorname{rg} F = 3$; 3) $\operatorname{rg} G = 2$, $\operatorname{rg} F = 3$; 4) $\operatorname{rg} G = \operatorname{rg} F = 2$.

31.18. 1) Пересекаются в точке $(0,0,-2)$; 2) параллельны; 3) прямая лежит в плоскости; 4) пересекаются в точке $(2,3,1)$.

31.19. 1) Пересекаются в точке $(2,4,6)$; 2) параллельны; 3) прямая лежит в плоскости.

31.20. $(6,-2,6)$. **31.21.** $x=1+4t$, $y=-2t$, $z=t$.

31.22. $4x+3z=0$, $y+2z+9=0$.

31.23. $2y-z+2=0$, $x-7y+3z-17=0$.

31.24. $4x+3y-z=0$, $13x+2y-8z=0$.

31.25. $x-9y+5z+20=0$, $x-2y-5z+9=0$.

31.26. Числа $\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \\ m & n & k \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \\ x_3-x_0 & y_3-y_0 & z_3-z_0 \\ m & n & k \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} x_3-x_0 & y_3-y_0 & z_3-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ m & n & k \end{vmatrix}$ должны быть одного знака.

31.27. $x-3y+5z=0$. **31.28.** $x+y-2z+3=0$, $x-y+1=0$.

31.29. $x-3y-3z+11=0$.

31.30. $20x+19y-5z+41=0$. **31.31.** $18x-11y+3z-47=0$.

31.32. $5x+6z=0$.

31.33. $(A_1A_2+B_1B_2+C_1C_1)(A_1m+B_1n+C_1k)(A_2m+B_2n+C_2k)>0$.

31.34. $x=3-t$, $y=2+t$, $z=1+t$. **31.35.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{5}=\dfrac{z-3}{-1}$.

§32

32.1. $\dfrac{x-3}{5}=\dfrac{y+2}{3}=\dfrac{z-4}{-7}$. **32.2.** $(7,1,0)$.

32.3. $x-z+4=0, y=0$. **32.4.** $5x-13y-12z+20=0, 2x-2y+3z=5$.

32.5. $(4,-1,3)$. **32.6.** $x=3/7$, $z=18/7$. **32.7.** $\begin{vmatrix} x-x_0 & a & A \\ y-y_0 & b & B \\ z-z_0 & c & C \end{vmatrix}=0$.

32.8. $2x + 6y - 4z - 56 = 0$. **32.9.** $3x + 2y + 4z - 38 = 0$.
32.10. $4x + 5y - 2z = 0$. **32.11.** $a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$.

32.12. $\begin{vmatrix} x - x_1 & A_1 & A_2 \\ y - y_1 & B_1 & B_2 \\ z - z_1 & C_1 & C_2 \end{vmatrix} = 0$. **32.13.** $(2, 9, 6)$.

32.14. Такой прямой нет. **32.15.** $4x + 5z = 0$, $41y - 63 = 0$.
32.16. $y - 2z = 0$, $x = 3$. **32.17.** $y + 2z - 8 = 0$, $x + 2y - z + 5 = 0$.

32.18. $\begin{vmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 & a \\ y - y_0 & y_1 - y_0 & b \\ z - z_0 & z_1 - z_0 & c \end{vmatrix} = 0$, $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$.

32.19. $(-2, 1, 4)$. **32.20.** $5x - 11y + 4z + 5 = 0$, $x + y = 0$.
32.21. 1) $13x - 3y - 2z - 12 = 0$, $13x + 6y + 4z - 15 = 0$; 2) $\sqrt{13}$; 3) $(1, -1, 2)$ и $(1, 1 - 1)$.
32.22. 2. **32.23.** $24x + 21y - 33z + 50 = 0$.
32.24. 1) $4/13$, $-3/13$, $12/13$; 2) $12/25$, $9/25$, $20/25$.
32.25. $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+5}{\sqrt{2}} = \dfrac{z-3}{-1}$. **32.26.** $\arccos\left(\pm\dfrac{72}{77}\right)$.
32.27. $6/11$, $7/11$, $6/11$.
32.28. 1) $\arccos\left(\pm\dfrac{7}{2\sqrt{91}}\right)$; 2) $\arccos\left(\pm\dfrac{98}{195}\right)$; 3) $\arccos\left(\pm\dfrac{9}{\sqrt{132}}\right)$.
32.29. $\arcsin\left(\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)$. **32.30.** $\arcsin\left(\dfrac{1}{10\sqrt{19}}\right)$.
32.31. $2x + y + z + 8 = 0$ или $14x + 13y - 11z + 20 = 0$.
32.32. $x + y + z = 0$ или $x + y - z + 2 = 0$.
32.32.1. $|a|/\sqrt{1 + b^2}$, $|b|/\sqrt{1 + a^2}$, $1/\sqrt{a^2 + b^2}$.
32.33. $-\dfrac{5}{\sqrt{134}}$, $\dfrac{3}{\sqrt{134}}$, $\dfrac{10}{\sqrt{134}}$. Луч проходит внутри трехгранного угла.
32.34. $\sqrt{14}$. **32.35.** 1) $\sqrt{35/6}$; 2) $8\sqrt{3/26}$.
32.36. $x + 3y = 0$, $3x - y + 4z - 12 = 0$; $AH = \sqrt{117/5}$.
32.37. 1) $18/\sqrt{110}$; 2) 0; 3) $16/\sqrt{102}$. **32.38.** 3. **32.39.** $1/\sqrt{6}$.
32.40. $a\sqrt{2/35}$ и $a/\sqrt{10}$.
32.41. $\varphi = \arcsin \dfrac{|aA + bB + cC|}{pn}$,

где $p = \sqrt{g_{11}a^2 + g_{22}b^2 + g_{33}c^2 + 2g_{23}bc + 2g_{31}ca + 2g_{12}ab}$,

$n = \sqrt{\tilde{g}_{11}A^2 + \tilde{g}_{22}B^2 + \tilde{g}_{33}C^2 + 2\tilde{g}_{23}BC + 2\tilde{g}_{31}CA + 2\tilde{g}_{12}AB}$,

$\tilde{g}_{ij}$ – метрические коэффициенты взаимного базиса.

32.42. $(g_{11}a + g_{12}b + g_{13}c) : (g_{21}a + g_{22}b + g_{23}c) : (g_{31}a + g_{32}b + g_{33}c) = A : B : C$.

§33

33.1. Плоскость, параллельная скрещивающимся прямым и равноудаленная от них.

33.2. Если скрещивающиеся прямые заданы уравнениями $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t_1\,\mathbf{a}$ и $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t_2\,\mathbf{b}$ и $\mathbf{n}$ – нормаль к плоскости π, то геометрическое место – это прямая:

$$\mathbf{r} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{n})}{(\mathbf{a}, \mathbf{n})}\mathbf{a}\right) + \left(\frac{\mathbf{a}}{(\mathbf{a}, \mathbf{n})} + \frac{\mathbf{b}}{(\mathbf{b}, \mathbf{n})}\right)t.$$

33.3. Вектор нормали $\mathbf{n}$; $\mathbf{r}_0 = \dfrac{D\mathbf{n}}{|\mathbf{n}|^2}$.

33.4. $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + u(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) + v\mathbf{a}$.

33.5. $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}) = 0$. **33.6.** $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{n}_1 + v\mathbf{n}_2$.

33.7. $\mathbf{r}_0 + \dfrac{D - (\mathbf{r}_0, \mathbf{n})}{(\mathbf{a}, \mathbf{n})}\mathbf{a}$. **33.8.** $\mathbf{r}_0 + \dfrac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{b}, \mathbf{c})}{(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})}\mathbf{a}$.

33.9. $\mathbf{r}_0 - \dfrac{(\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + (\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3) + (\mathbf{r}_0, \mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1) - (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)}{(\mathbf{a}, [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2] + [\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3] + [\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_1])}\mathbf{a}$.

33.10. $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}_1) = 0$, $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}_2) = 0$.

33.11. $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}, [\mathbf{a}, \mathbf{n}]) = 0$, $(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D$.

33.12. $\mathbf{r}_1 + \dfrac{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1, \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$. **33.13.** $\dfrac{[\mathbf{a}, \mathbf{M}] + (\mathbf{r}_0, \mathbf{a})\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}$.

33.14. $\mathbf{r}_1 + \dfrac{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1, \mathbf{n})}{(\mathbf{a}, \mathbf{n})}\mathbf{a}$. **33.15.** $2\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 + 2\dfrac{(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_1, \mathbf{a})}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a}$.

33.16. $\mathbf{r}_0 + \dfrac{D - (\mathbf{r}_0, \mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}$. **33.17.** $\mathbf{r}_0 + \dfrac{D - (\mathbf{r}_0, \mathbf{n})}{(\mathbf{a}, \mathbf{n})}\mathbf{a}$.

33.18. $\mathbf{r}_0 + 2\dfrac{D - (\mathbf{r}_0, \mathbf{n})}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{n}$. **33.19.** $\mathbf{r}_0 + \dfrac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}, \mathbf{b})}{|[\mathbf{a}, \mathbf{b}]|^2}[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

33.20. $D_1(\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4) + D_2(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_4, \mathbf{n}_3) + D_3(\mathbf{n}_4, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) + D_4(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_3, \mathbf{n}_2) = 0$, $(\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4)^2 + (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_4, \mathbf{n}_3)^2 + (\mathbf{n}_4, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)^2 + (\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_3, \mathbf{n}_2)^2 \neq 0$.

33.21. 1) $[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2] \neq \mathbf{0}$; 2) $[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2] = \mathbf{0}$ и $D_1\mathbf{n}_2 \neq D_2\mathbf{n}_1$;
3) $[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2] = \mathbf{0}$ и $D_1\mathbf{n}_2 = D_2\mathbf{n}_1$.

33.22. 1) $(\mathbf{a}, \mathbf{n}) \neq 0$; 2) $(\mathbf{a}, \mathbf{n}) = 0$, $(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}) \neq D$;
3) $(\mathbf{a}, \mathbf{n}) = 0$, $(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = D$.

33.23. 1) $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \neq 0$; 2) $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = 0$, $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] \neq \mathbf{0}$;
3) $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = \mathbf{0}$, $[\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}_1] \neq \mathbf{0}$; 4) $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = [\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}_1] = \mathbf{0}$.

33.24. $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}, \mathbf{n}) = 0$. **33.25.** $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = 0$.

33.26. $([\mathbf{r}, \mathbf{n}_3], [\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]) = D_1(\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) - D_2(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_3)$.

33.27. $\left(\mathbf{r} - \dfrac{[\mathbf{a}, \mathbf{M}]}{|\mathbf{a}|^2}, \mathbf{a}, \mathbf{n}\right) = 0$. **33.28.** $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$.

33.29. $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, [\mathbf{r}_0, \mathbf{a}] - \mathbf{M}) = 0$. **33.30.** $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}) = 0$.

33.31. $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1, \mathbf{a}_1, [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]) = 0$, $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2, \mathbf{a}_2, [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]) = 0$.

33.32. $([\mathbf{r}, \mathbf{a}_1] - \mathbf{M}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = 0$, $([\mathbf{r}, \mathbf{a}_2] - \mathbf{M}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = 0$.

33.33. $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}) = 0$, $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}) = 0$.

33.34. $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = 0$, $\begin{vmatrix} (\mathbf{r}, \mathbf{n}_1) - D_1 & (\mathbf{r}, \mathbf{n}_2) - D_2 \\ (\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_1) - D_1 & (\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_2) - D_2 \end{vmatrix} = 0$.

33.35. $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}) = 0$ и $(\mathbf{r}, [\mathbf{r}_0, \mathbf{a}] - \mathbf{M}) + (\mathbf{r}_0, \mathbf{M}) = 0$.

33.36. $\dfrac{|(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}) - D|}{|\mathbf{n}|}$. **33.37.** $\mathbf{r}_0 + \dfrac{D - (\mathbf{r}_0, \mathbf{n}) \pm d|\mathbf{n}|}{(\mathbf{a}, \mathbf{n})}\mathbf{a}$.

33.38. $\dfrac{|[\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}]|}{|\mathbf{a}|}$. **33.39.** $\dfrac{|(D_2 - (\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_2))\mathbf{n}_1 - (D_1 - (\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_1))\mathbf{n}_2|}{|[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]|}$.

33.40. $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) = 0$, $[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2] \neq \mathbf{0}$, $[\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3] \neq \mathbf{0}$, $[\mathbf{n}_3, \mathbf{n}_1] \neq \mathbf{0}$, $D_1[\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3] + D_2[\mathbf{n}_3, \mathbf{n}_1] + D_3[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2] \neq \mathbf{0}$.

33.41. $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3) = 0$, $[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2] \neq \mathbf{0}$, $[\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3] \neq \mathbf{0}$, $[\mathbf{n}_3, \mathbf{n}_1] \neq \mathbf{0}$, $D_1[\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3] + D_2[\mathbf{n}_3, \mathbf{n}_1] + D_3[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2] = \mathbf{0}$.

33.42. $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_4, \mathbf{n}_3)(\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4)(\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_4, \mathbf{n}_1) \neq 0$, $D_1(\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3, \mathbf{n}_4) + D_2(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_4, \mathbf{n}_3) + D_3(\mathbf{n}_2, \mathbf{n}_4, \mathbf{n}_1) + D_4(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_3, \mathbf{n}_2) \neq 0$.

33.43. $\dfrac{D_1[\mathbf{n}_2,[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]] - D_2[\mathbf{n}_1,[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]] + (\mathbf{r}_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]}{|[\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2]|^2}$.

33.44. Числа $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0, \mathbf{a})$, $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_0, \mathbf{a})$, $(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0, \mathbf{a})$ – одного знака.

§34

34.1. 1) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$; 2) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$; 3) $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{25} = 1$; 4) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{7} = 1$; 5) $\dfrac{x^2}{32} + \dfrac{y^2}{16} = 1$; 6) $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{39} = 1$; 7) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$; 8) $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{32} = 1$; 9) $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} = 1$; 10) $\dfrac{x^2}{28} + \dfrac{y^2}{21} = 1$.

34.2. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$, где $a > c$. **34.3.** $3x^2 + 5y^2 = 32$.

34.4. 1) $\varepsilon = \sqrt{2}/2$; 2) $\varepsilon = \sqrt{10}/5$; 3) $\varepsilon = 1/2$; 4) $\varepsilon = 1/2$.

34.5. $(-3, 0)$, $x = -9$. **34.6.** $4/5$. **34.7.** $2b^2/a$.

34.8. $(\sqrt{5} - 1)/2$. **34.9.** $8x + 25y = 0$.

34.9.1. $2ab\sqrt{(1 + k^2)/(b^2 + k^2a^2)}\sqrt{1 - k^2x_0^2/(b^2 + k^2a^2)}$.

34.9.2. Указание. Использовать результат предыдущей задачи.

34.9.3. Указание. См. указание предыдущей задачи.

34.10. $2ab/\sqrt{a^2 + b^2}$.

34.10.1. Указание. Показать, что если сторона параллелограмма проходит через точку $(x_0, 0)$ большей оси и имеет угловой коэффициент k, то его площадь равна $\left(4kabx_0/(k^2a^2 + b^2)\right)\sqrt{k^2a^2 + b^2 - k^2x_0^2}$.

34.12. $\dfrac{x^2}{196} + \dfrac{y^2}{147} = 1$, $\dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{48} = 1$.

34.13. 1) $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{9} = 1$, 2) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$, 3) $\dfrac{x^2}{576} - \dfrac{y^2}{100} = 1$, 4) $\dfrac{x^2}{64} - \dfrac{y^2}{36} = 1$, 5) $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{11} = 1$, 6) $\dfrac{x^2}{1/4} - \dfrac{y^2}{3} = 1$, 7) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{3} = 1$, 8) $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{24} = 1$, 9) $\dfrac{x^2}{35} - \dfrac{4y^2}{35} = -1$.

34.14. $(-7, 0)$, $x = -19/5$. **34.16.** $\dfrac{x^2}{20} - \dfrac{y^2}{5} = 1$, $\dfrac{x^2}{20} - \dfrac{y^2}{80} = 1$.

34.17. $\sqrt{2}$. **34.18.** $\dfrac{x^2}{10} - \dfrac{y^2}{6} = 1$.

34.19. $\left(\pm\dfrac{4}{5}\sqrt{34}, \pm\dfrac{9}{5}\right)$, $\left(\pm\dfrac{4}{5}\sqrt{34}, \mp\dfrac{9}{5}\right)$.

34.20. Указание. Показать, что произведение равно $a^2b^2/(a^2 + b^2)$.

34.21. $20x - 9y - 91 = 0$.

34.21.3. $\dfrac{2ab\sqrt{1 + k^2}}{|k^2a^2 - b^2|}\sqrt{kx_0^2 - (k^2a^2 - b^2)}$.

34.22. $\left(\pm\frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2}}, \pm\frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2}}\right)$; возможно, если $b > a$.

34.22.1. $(\sqrt{5}+1)/2$.

34.23. 1) $y^2 = 12x$; 2) $y^2 = 24x$; 3) $y^2 = 5x$; 4) $y^2 = 9x$.

34.24. $F(3/2, 0)$, $d: x = -3/2$. **34.25.** $(18, \pm 12)$.

34.26. 1) $M(15/2, \pm 5\sqrt{3})$, $M(5/6, \pm 5/\sqrt{3})$; 2) $M(2/5, \pm 2)$; 3) $M(5/4, \pm 5/\sqrt{2})$; 4) $M(8, \pm 4\sqrt{5})$, $M(10/3, \pm 10/\sqrt{3})$.

34.27. $2p$. **34.28.** $y = 2x - 5$. **34.29.** $4\sqrt{3}p$.

34.30. $3x + 4y - 24 = 0$. **34.31.** $y = 4$ и $16x - 15y - 100 = 0$.

34.32. 1) $x + y \pm 5 = 0$; 2) $x - y \pm 5 = 0$.

34.34. 1) $a^2A^2 + b^2B^2 > C^2$; 2) $a^2A^2 + b^2B^2 = C^2$; 3) $a^2A^2 + b^2B^2 < C^2$.

34.35. $\frac{x^2}{17} + \frac{y^2}{8} = 1$. **34.36.** Окружность $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.

34.36.1. $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} < 1$. **34.37.** $3x + y = 8$.

34.38. $x = 1$ и $5x - 2y + 3 = 0$.

34.39. 1) $3x - y \pm 3\sqrt{5} = 0$; 2) $5x - 2y \pm 9 = 0$.

34.40. $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$. **34.41.** $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$.

34.42. 1) $a^2A^2 - b^2B^2 = C^2$; 2) $a^2A^2 - b^2B^2 < 0$; 3) $0 < a^2A^2 - b^2B^2 < C^2$; 4) $a^2A^2 - b^2B^2 = 0$, $C \neq 0$.

34.43. 1,2) Нет. **34.44.** Можно только, если $|k| > b/a$.

34.45. $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} \in (-1, 0) \cup (0, 1)$;

$$\left(\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1\right) - \left(\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} - 1\right)^2 = 0.$$

34.46. b^2. **34.47.** ab.

34.50. Окружность $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$, если $a > b$.

34.50.1. $\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} > 1$. **34.51.** $y^2 = 4x$.

34.52. 1) $B^2p = 2AC$; 2) $A = 0$; 3) $B^2p > 2AC$, $A \neq 0$; 4) $B^2p < 2AC$.

34.54. Парабола $y^2 = -\frac{p}{4}x$ без своей вершины.

34.54.1. Прямая $x = 0$.

34.55. Директриса параболы – прямая $x = -p/2$.

34.55.1. $y_0^2 < 2px_0$.

34.56. Эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $b = \left|\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right| a$.

34.57. Эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

34.58. Эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. **34.59.** Эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

34.60. Эллипс. Указание. Ввести прямоугольную систему координат Oxy так, чтобы ось Ox проходила через центры O_1, O_2 окружностей, а точка O делила отрезок O_1O_2 пополам. Показать, что если $2h = O_1O_2$ и $2a = R - r$, где R, r – радиусы внешней и внутренней окружностей соответственно, то геометрическое место задается уравнением $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2 - h^2} = 1$.

34.61. Эллипс. Указание. Ввести прямоугольную систему координат Oxy так, чтобы ось Ox проходила через центр O_1 окружности и данную точку A, а точка O делила отрезок O_1A пополам. Показать, что если $2h = O_1A$ и $a = R/2$, где R – радиус окружности, то геометрическое место задается уравнением $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2 - h^2} = 1$.

34.62. Гипербола $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

34.63. Ветвь гиперболы. Указание. Ввести прямоугольную систему координат Oxy так, чтобы ось Ox проходила через центры O_1, O_2 окружностей, а точка O была равноудалена от этих окружностей. Показать, что если $b^2 = OO_1 \cdot OO_2$ и a – полуразность радиусов окружностей, то геометрическое место задается условиями $\dfrac{(x+a)^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $x/a \geq 0$.

34.64. Если прямоугольник – квадрат, то окружность, описанная около квадрата, и прямые, содержащие его диагонали.

34.65. Гипербола. Указание. Ввести прямоугольную систему координат Oxy так, чтобы ось Ox проходила через центр O_1 окружности и данную точку A, а точка O была равноудалена от окружности и точки. Показать, что если $a = R/2$ и $b^2 = (O_1A - R)(O_1A + R)/4$, где R – радиус окружности, то геометрическое место задается уравнением $\dfrac{(x+a)^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

34.66. Две сопряженные гиперболы. Указание. Ввести прямоугольную систему координат Oxy так, чтобы оси Ox и Oy были биссектрисами углов, образованных данными прямыми.

34.67. Парабола.

§35

35.1. $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$. **35.2.** $(x-5)^2 + (y-3)^2 = 25$.

35.3. $\dfrac{(x-5)^2}{25} + \dfrac{(y-3)^2}{9} = 1$.

35.4. $\dfrac{(x-5)^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ и $\dfrac{(x-5)^2}{25} + \dfrac{y^2}{(25/3)^2} = 1$.

35.5. $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 4x - 4y = 0$.

35.6. $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 6x - 10y - 3 = 0$.

35.7. Дуга окружности радиуса $\sqrt{a^2+b^2}$ с центром в точке пересечения прямых, симметричных биссектрисе, угловой величины $\operatorname{arctg}(|b^2 - a^2|/(2ab))$.

35.8. $xy - x + 1 = 0$. **35.9.** $8xy - 4x - 4y + 3 = 0$.

35.9.1. Пусть $D = b - ad/c$. Если $D > 0$, то фокусы $(-(d/c) \pm \sqrt{2D}, (a/c) \pm \sqrt{2D})$, если $D < 0$, то фокусы $(-(d/c) \mp \sqrt{2D}, (a/c) \pm \sqrt{2D})$.

35.10. $(x+1)^2 - (y-1)^2 = 2$ и $(y+1)^2 - (x-1)^2 = 2$.

35.11. $(x-1)(y+1) = 1/2$ и $(x-1)(y-1) = -1/2$.

35.12. $4x^2 + 6xy - 4y^2 - 26x + 18y - 39 = 0$.

35.13. а) $y^2 = 10x - 25$; б) $y^2 - 2y + 6x + 10 = 0$.

35.14. $(2, 5/4)$.

35.15. 1) $(y-b)^2 = 2p(x-a)$; 2) $(y-b)^2 = -2p(x-a)$; 3) $(x-a)^2 = 2p(y-b)$; 4) $(x-a)^2 = -2p(y-b)$.

35.16. $2x^2 - 8x + 3y - 10 = 0$.

35.18. $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 24x - 36y + 36 = 0$. Указание. Используя задачу 34.55, показать, что прямая, проходящая через точку O параллельно оси параболы, равноудалена от точек касания и, следовательно, имеет уравнение $2x - 3y + c_1 = 0$. Искать уравнение параболы в виде $(2x - 3y + c_1)^2 = p(3x + 2y + c_2)$.

35.19. $x^2 + 2xy + y^2 + 5x - y = 0$.

35.20. $x^2 + 2xy + y^2 - 12x + 24y - 54 = 0$.

35.21. $x^2 - 2xy + y^2 - 8x - 8y = 0$.

35.21.1. $4xy + 3y^2 - 2y - 1 = 0$.

35.21.2. $x^2 - 6xy + y^2 - 2x - 2y + 5 = 0$.

35.21.3. $9x^2 - 8xy + 3y^2 - 6x + 10y - 10 = 0$.

35.22. 1) Эллипс; 2) парабола; 3) гипербола; 4) гипербола; 5) эллипс; 6) парабола.

35.23. 1) $2x + 3y - 5 = 0$, $x - 4y + 2 = 0$; 2) $x + y - 2 = 0$, $3x - 2y + 1 = 0$; 3) $2x + 5y + 1 = 0$, $2x + 3y - 5 = 0$; 4) $2x - y + 1 = 0$, $2x - y - 4 = 0$.

35.24. 1) Окружность с центром $(1, -3)$ и радиусом $\sqrt{15}$;

2) эллипс с центром $(-2, 1)$, большая ось параллельна оси Ox, полуоси $a = 4$, $b = 2$;

3) эллипс с центром $(-4, 0)$, большая ось параллельна оси Ox, полуоси $a = 2\sqrt{5}$, $b = \sqrt{10}$;

4) гипербола с центром $(1, -10)$, действительная ось параллельна оси Ox, действительная полуось $a = 5$, мнимая полуось $b = 15$;

5) гипербола с центром $(-1, -1)$, действительная ось параллельна оси Oy, действительная полуось $a = \sqrt{6}$, мнимая полуось $b = \sqrt{5}$;

6) гипербола с центром $(-3, 0)$, действительная ось параллельна оси Ox, действительная полуось $a = 2$, мнимая полуось $b = 1$;

7) парабола с вершиной $(-2, 1)$, $p = 5$, направление оси совпадает с положительным направлением оси Ox;

8) парабола с вершиной $(0, -7)$, $p = 3$, направление оси совпадает с положительным направлением оси Ox;

9) парабола с вершиной $(2, 0)$, $p = 4$, направление оси совпадает с отрицательным направлением оси Ox;

10) парабола с вершиной $(3, 5)$, $p = 2$, направление оси совпадает с положительным направлением оси Oy;

11) эллипс с центром $(1, -2)$, большая ось параллельна оси Oy, полуоси $a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{3}$;

12) мнимый эллипс;

13) пара мнимых пересекающихся прямых;

14) пара пересекающихся в точке $(-1, 1)$ прямых $\sqrt{3}(x + 1) \pm \sqrt{2}(y - 1) = 0$;

15) пара параллельных прямых $x = -3$ и $x = 2$;

16) пара мнимых параллельных прямых;

17) пара совпадающих прямых $5x - 3 = 0$.

35.25. При $\lambda < -1$ – гипербола $(x-\lambda)^2 + \lambda\big(y - \frac{1}{\lambda}\big)^2 = \frac{\lambda^3+1}{\lambda}$, действительная ось которой параллельна оси Ox. При $\lambda = -1$ – две пересекающиеся прямые $x - y = 0$, $x + y + 2 = 0$. При $-1 < \lambda < 0$ – гипербола $(x-\lambda)^2 + \lambda\big(y - \frac{1}{\lambda}\big)^2 = \frac{\lambda^3+1}{\lambda}$, действительная ось которой параллельна оси Oy. При $\lambda = 0$ – парабола $x^2 = 2y$. При $\lambda > 0$ – эллипс $(x-\lambda)^2 + \lambda\big(y - \frac{1}{\lambda}\big)^2 = \frac{\lambda^3+1}{\lambda}$.

35.26. Пусть $K = \frac{C^2}{A} + \frac{D^2}{B} - E$. Тогда уравнение задает: 1) эллипс $\iff$ A, B, K не равны нулю и одного знака; 2) гиперболу $\iff$ A, B, K не равны нулю и $AB < 0$.

35.27. 1) Парабола с вершиной $(2, 1)$ и фокусом $(3, 2)$, $p = 2\sqrt{2}$, ось: $y = x - 1$;

2) гипербола с центром $(-1, -1)$, асимптоты параллельны осям координат, фокусы: $(-1 \pm \sqrt{2}, -1 \pm \sqrt{2})$;

3) эллипс с центром $(1, 1)$, бóльшая ось: $x + y - 2 = 0$, полуоси $a = 3$, $b = 1$;

4) эллипс с центром $(1, 1)$, бóльшая ось: $x + y - 2 = 0$, полуоси $a = 4$, $b = 2$;

5) парабола с вершиной $(1, 1)$ и фокусом $(3/2, 1/2)$, $p = \sqrt{2}$, ось: $x + y - 2 = 0$;

6) эллипс с центром $(2, 3)$, бóльшая ось: $x + 2y - 8 = 0$, полуоси $a = 3$, $b = 2$;

7) гипербола с центром $(1, 1)$, действительная ось: $2x - 3y + 1 = 0$, действительная полуось $a = 2$, мнимая полуось $b = 3$;

8) пара параллельных прямых $2x - 3y + 1 = 0$, $2x - 3y - 2 = 0$;

9) гипербола с центром $(3, -4)$, действительная ось: $2x - y - 10 = 0$, действительная полуось $a = 3$, мнимая полуось $b = 6$;

10) эллипс с центром $(7/6, 1/3)$, бóльшая ось: $6x + 12y - 11 = 0$, полуоси $a = \sqrt{35/6}$, $b = \sqrt{35}/6$;

11) гипербола с центром $(-1, -2)$, действительная ось: $3x + y + 5 = 0$, действительная полуось $a = 1$, мнимая полуось $b = 3$;

12) парабола с вершиной $(-1/5, 3/5)$ и фокусом $(1/10, 6/5)$, $p = 3/\sqrt{5}$, ось: $2x - y + 1 = 0$;

13) парабола с вершиной $(3, 2)$ и фокусом $(29/10, 39/20)$, $p = \sqrt{5}/10$, ось: $x - 2y + 1 = 0$;

14) пара параллельных прямых $2x - y + 1 = 0$, $2x - y - 4 = 0$.

35.28. При $\lambda < -1$ – гипербола $(1+\lambda)(x')^2 + (1-\lambda)(y')^2 = 1$, действительная ось которой $x + y = 0$. При $\lambda = -1$ – пара параллельных прямых $x - y \pm 1 = 0$. При $-1 < \lambda < 1$ – эллипс $(1+\lambda)(x')^2 + (1-\lambda)(y')^2 = 1$, большая ось которого $x + y = 0$. При $\lambda = 1$ – пара параллельных прямых $x + y \pm 1 = 0$. При $\lambda > 1$ – гипербола $(1+\lambda)(x')^2 + (1-\lambda)(y')^2 = 1$, действительная ось которой $x - y = 0$. Здесь система координат $Ox'y'$ получена из системы Oxy поворотом на угол $\pi/4$.

§36

36.1. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$. **36.2.** $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{36} = 1$.

36.3. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{36/5}=1.$ **36.4.** $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{12}+\frac{(z-2)^2}{16}=1.$

36.4.1. $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{2}+(z+1)^2=1.$

36.5. 1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2+z^2}{b^2}=1$; 2) $\frac{x^2+z^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

36.6. Пересекает при $|D|\le 2\sqrt{3}$.

36.7. $x^2+2y^2-4x=0$, $z=0$.

36.8. 1) $(2,1,1)$; 2) не пересекает эллипсоид.

36.9. $x=6t$, $y=3t$, $z=2t$, $|t|\le\sqrt{2/33}$.

36.10. $3x+4y+4z=21$. Указание. Учесть, что если точка лежит на эллипсоиде, то и точка, симметричная ей относительно точки $(3,2,1)$, лежит на этом эллипсоиде.

36.11. $\left(\frac{-AD}{A^2+B^2+C^2},\frac{-BD}{A^2+B^2+C^2},\frac{-CD}{A^2+B^2+C^2}\right)$; $(A^2+B^2+C^2)R^2>D^2$.

36.13. 1) $\sqrt{8/5}$, 3; 2) $4\sqrt{2}/5$, $2/\sqrt{5}$; 3) 1, $\sqrt{2}$; 4) $3/5$, $\sqrt{3/5}$. Указание. 3) Ввести новые координаты по формулам $x'=(x+y+z)/\sqrt{3}$, $y'=(x-y)/\sqrt{2}$, $z'=(x+y-2z)/\sqrt{6}$. 4) Ввести новые координаты по формулам $x'=(y+z)/\sqrt{2}$, $y'=(-2x+y-z)/\sqrt{6}$, $z'=(x+y-z-1)/\sqrt{3}$.

36.13.1. $b\sqrt{1-D^2/(a^2c^2(a^2-c^2))}$.

36.14. Линия пересечения состоит из двух эллипсов. Указание. Параметризовать второй эллипсоид равенствами $x=a\cos u\cos v$, $y=b\sin u\cos v$, $z=c\sin v$.

36.15. $x^2-y^2+z^2-2z=0$ и $x^2-y^2-z^2+4z=0$.

36.16. $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{108}-\frac{z^2}{36}=-1.$ **36.17.** $x=\pm 3\sqrt{3}/2$ и $x=\pm 3\sqrt{2}$.

36.18. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{1}$, $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{-1}$.

36.19. Если $x-z=u(1-y)$, $u(x+z)=1+y$ и $x-z=v(1+y)$, $v(x+z)=1-y$ – две образующие, то $\cos\theta=\pm\frac{(uv-1)^2}{(u^2+1)(v^2+1)}$.

36.20. $x-2y-3z-6=0$. **36.21.** $\frac{y}{b}\pm\frac{z}{c}=0$.

36.25. а) Эллипс, гипербола, парабола, пара пересекающихся прямых, пара параллельных прямых; б) эллипс, гипербола, пара мнимых пересекающихся прямых, мнимый эллипс.

36.26. Пара прямых, пересекающихся в точке $(6,-2,2)$.

36.27. Пара параллельных прямых $4x-3y+5=0$, $3x+4y-5z=0$ и $4x-3y-5=0$, $3x+4y-5z=0$.

36.28. По гиперболе. **36.29.** $(4,2,-2)$.

36.30. $x=3t$, $y=3t$, $z=-t$.

36.31. Две окружности радиуса a. Указание. Показать, что линия пересечения лежит в плоскости $z=\pm\frac{c}{b}\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2+c^2}}y$.

36.32. Указание. Ввести систему координат так, чтобы ось вращения была осью Oz, а прямая имела уравнение $cx-az=0$, $y=-a$.

36.33. Однополостный гиперболоид $\dfrac{x^2}{4}+y^2-z^2=1$.

36.33.1. $a\sqrt{\pm1+D^2/(b^2c^2(b^2+c^2))}$.

36.34. $\dfrac{(x-2)^2}{1/3}+\dfrac{(y-3)^2}{3/4}=-2(z-6)$. **36.35.** $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z}{c}=0$.

36.36. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z}{c}=0$. **36.37.** $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=2z$ или $11x^2-33y^2=-8z$.

36.38. $x^2-y^2+z=0$. **36.39.** Эллипс $x^2+2y^2+2x+4y-2=0$.

36.40. По гиперболе.

36.41. $\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}+h=0$, $(\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b})h=-2z$.

36.42. $x=y=-1$, $z\ge1$. **36.43.** $p(a^2+b^2)+2c>0$.

36.44.1. Гипербола, пара пересекающихся прямых, парабола, пара совпадающих прямых.

36.45. $x=t$, $y=\pm2t\mp4$, $z=t-1$.

36.46. $x=8-2t$, $y=t$, $z=4-2t$ и $x=16+2t$, $y=t$, $z=16+4t$.

36.47. $x-y=0$, $z=0$ и $x+y=0$, $z=0$.

36.48. Гипербола $z=\dfrac{b^2-a^2}{2}$, $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=b^2-a^2$, $a\ne b$. Пара пересекающихся прямых $z=0$, $x=y$ и $z=0$, $x=-y$.

36.51. Параболоид вращения.

36.52. Гиперболический параболоид. Указание. Ввести систему координат так, чтобы прямые задавались уравнениями $z=-h$, $x\sin\alpha-y\cos\alpha=0$ и $z=h$, $x\sin\alpha+y\cos\alpha=0$.

36.53. Гиперболический параболоид: $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{16}=z$.

36.54. Окружность $x^2+y^2=4$, $z=2$.

36.55. $(0,\pm12,9)$, $R=15$. Указание. Показать, что пересечение лежит на плоскостях $3y\pm4z=0$.

36.56. Четыре прямые: $x=\pm\dfrac{z+a}{\sqrt2}$, $x=\pm\dfrac{z-a}{\sqrt2}$ и $x=\pm\dfrac{z+a}{\sqrt2}$, $x=\mp\dfrac{z-a}{\sqrt2}$.

36.57. $x\pm y\pm\sqrt2=0$, $z=0$; $z\pm x\sqrt2+1=0$, $y=0$; $z\pm y\sqrt2-1=0$, $x=0$. Сечение состоит из четырех прямых $x=t$, $y=\pm(t+\sqrt2)$, $z=-1-t\sqrt2$ и $x=t$, $y=\pm(t-\sqrt2)$, $z=-1+t\sqrt2$.

§37

37.1. $x^2+y^2=2$. **37.2.** $x^2+y^2=4$. **37.3.** $xy+yz+xz=0$.

37.4. $\dfrac{(x-2)^2}{4}+\dfrac{(y-3)^2}{9}-\dfrac{(z-6)^2}{36}=0$.

37.5. $y^2+z^2=(kx+b)^2$. **37.6.** Конус $40(x-2)^2-9y^2-9z^2=0$.

37.7. $\begin{vmatrix} y-y_0 & z-z_0 \\ b & c \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} z-z_0 & x-x_0 \\ c & a \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ a & b \end{vmatrix}^2=r^2(a^2+b^2+c^2)$. Указание. Учесть, что точки цилиндра равноудалены от его оси.

37.8. $8x^2+5y^2+5z^2-4xy+8yz+4xz+16x+14y+22z-39=0$. Указание. См. указание к задаче 37.7.

37.9. $2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2xz-3=0$. Указание. См. указание к задаче 37.7.

37.10. $\arccos\dfrac{121}{125}$. **37.11.** $\alpha(x-y)=\beta$, $\beta(x+y)=\alpha$, $\alpha^2+\beta^2\neq 0$.

37.12. $\alpha(z-y)=\beta x$, $\beta(z+y)=\alpha x$, $\alpha^2+\beta^2\neq 0$.

37.13. Указание. Найти на кривой четыре точки, не лежащие в одной плоскости.

37.14. $y^2+z^2=1$. Не является.

37.15. Центр $(3/2,0,7/4)$; ось симметрии $y=0$, $x+2z=5$.

37.16. Центр $(8/3,0,2/3)$; полуоси $a=\sqrt{32/9}$, $b=\sqrt{8/3}$.

37.17. Центр $(-8/3,0,1/3)$; полуоси $a=\sqrt{20/9}$, $b=\sqrt{10/3}$.

37.19. Ось $x=\dfrac{1}{8}+t$, $y=-\dfrac{1}{2}$, $z=\dfrac{11}{8}-t$; параметр $p=3\sqrt{2}/4$.

37.20. $\left(\dfrac{18}{13},\dfrac{24}{13},-\dfrac{25}{26}\right)$ и $\left(-\dfrac{18}{13},-\dfrac{24}{13},\dfrac{25}{26}\right)$.

37.21. а) Цилиндр $x^2+y^2+2z^2-2xz-2yz-1=0$; б) цилиндр $x^2+2y^2+z^2-2xz+2x-2z-8=0$; в) цилиндр $y^2+z^2-2px+2yz+4pz=0$.

37.22. а) Конус $x^2+y^2+2xz-2x+2z+1=0$; б) конус $y^2-2z^2+xz-x+2z=0$; в) конус $x^2-y^2-2(z-2)^2=0$.

§38

38.1. $xy+xz\pm yz=0$, $xy-xz\pm yz=0$. **38.2.** $z^2=\pm 2xy$.

38.3. $(2x+z)^2-10(2x+z)+25y^2=0$.

38.4. $x=y=0$ и $\dfrac{x}{-16}=\dfrac{y}{24}=\dfrac{z}{9}$. **38.5.** $\dfrac{x\pm\sqrt{12}}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z}{-1}$.

38.6. 1) Эллипс $3x^2+4y^2+2xy+5x-8=0$, $z=0$; 2) гипербола $3z^2+2yz-z-1=0$, $x=0$; 3) пара пересекающихся прямых $x+z=0$, $y=0$ и $x-1=0$, $y=0$.

38.7. Парабола с вершиной $(0,0,0)$, $p=1/\sqrt{2}$, осью $y=0$, $x-z=0$ и фокусом $(1/4,0,1/4)$.

38.8. 1) $2x+y=0$, $y+2z-2=0$; 2) $x-2y+3z+2=0$, $x-2y+3z-3=0$; 3) $x+2y+3z+4=0$, $3x-2y+z-6=0$; 4) $x+y+z+1=0$, $5x+4y+3z+2=0$.

38.9. 1) Эллипсоид; 2) однополостный гиперболоид; 3) двуполостный гиперболоид; 4) конус; 5) эллиптический параболоид; 6) гиперболический параболоид; 7) эллиптический цилиндр; 8) параболический цилиндр; 9) гиперболический параболоид; 10) однополостный гиперболоид.

38.10. У всех поверхностей оси канонической системы координат параллельны осям рассматриваемой системы координат.

1) Эллипсоид с центром $(3,-1,2)$ и полуосями $a=7$, $b=7/2$, $c=7/3$;

2) однополостный гиперболоид вращения $\dfrac{(x')^2}{4}-\dfrac{(y')^2}{16}-\dfrac{(z')^2}{16}=-1$ с центром $(-4,0,-6)$ и осью вращения, параллельной оси Ox';

3) конус вращения $(x')^2-\dfrac{(y')^2}{3}+(z')^2=0$ с вершиной $(3,5,-2)$ и осью вращения, параллельной оси Oy';

4) параболоид вращения с вершиной $(10,-1/2,-3/2)$, $p=5/12$, вектор $\{-1,0,0\}$ параллелен оси вращения и направлен в сторону вогнутости;

5) гиперболический параболоид $z' = 2(x')^2 - 4(y')^2$ с вершиной $(3/2, 1, 1/2)$;

6) эллиптический параболоид $z' = (x')^2 + 3(y')^2$ с вершиной $(0, 1, -2)$;

7) конус $(x')^2 + 2(y')^2 - 3(z')^2 = 0$ с вершиной $(-1, -1, -1)$;

8) однополостный гиперболоид $\dfrac{(x')^2}{16} + \dfrac{(y')^2}{4} - \dfrac{(z')^2}{16} = 1$ с центром $(5, 2, 3)$;

9) сфера с центром $(1, -2/3, 0)$ радиуса $R = 4/3$;

10) круговой цилиндр $(x-1)^2 + (y + \dfrac{2}{3})^2 = \dfrac{16}{9}$;

11) пара пересекающихся плоскостей $(2x - 1) \pm (y - 2) = 0$.

38.11. 1) Круговой конус $-(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = 0$ с вершиной $(0, 0, 0)$, направляющий вектор оси $\{1, 1, 0\}$;

2) гиперболический параболоид $(x')^2 - (y')^2 = 2z'$ с вершиной $(0, 0, 0)$; ортонормированный базис канонической системы координат $\mathbf{e}_1' = \left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}$, $\mathbf{e}_2' = \left\{-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}$, $\mathbf{e}_3' = \{0, 0, 1\}$;

3) параболический цилиндр $(z')^2 = 5x'$ с вершиной $(0, 0, 0)$; ортонормированный базис канонической системы координат $\mathbf{e}_1' = \left\{\dfrac{3}{5}, \dfrac{4}{5}, 0\right\}$, $\mathbf{e}_2' = \left\{-\dfrac{4}{5}, \dfrac{3}{5}, 0\right\}$, $\mathbf{e}_3' = \{0, 0, 1\}$;

4) гиперболический цилиндр $(z')^2 - 2(x')^2 = 1$; направляющая гипербола имеет центр в точке $(0, 0, 0)$, ее действительная ось параллельна вектору $\mathbf{e}_1' = \left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}$; направляющая цилиндра параллельна вектору $\mathbf{e}_2' = \left\{-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}$.

38.12. 1) Круговой цилиндр $(x')^2 + (z')^2 = \dfrac{4}{25}$, ось параллельна вектору $\{-2, 1, 0\}$ и проходит через точку $\left(0, 0, -\dfrac{2}{5}\right)$;

2) параболический цилиндр $(x')^2 - 5y' = 0$, направляющая парабола имеет вершину в точке $(-1, -12/25, -16/25)$ и ее ось параллельна вектору $\{0, -3, -4\}$, направленному в сторону вогнутости параболы; образующая цилиндра параллельна вектору $\{0, 4, -3\}$;

3) параболический цилиндр $z' = 2(x')^2$, направляющая парабола имеет вершину в точке $(0, 0, 1)$ и ее ось параллельна вектору $\{0, 0, 1\}$, направленному в сторону вогнутости параболы; образующая цилиндра параллельна вектору $\{-1, 1, 0\}$;

4) круговой конус $(x')^2 - (y')^2 + (z')^2 = 0$ с вершиной $(0, 0, 1)$ и ортонормированным базисом канонической системы координат $\mathbf{e}_1' = \left\{\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}$, $\mathbf{e}_2' = \left\{-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}$, $\mathbf{e}_3' = \{0, 0, 1\}$;

5) пара пересекающихся плоскостей $x - y \pm (z - 1) = 0$;

6) гиперболический параболоид $(x')^2 - (y')^2 = -2z'$ с центром $(-1, -1, 3/2)$ и ортонормированным базисом канонической системы координат $\mathbf{e}_1' = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}$, $\mathbf{e}_2' = \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}$, $\mathbf{e}_3' = \{0, 0, 1\}$;

7) круговой цилиндр $(x')^2 + (z')^2 = 1$, его ось проходит через точку $(0, 0, -1)$ и имеет направляющий вектор $\{-1, 1, 0\}$;

8) эллиптический параболоид $(x')^2 + 2(z')^2 = \frac{y'}{\sqrt{2}}$ с вершиной $\left(1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$; направляющий вектор оси параболоида $\{0, 1, 1\}$, оси эллипса в сечении параллельны векторам $\{1, 0, 0\}$, $\{0, -1, 1\}$;

9) круговой конус $-(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = 0$ с вершиной $(-1, -2, -1)$ и ортонормированным базисом канонической системы координат $\mathbf{e}_1' = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}$, $\mathbf{e}_2' = \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right\}$, $\mathbf{e}_3' = \{0, 0, 1\}$.

38.13. Гиперболический параболоид $y^2 + 2yz - z^2 + 4x - 2 = 0$. Каноническое уравнение: $(y')^2 - (z')^2 + 8\sqrt{2}x' = 0$ в системе координат $\mathbf{e}_1' = \{1, 0, 0\}$, $\mathbf{e}_2' = \frac{1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}\{0, 1 + \sqrt{2}, 1\}$, $\mathbf{e}_3' = \frac{1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}\{0, -1, 1 + \sqrt{2}\}$. Центр $(1/2, 0, 0)$.

§39

39.1. 1),2),3),4),8),10),11),13),14),15) Да. 5),6),7),9),12),16),17) Нет.

39.2. 1) Нет; 2) да, абелева группа; 3) да, неабелева группа; 4) нет; 5) нет; 6) если $d \neq 1$, то нет, если $d = 1$, то это неабелева группа; 7) да, неабелева группа; 8) да, абелева группа; 9) нет; 10) да, абелева группа; 11) нет; 12) да, абелева группа; 13) нет; 14) да, неабелева группа; 15) да, неабелева группа; 16)-18) да, абелевы группы.

39.3. 1) Да, неабелева группа; 2) нет; 3) нет; 4) нет; 5) да, неабелева группа; 6) да, неабелева группа; 7) да, неабелева группа; 8) нет; 9) да, неабелева группа; 10) да, абелева группа; 11) да, абелева группа; 12) нет; 13) да, абелева группа.

39.4. 1),3),4) Да. 2),5) Нет. **39.5.** Нет.

39.7. Не образует в обоих случаях.

39.8. Указание. Показать, что рассматриваемые уравнения имеют решения.

39.9. Указание. Убедиться в том, что выполнены все условия задачи 39.7.

39.10. Указание. Рассмотреть равенство $(ab)^2 = 1$.

39.15. Указание. Учесть, что уравнение $x + x = 1$ в первой группе не имеет решений.

39.16. Указание. Рассмотреть множество решений уравнения $x^2 = e$ в каждой группе: в первой группе уравнение имеет два решения, во второй – более двух решений.

39.17. Указание. Сравнить множества решений уравнения $x^2 = e$ в каждой группе.

39.18. Указание. Пусть существует изоморфизм φ между этими группами. Тогда, так как $\varphi(0) = O$, то $\varphi(1) \equiv A \neq O$. Доказать, что в этом случае $\varphi(k) = kA$ для $\forall k \in \mathbb{Z}$ и $\varphi(p) = pA$ для $\forall p \in \mathbb{Q}$. Используя предельный переход показать, что $\forall x \in \mathbb{R}$ изоморфизм действует по правилу $\varphi(x) = xA$.

39.19. Указание. Сравнить множества решений уравнения $x^2 = e$ в каждой группе.

39.23. Указание. См. пример 39.6.

39.24. Указание. Если $a^2 = 1$ для любого элемента группы, то воспользоваться задачей 39.10. В противном случае найти некоммутирующие элементы a и b, для которых $a^2 = b^3 = 1$.

39.27. Указание. б) Если $A \cup B$ – подгруппа, $x \in A \setminus B$, $y \in B \setminus A$, то рассмотреть xy. в) Рассмотреть $x \in (H \setminus A) \cap (H \setminus B)$.

39.28. Указание. Рассмотреть элементы a^k, $k \in \mathbb{N}$, для каждого $a \in H$.

39.30. Указание. Учесть, что если $H \subset \mathbb{Z}$ – подгруппа, $m, n \in H$ и $\text{НОД}(m, n) = p$, то $\exists k, l \in \mathbb{Z}$: $mk + nl = p$. Поэтому $p\mathbb{Z} \subset H$.

39.32. Нет. Указание. Рассмотреть циклическую подгруппу, порожденную неединичным элементом.

39.33. Указание. Рассмотреть циклические подгруппы $\{a\}$, порожденные элементами $a \in G$.

39.35. Все циклические группы порядка, равного квадрату простого числа.

39.37. Бесконечная циклическая группа, все циклические группы простых порядков и единичная группа.

39.38. За исключением самой подгруппы H смежные классы gH не являются группами, так как не содержат единицу.

39.39. Указание. Рассмотреть отображение $\varphi : aH \to bH$, определенное правилом: $\varphi(ah) = bh$, $\forall h \in H$.

39.44. а) Множества $C_k = \{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \equiv k (\text{mod } p)\}$, $k = \overline{0, p-1}$;

б) множества $C_\alpha = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x - [x] = \alpha\}$, $0 \leq \alpha < 1$;

в) множества $C_k = \{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \equiv (3k)(\text{mod } 24)\}$, $k = \overline{0, 7}$;

г) множества $C_\alpha = \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x - [x] = \alpha\}$, $\alpha \in [0, 1) \cap \mathbb{Q}$;

д) множества $\mathbb{R}_+$ и $\mathbb{R}_-$; е) множества $C_\alpha = \{\alpha; -\alpha\}$, $\alpha > 0$.

39.45. а) Множества прямых, параллельных оси абсцисс;

б) множества $C_\mathbf{b}$ параллельных переносов на векторы $\mathbf{b} + \alpha\mathbf{a}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), где $\mathbf{b}$ – векторы плоскости, перпендикулярные $\mathbf{a}$;

в) множества C_α, $\alpha \in [0, 2\pi/n)$, поворотов на углы $\alpha + 2\pi k/n$ ($k \in \mathbb{Z}$);

г) множества C_k, $k = \overline{1, n}$, всех перестановок $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, у которых $\alpha_n = k$;

д) множества $C_{\alpha,\beta}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, многочленов $\alpha x^5 + \beta x^4 + f(x)$, где $\deg f(x) \leq 3$;

е) множества C_α, $\alpha \in \mathbb{R}$, многочленов $\{f(x) \in M_4 \,|\, f(x) = xf_1(x) + \alpha,\ \deg f_1(x) \leq 3\}$.

39.46. а) Множества C_K матриц $\{A + K \,|\, A \in \mathbb{R}^{n\times n}, A^T = A\}$, где K – все кососимметрические матрицы из $\mathbb{R}^{n\times n}$;

б) множества C_S матриц $\{A + S \,|\, A \in \mathbb{R}^{n\times n}, A^T = -A\}$, где S – все симметрические матрицы из $\mathbb{R}^{n\times n}$;

в) множества матриц $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ с одинаковыми элементами над главной диагональю (т.е. при $j > i$).

39.47. а) Левостороннее разложение – это объединение множеств матриц $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, у которых столбцы с одинаковыми номерами пропорциональны, а правостороннее разложение состоит из множеств матриц с аналогичным свойством строк;

б) левостороннее разложение – это объединение множеств матриц, в каждом из которых содержатся все матрицы, получаемые друг из друга произвольной перестановкой столбцов; правостороннее разложение состоит из множеств матриц с аналогичным свойством строк;

в) левостороннее разложение – это объединение множеств матриц, в каждом из которых содержатся все матрицы, получаемые друг из друга элементарным преобразованием столбцов, в котором к какому-либо столбцу прибавляется столбец с меньшим номером, умноженный на число; правостороннее разложением строится с помощью аналогичных преобразований строк;

г) левостороннее разложение совпадает с правосторонним и является объединением множеств C_α матриц $\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det A = \alpha\}$.

39.48. Левый смежный класс содержит все дробно-линейные функции $y = \dfrac{a_0x+b}{c_0x+d}$, у которых a_0, c_0 фиксированы, а $b, d \in \mathbb{R}$ произвольны и удовлетворяют условию $a_0d - c_0b \neq 0$; правый смежный класс содержит все функции $y = \dfrac{ax+b}{c_0x+d_0}$, у которых c_0, d_0 фиксированы, а $a, b \in \mathbb{R}$ произвольны и удовлетворяют условию $ad_0 - bc_0 \neq 0$. Подгруппа не является нормальным делителем.

39.49. 3) Левый смежный класс AH составляют все матрицы, получаемые из A прибавлением ко второму столбцу первого, умноженного на произвольное число; правый же смежный класс HA составляют все матрицы, получаемые из A прибавлением к первой строке второй, умноженной на произвольное число. Подгруппа H не является нормальным делителем.

39.50. 1) Да, является. 2) Если $A \cap A_0 = \varnothing$, то смежный класс $A \triangle \mathcal{H}$ содержит все подмножества множества M, не лежащие в $M \setminus A_0$. Если $A \cap A_0 \neq \varnothing$, то смежный класс $A \triangle \mathcal{H}$ содержит все подмножества множества M, содержащиеся в $A \cap A_0$.

39.52. Три подгруппы второго порядка: все перестановки, оставляющие на месте число k $(k = 1, 2, 3)$, и одна подгруппа третьего порядка, содержащая все четные перестановки. Последняя подгруппа является нормальным делителем.

39.53. а) 2; б) n; в) 4; г) 5; д) 6.

39.55. а) 1; б) 1 и 2; в) 1 и 2; г) любого положительного порядка.

39.56. Указание. См. задачу 39.53, пункт "а".

39.57. Указание. Рассмотреть множество всех матриц вида $\begin{bmatrix} \cos(2\pi k/n) & -\sin(2\pi k/n) \\ \sin(2\pi k/n) & \cos(2\pi k/n) \end{bmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{Z}$.

39.58. Указание. См. пример 39.8.

39.59. Указание. См. пример 39.7.

39.62. Указание. а) Воспользоваться тем, что если $(ab)^n = 1$, то $b(ab)^n a = ba$ и $(ba)^n = 1$. б),в) Использовать пункт "а". г) Например, в S_3: $a = (3,1,2)$, $b = (2,1,3)$, $c = (1,3,2)$.

39.63. Указание. а) Рассмотреть $(ab)^{rp}$ и $(ab)^{sp}$, где p – порядок ab, r – порядок a, s – порядок b. б) Следует из пункта "а". Нет, неверно – рассмотреть перестановки $a = (3,1,2)$, $b = (2,1,3)$.

39.64. $n/\text{НОD}(n,k)$. **39.65.** ± 1.

39.66. Указание. Если $x^k = 1$ и $x = a^l$, то $a^{kl} = 1$, откуда kl делится на n и l делится на $\text{НОD}(n,k)$. Элемент a^k имеет порядок $n/\text{НОD}(n,k)$ (см. задачу 39.64) и поэтому удовлетворяет условию при $\text{НОD}(n,l) = n/k$.

39.67. Указание. См. пример 39.8.

39.68. Указание. Воспользоваться теоремой 39.7, взяв в качестве подгруппы циклическую группу, порожденную рассматриваемым элементом.

39.70. Указание. См. задачу 39.59.

39.73. Указание. Пусть $\{a\}$ – нормальный делитель в группе G. Если операция некоммутативна, то $\forall b \in G\ \exists m, k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$: $ab = ba^m$ и $ba = a^k b$. Показать, что $ba = ba^{mk}$ и, следовательно, $a = a^{mk}$.

39.74. $p^m - p^{m-1}$.

39.75. Указание. а)–г) Во всех случаях подгруппами являются $\{a^d\}$, где d – делитель порядка n группы.

39.76. Указание. а) Учесть, что для взаимно простых p и q существуют $u, v \in \mathbb{Z}$ такие, что $pu + qv = 1$. б) Воспользоваться задачей 39.63. в) Рассмотреть наименьшее натуральное s, для которого $a^s \in H$. г) Использовать пункт в), откуда если d_1 и d_2 – различные делители n, то соответствующие подгруппы имеют разные порядки.

39.78. Неверно: в мультипликативной группе невырожденных матриц из $\mathbb{R}^{2\times 2}$ элементы второго порядка не образуют подгруппу.

39.82. а) Циклическая группа порядка p; б) циклическая группа порядка 5; в) циклическая группа порядка 6; г) циклическая группа порядка 2.

§40

40.1. 1) Кольцо с единицей; 2) кольцо без единицы; 3) кольцо без единицы; 4) не образуют; 5) поле; 6) не образуют; 7) кольцо с единицей; 8) кольцо с единицей; 9) поле; 10) не образуют; 11) поле; 12) поле.

Указание. 11) Для нахождения элемента $x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4}$, обратного к произвольному ненулевому элементу вида $a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$, составить систему для нахождения x, y, z и показать, что определитель ее матрицы $a^3 + 2b^3 + 4c^3 - 6abc$ обращается в нуль при $a, b, c \in \mathbb{Q}$ только в том случае, когда $a = b = c = 0$.

40.2. 1) Не образуют; 2) не образуют; 3) некоммутативное кольцо с единицей и с делителями нуля; 4) коммутативное кольцо с единицей и с делителями нуля; 5) некоммутативное кольцо без единицы и с делителями нуля; 6) поле; 7) поле; 8) коммутативное кольцо с единицей и с делителями нуля; 9) поле.

40.3. 1) Не образует (см. пример 39.2); 2) поле; 3) коммутативное кольцо без единицы и с делителями нуля; 4) коммутативное кольцо с единицей и с делителями нуля; 5) не образует; 6) некоммутативное кольцо без единицы и с делителями нуля.

40.4. 1) Не образует; 2) не образует; 3) коммутативное кольцо с единицей и без делителей нуля; 4) коммутативное кольцо с единицей и без делителей нуля; 5) коммутативное кольцо с единицей и с делителями нуля; 6) коммутативное кольцо без единицы и с делителями нуля; 7) коммутативное кольцо с единицей и с делителями нуля; 8) поле.

40.5. Нет. **40.6.** Нет.

40.14. 1) Все классы C_k, $k \geq 1$, где k не является делителем p; все остальные классы, кроме C_0;

2) все матрицы, у которых $a_{ii} \neq 0$, $i = \overline{1,n}$; все матрицы, у которых $a_{ii} = 0$ хотя бы при одном i;

3) все матрицы αI, у которых $\alpha \neq 0$; делителей нуля нет;

4) см. ответ пункта 2).

40.16. Пары $(a, 0)$ и $(0, b)$, где $ab \neq 0$.

40.17. Матрицы, у которых элемент в левом верхнем углу отличен от нуля.

40.19. $\mathbb{Z}_4$.

40.20. Указание. Раскрыть скобки в произведении $(a+b)(1+1)$ двумя разными способами.

40.22. Указание. Пусть a – элемент кольца, отличный от нуля. Показать, что соответствие $x \mapsto ax$, где x – любой элемент, является взаимно однозначным отображением данного кольца на себя.

40.23. Указание. См. задачу 39.13.

40.24. Указание. а) Показать, что отображение $x \mapsto ax$ ($a \in K$, $a \neq 0$) – биекция; б) элемент, обратимый справа, не является делителем нуля, и поэтому $x \mapsto ax$ ($a \in K$, $a \neq 0$) – биекция; в) если $ab = 0$ и a не является правым делителем нуля, то элементы $x_1 a, \ldots, x_n a$ попарно различны и один из них равен 1. Утверждения б) и в) не верны в кольцах без единицы.

40.25. Указание. б) Учесть, что если $ab = 1$, то $(ba - 1)b = 0$; в) см. задачу 40.24, п."б"; г) см. ответ к задаче 40.24.

40.26. Указание. Рассмотреть кольцо из задачи 40.2(5).

40.27. Вообще говоря, не является.

40.35. Указание. См. задачу 39.68.

40.36. Указание. Учесть равенство $na = (\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{n})a$.

40.40. Указание. Рассмотрим $0, 1 \in P$ и $\forall a \in P$, отличный от них. Из задачи 40.33 следует, что $\underbrace{1 + 1 + \ldots + 1}_{6} = 0$. Поэтому для $x = 1 + 1 + 1$: $x + x = 0 \Rightarrow (1 + 1)x = 0 \Rightarrow$ характеристика поля P равна 2 или 3. Если характеристика равна 2, то $a + a = 0$ и для $b = a + 1$: $b + b = 0 \Rightarrow a + b = a + a + 1 = 1$ и $\{0, 1, a, b\}$ – подгруппа в P, что противоречит теореме Лагранжа. Если характеристика равна 3, то $0, 1, 1+1 \equiv a \neq 0$ и $a \in P$. Пусть $b \in P$ отличен от них. Тогда $b + b + b = 0$ и $b + b \neq 0$. Если $b + b = 1$, то $1 + b = 0 \Rightarrow b = a$. Если $b + b = a$, то $a + b = 0 \Rightarrow b = 1$. Таким образом, $\{0, 1, a, b, 2b\} \subset P$, и следовательно, в поле P существует еще один элемент c, отличный от вышеуказанных. Тогда $c + c \neq 0$ – еще один, седьмой, элемент поля P.

40.41. Указание. Аддитивная группа поля K из четырех элементов не может быть циклической (см. задачу 40.38), и поэтому все ее отличные от нуля элементы имеют порядок 2, $K = \{0, 1, a, 1 + a\}$, при этом умножение определяется однозначно, в частности, $a(a + 1) = 1$.

40.42. Указание. Мультипликативная группа поля из n элементов имеет порядок $n - 1$.

40.45. Множество дробно-рациональных функций, представимых в виде $f(x)/g(x)$, $g(x) \not\equiv 0$, где $f, g \in \mathbb{Z}_2[x]$.

40.46. 2 при $p = 3$; 4 при $p = 5$; 3 при $p = 7$; 10 при $p = 11$. Элемент 2 является образующим в $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_5$ и $\mathbb{Z}_{11}$.

40.47. а) 3 и 5; б) 2, 3, 8 и 9.

40.48. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & p-1 & 0 \end{bmatrix}$.

40.49. Нет, неверно. Указание. Воспользоваться определением определителя.

40.50. Указание. См. указание к предыдущей задаче.

40.53. а) $\{-1, -3 + 2\sqrt{2}\}$; б) $\varnothing$; в) $\varnothing$; г) $\varnothing$; д) $3 \pm 2\sqrt{2}$. Указание. Число 13 не является полным квадратом в этом поле.

40.54. а) $(1,2,0)$, $(2,0,1)$, $(0,1,2)$; б) $(1,2,0)$.

40.55. а) $\varnothing$; б) $(2,6,5)$.

40.56. а) Имеет два решения; б) имеет одно решение; в) имеет одно решение для любого $a \in \mathbb{Z}_{11}$.

40.59. Указание. См. [9], с.155.

§41

41.1. а) $1+18i$; б) $4i$; в) $7+17i$; г) 4; д) $52i$; е) $10-11i$; ж) $14-5i$; з) $5+i$; и) $1 + \frac{1}{3}i$.

41.2. $i^{77} = i$; $i^{98} = -1$; $i^{-57} = -i$; $i^n = 1$ при $n = 4k$, $i^n = i$ при $n = 4k+1$, $i^n = -1$ при $n = 4k+2$, $i^n = -i$ при $n = 4k+3$ $(k \in \mathbb{Z})$.

41.5. а) $(i, 1+i)$; б) $(2, 1-i)$; в) $\varnothing$; г) $(-i/2 + (1+i/2)z_2, z_2)$, $z_2 \in \mathbb{C}$; д) $(3-11i, -3-9i, 1-7i)$.

41.6. а) $(2,-3)$; б) $(3,-5)$. **41.9.** а) 0, 1, $-\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; б) 0, ± 1, $\pm i$.

41.10. а) $\pm 2i$; б) $\pm(1+i)$; в) $\pm(2-2i)$; г) $\pm(2-i)$; д) $\pm(1+4i)$; е) $\pm(5+6i)$; ж) $\pm(1-3i)$; з) $\pm(3-i)$; и) $\pm\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{13}+2}{2}} - i\sqrt{\dfrac{\sqrt{13}-2}{2}}\right)$.

41.11. а) $\{3-i, -1+2i\}$; б) $\{2+i, 1-3i\}$; в) $\left\{1-i, \dfrac{4-2i}{5}\right\}$; г) $\{5-2i, 2i\}$.

41.12. Указание. Воспользоваться задачей 41.7, п."б".

41.13. Нет, не образует.

41.14. а) Коммутативное кольцо с единицей и без делителей нуля, но не поле; б) поле.

41.16. Некоммутативное кольцо с единицей и без делителей нуля.

41.18. а) $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$; б) $n = 4k-2$, $k \in \mathbb{N}$.

41.21. а) $b + 2c \neq (a-2d)i$; б) $b + 2c = (a-2d)i$; в) $a = d = 0$, $b = -1$, $c \in \mathbb{R}$; г) $a^2 + b^2 = 1$, $d = -2a$, $c = 2b$.

41.22. Можно с $\lambda = \sqrt{5}$. Представление с чисто мнимым λ невозможно.

§42

42.1. Тригонометрическая форма имеет вид $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где:

1) $r = 5$, $\varphi = 0$; 2) $r = 1$, $\varphi = \pi/2$; 3) $r = 2$, $\varphi = \pi$; 4) $r = 3$, $\varphi = 3\pi/2$; 5) $r = \sqrt{2}$, $\varphi = \pi/4$; 6) $r = \sqrt{2}$, $\varphi = -\pi/4$; 7) $r = \sqrt{2}$, $\varphi = 3\pi/4$; 8) $r = 2$, $\varphi = \pi/3$; 9) $r = 2$, $\varphi = -\pi/3$; 10) $r = 2$, $\varphi = 2\pi/3$; 11) $r = 2$, $\varphi = \pi/6$; 12) $r = 2$, $\varphi = 5\pi/6$; 13) $r = 2$, $\varphi = 7\pi/6$; 14) $r = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, $\varphi = \pi/12$;

15) $r = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, $\varphi = -5\pi/12$; 16) $r = 1$, $\varphi = -\alpha$; 17) $r = 1$, $\varphi = \pi/2 - \alpha$; 18) $r = 1$, $\varphi = 2\alpha$; 19) $r = \sqrt{2}$, $\varphi = \pi/4$.

42.3. 1) Окружность радиуса 1 с центром $(0, 0)$;

2) круг радиуса 1 с центром $(0, 0)$;

3) внутренность круга радиуса 2 с центром $(0, 0)$;

4) круг радиуса 1 с центром $(0, 1)$;

5) внутренность круга радиуса 1 с центром $(-1, 1)$;

6) кольцо, ограниченное окружностями радиусов 1 и 3 с общим центром $(1, 0)$;

7) прямая $y = -1$; 8) прямая $y = 2x - 5$;

9) луч, выходящий в первую четверть из начала координат по прямой $y = x/\sqrt{3}$;

10) внутренность острого угла между лучами, выходящими из начала координат и наклоненными к положительному направлению оси Ox под углами $\pm\pi/3$;

11) угол между прямыми $y = \pm x - 1$, в котором расположена точка $(1, -1)$;

12) прямая $y = 1$;

13) окружность радиуса 1 с центром $(1, 0)$, из которой исключено начало координат;

14) внутренность круга радиуса 1 с центром $(0, 1)$;

15) внутренность квадрата с вершинами $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$;

16) окружность радиуса 2/3 с центром $(2/3, 0)$;

17) эллипс $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{4} = 1$;

18) верхняя ветвь гиперболы $\dfrac{4x^2}{7} - \dfrac{4y^2}{9} = -1$;

19) окружность радиуса 1 с центром $(0, 0)$;

20) окружность радиуса 3 с центром $(-3, 0)$;

21) объединение внутренностей колец $4n^2\pi^2 < x^2 + y^2 < (2n + 1)^2\pi^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$;

22) нижняя полуплоскость $y \leq 0$, из которой исключена прямая $y = -1$;

23) окружность радиуса 2 с центром $(1, 0)$.

42.4. $(7 + i)t$, где $t \geq 0$.

42.6. а) Образует в том и только том случае, когда $r = 1$ или $r = 0$; б) не образует.

42.7. а) $3 + 4i$; б) $5 - 12i$; в) $\{0, \pm i\}$; г) $\left\{0;\ \cos\dfrac{2\pi k}{5} + i\sin\dfrac{2\pi k}{5}, k = \overline{0, 4}\right\}$;

д) $\left\{0, -1, \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2} i\right\}$.

42.8. а) $z_2 = tz_1$, $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$; б) $z_2 = tz_1$, $t \in \mathbb{R}$, $t \leq 0$.

42.10. $\operatorname{Im} \dfrac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = 0$. **42.13.** $\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi)$.

42.14. $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos(2\varphi - \dfrac{\pi}{12}) + i\sin(2\varphi - \dfrac{\pi}{12})\right)$.

42.15. а) $2^{12}(1 + i)$; б) $2^9(1 - i\sqrt{3})$; в) $(2 - \sqrt{3})^{12}$; г) 2; д) -64.

42.16. а) $2^{n/2}\left(\cos\dfrac{\pi n}{4} + i\sin\dfrac{\pi n}{4}\right)$; б) $\cos\dfrac{\pi n}{3} - i\sin\dfrac{\pi n}{3}$;

в) $\cos(2\alpha n) - i\sin(2\alpha n)$; г) $2i^{n-1}$.

42.17. $2^n \cos^n \frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha n}{2} + i\sin\frac{\alpha n}{2}\right)$.

42.18. Указание. Показать, что $z = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$.

42.19. а) Множества $C_{x,y} = \{a + ib \in \mathbb{C} \mid a - [a] = x, b - [b] = y\}$, $0 \le x, y < 1$;

б) множества $C_r = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$, $r \ge 0$;

в) множества $C_\varphi = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \arg z = \varphi\}$, $0 \le \varphi < 2\pi$;

г) множества $C_\varphi = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \arg z = \varphi\}$, $0 \le \varphi < \pi$;

д) множества $C_y = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = y\}$, $y \in \mathbb{R}$;

е) множества $C_b = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = \operatorname{tg}\varphi_0 \cdot \operatorname{Re} z + b\}$, $b \in \mathbb{R}$, если $\varphi_0 \ne \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, и $C_b = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = b\}$, $b \in \mathbb{R}$, если $\varphi_0 = \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

42.22. а) 0; б) -3; в) $3i\sqrt{3}$.

42.23. а) $\cos^5 x - 10\cos^3 x\sin^2 x + 5\cos x\sin^4 x$;

б) $\cos^8 x - 28\cos^6 x\sin^2 x + 70\cos^4 x\sin^4 x - 28\cos^2 x\sin^6 x + \sin^8 x$;

в) $6\cos^5 x\sin x - 20\cos^3 x\sin^3 x + 6\cos x\sin^5 x$;

г) $7\cos^6 x\sin x - 35\cos^4 x\sin^3 x + 21\cos^2 x\sin^5 x - \sin^7 x$.

Указание. Для выражения $(\cos x + i\sin x)^n$ воспользоваться формулой Муавра и формулой бинома Ньютона.

42.24. $\dfrac{2(3\operatorname{tg}\varphi - 10\operatorname{tg}^3\varphi + 3\operatorname{tg}^5\varphi)}{1 - 15\operatorname{tg}^2\varphi + 15\operatorname{tg}^4\varphi - \operatorname{tg}^6\varphi}$.

42.25. $\displaystyle\sum_{k:0\le 2k\le n} (-1)^{k+2} C_n^{2k} \cos^{n-2k} x\, \sin^{2k} x$;

$\displaystyle\sum_{k:1\le 2k+1\le n} (-1)^{k+1} C_n^{2k+1} \cos^{n-2k-1} x\, \sin^{2k+1} x$.

42.26. а) $\dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4}$; б) $\dfrac{\cos 4x - 4\cos 2x + 3}{8}$;

в) $\dfrac{\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x}{16}$; г) $\dfrac{\cos 6x + 6\cos 4x + 15\cos 2x + 10}{32}$.

Указание. Воспользоваться тем, что если $\alpha = \cos x + i\sin x$, то $\cos kx = \left(\dfrac{\alpha + \alpha^{-1}}{2}\right)^k$, $\sin kx = \left(\dfrac{\alpha - \alpha^{-1}}{2i}\right)^k$.

42.27. а) $2^{n/2}\cos\frac{\pi n}{4}$; б) $2^{n/2}\sin\frac{\pi n}{4}$. Указание. Вычислить $(1 + i)^n$ двумя способами.

42.28. Указание. Использовать формулу бинома Ньютона.

42.29. $2^n 3^{-(n-1)/2}\sin\frac{\pi n}{6}$.

42.30. Указание. См. указание к задаче 42.28.

42.31. а) $\dfrac{a^{k+2}\cos k\varphi - a^{k+1}\cos(k+1)\varphi - a\cos\varphi + 1}{a^2 - 2a\cos\varphi + 1}$;

б) $\dfrac{a^{k+2}\sin(\varphi + kh) - a^{k+1}\sin(\varphi + (k+1)h) - a\sin(\varphi - h) + \sin\varphi}{a^2 - 2a\cos h + 1}$.

Указание. Воспользоваться формулой суммы геометрической прогрессии со знаменателем $a(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

42.32. Указание. См. указание к предыдущей задаче.

42.33. $\dfrac{2(2 - \cos x)}{5 - 4\cos x}$.

42.36. а) $2^n \cos^n \frac{x}{2} \cos \frac{n+2}{2}x$; б) $2^n \cos^n \frac{x}{2} \sin \frac{n+2}{2}x$.

42.37. а) $2^n \sin^n \frac{x}{2} \cos \frac{(n+2)x - \pi n}{2}$; б) $2^n \sin^n \frac{x}{2} \sin \frac{(n+2)x - \pi n}{2}$.

§43

43.1. а) $\cos \frac{(4k+1)\pi}{12} + i \sin \frac{(4k+1)\pi}{12}$, $k = \overline{0,5}$;

б) $2\left(\cos \frac{(6k-1)\pi}{30} + i \sin \frac{(6k-1)\pi}{30}\right)$, $k = \overline{0,9}$;

в) $\sqrt{2}\left(\cos \frac{(8k-1)\pi}{32} + i \sin \frac{(8k-1)\pi}{32}\right)$, $k = \overline{0,7}$;

г) $\cos \frac{(4k-1)\pi}{14} + i \sin \frac{(4k-1)\pi}{14}$, $k = \overline{0,6}$;

д) $\sqrt[10]{2}\left(\cos \frac{(8k-3)\pi}{20} + i \sin \frac{(8k-3)\pi}{20}\right)$, $k = \overline{0,4}$.

43.2. 1) $\{1, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\}$; 2) $\{\pm 1, \pm i\}$; 3) $\{\pm 1, \pm \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \pm \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\}$;
4) $\{\frac{\pm\sqrt{3}+i}{2}, -i\}$; 5) $\{1 \pm i, -1 \pm i\}$; 6) $2\sqrt[6]{1}$, см. пункт 3;
7) $\{\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}i, \pm\sqrt{2}(1+i), \pm\sqrt{2}(1-i)\}$;
8) $\{\pm i\sqrt{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}+i), \pm\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-i)\}$;
9) $\{\pm(\sqrt{3}+i), \pm(1-i\sqrt{3})\}$; 10) $\{\pm(3+i\sqrt{3}), \pm(\sqrt{3}-3i)\}$;
11) $\left\{\frac{1}{2}\sqrt[6]{2}(\sqrt{2+\sqrt{3}}+i\sqrt{2-\sqrt{3}}), \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}(i-1), -\frac{1}{2}\sqrt[6]{2}(\sqrt{2-\sqrt{3}}+i\sqrt{2+\sqrt{3}})\right\}$;
12) $\left\{\frac{1}{2}\sqrt{2}(\sqrt{2+\sqrt{3}}-i\sqrt{2-\sqrt{3}}), -\frac{1}{2}\sqrt{2}(\sqrt{2-\sqrt{3}}-i\sqrt{2+\sqrt{3}}), -1-i\right\}$;
13) $\{\pm\sqrt{3}+i, -2i\}$; 14) $\{\frac{3}{2}(\pm\sqrt{3}-i), 3i\}$;
15) $\{\pm\frac{3+i\sqrt{3}}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}-3i}{2}\}$; 16) $\left\{\pm(\frac{\sqrt{3}}{3}+i), \pm(1-i\frac{\sqrt{3}}{3})\right\}$.

43.3. $z \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ и $z < 0$, $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$.

43.6. Нет. Указание. Воспользоваться предыдущей задачей.

43.9. Указание. Учесть, что 1 принадлежит группе.

43.10. а) Множества C_z, состоящие из всех корней n-й степени из числа z^n, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$; б) множества $C_z = \sqrt[n]{z^n}$, где $z \in \mathbb{C}$: $|z| = 1$.

43.14. а) 1; б) 2; в) 4; г) 8; д) 8; е) $p^k - p^{k-1}$.

43.15. а) 0; б) 0, если s не делится на n, и n, если s делится на n; в) $(-1)^{n-1}$.

43.16. а) $-\frac{n}{1-\varepsilon}$, если $\varepsilon \neq 1$, и $\frac{n(n+1)}{2}$, если $\varepsilon = 1$;

б) $-\frac{n^2(1-\varepsilon)+2n}{(1-\varepsilon)^2}$, если $\varepsilon \neq 1$, и $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, если $\varepsilon = 1$.

43.17. $\frac{2}{1-\varepsilon}$. **43.18.** а) $\frac{1-n}{2}$; б) $\frac{1-n}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$.

43.19. Если w_0 – центр n-угольника, то: а) nw_0; б) nw_0^2; в) $n|w_0|^2+n$.

43.20. $-\frac{i}{4}\left[(1+2i)^{n+1}-(1-2i)^{n+1}\right]$. **43.21.** $\frac{1}{2}\left[(1+2i)^n+(1-2i)^n\right]$.

43.22. $\frac{a^n}{2}\left[i^n+(-i)^n\right]$. **43.23.** $\frac{1}{i\sqrt{3}}\left[\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}\right]$.

43.24. $(1+n)i^n$. **43.25.** $n+1$. **43.26.** $\frac{1}{1+i}i^n+\frac{1}{1-i}$.

43.27. Указание. Умножить матрицу определителя в левой части на транспонированную матрицу определителя Вандермонда $V(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_n)$ (см. §7).

43.29. $(1-\alpha^n)^{n-1}$. Указание. Использовать результат задачи 43.27 и равенство $(1-\alpha\varepsilon_1)(1-\alpha\varepsilon_2)\ldots(1-\alpha\varepsilon_n)=1-\alpha^n$, где ε_1, $\varepsilon_2,\ldots$, ε_n – все значения корня n-й степени из единицы.

43.30. $f(\eta_1)f(\eta_2)\ldots f(\eta_n)$, где $f(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+\ldots+a_nx^{n-1}$ и η_1, $\eta_2,\ldots$, η_n – все значения корня n-й степени из -1. Указание. Умножить матрицу определителя на транспонированную матрицу определителя Вандермонда $V(\eta_1,\eta_2,\ldots,\eta_n)$.

43.31. $f(\alpha_1)f(\alpha_2)\ldots f(\alpha_n)$, где $f(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+\ldots+a_nx^{n-1}$ и α_1, $\alpha_2,\ldots$, α_n – все значения корня n-й степени из z.

43.32. $$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & \varepsilon^{-1} & \varepsilon^{-2} & \varepsilon^{-3} & \ldots & \varepsilon^{-(n-1)} \\ 1 & \varepsilon^{-2} & \varepsilon^{-4} & \varepsilon^{-6} & \ldots & \varepsilon^{-2(n-1)} \\ 1 & \varepsilon^{-3} & \varepsilon^{-6} & \varepsilon^{-9} & \ldots & \varepsilon^{-3(n-1)} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ 1 & \varepsilon^{-(n-1)} & \varepsilon^{-2(n-1)} & \varepsilon^{-3(n-1)} & \ldots & \varepsilon^{-(n-1)^2} \end{bmatrix}.$$

43.33. $A^{-1}=(b_{ij})$, где $b_{ij}=\varepsilon^{-ij}/n$.

Предметный указатель

Алгебраическая операция 111
– – ассоциативная 111
– – дистрибутивная 111
– – коммутативная 111
Алгебраическое дополнение 50
Аффинная система координат 189

Базис естественный пространства $\mathbb{R}^{m\times n}$ 148
– – пространства $\mathbb{R}^n$ 148
– – пространства M_n 148
– левый (отрицательно ориентированный) 191
– линейного пространства 145
– ортонормированный 190
– правый (положительно ориентированный) 191
Базисные строки (столбцы) 136
Базисный минор 136
Базисы биортогональные (взаимные) 215, 216
Бинарное отношение 111
– – рефлексивное 111
– – симметричное 111
– – транзитивное 111
Бине-Коши формула 81
Биортогональные (взаимные) системы векторов 221
– базисы 215, 216

Вандермонда определитель 60
Вектор 118
– арифметический 126
– единичный 118
– нормали к плоскости 233
– – к прямой 232
– нулевой 119
Вектора координаты 146
– произведение на число 119
Векторное произведение 217
Векторов линейная комбинация 126
– разность 119
– разность 126
– сумма 118
Вектор-столбец 9
Вектор-строка 9
Векторы ортогональные 204
Величина вектора 118
– направленного отрезка 117
Взаимное расположение плоскостей в пространстве 240
– – прямой и плоскости 272
– – прямых в пространстве 272
– – прямых на плоскости 240
Вронского определитель (вронскиан) 85

Гипербола 292
– равносторонняя 293
Гиперболоид вращения 319
– двуполостный 319
– однополостный 318
Гиперболоида вершины 319
– главные оси 319
– двуполостного каноническая система координат 319
– – каноническое уравнение 319
– однополостного горловой эллипс 319
– – каноническая система координат 319
– – каноническое уравнение 319
– – прямолинейные образующие 320
– полуоси 319
– центр 319
Гиперболы асимптоты 293
– вершины 293
– ветви 293
– вещественная ось 293
– диаметр 301
– директрисы 294
– каноническая система координат 293
– каноническое уравнение 293
– мнимая ось 293
– полуоси вещественная (мнимая) 293
– сопряженные 294
– фокальные радиусы 292
– фокусы 292
– хорда 301
– центр 293
– эксцентриситет 294
Гиперплоскость 157
Грама матрица 204
Группа 344
– абелева 344
– аддитивная 344
– вычетов 350
– коммутативная 344
– конечная 346
– мультипликативная 344
– циклическая 346
Группы аксиомы 344
– порядок 346

– циклической образующий (порождающий) элемент 346

Декартово произведение множеств 103
Деление отрезка в отношении 120
Делитель нуля 363
– – левый (правый) 363
Длина вектора 118
– направленного отрезка 117

Закон композиции внешний 112
– – внутренний 111
Закона композиции внешнего дистрибутивность 112
Замкнутость относительно операции 22
Знакопеременная группа 348

Изоморфизм групп 345
– колец 363
– полей 364
Инверсия 38
Индекс нильпотентности матрицы 22

Йордана произведение 20

Касательной к гиперболе уравнение 294
– к параболе уравнение 295
– к эллипсу уравнение 292
Коллинеарности критерий 217
Коллинеарность векторов линейного пространства 132
– геометрических векторов 118
– направленных отрезков 117
Кольца аксиомы 363
Кольцо 362
– аннуляторное 368
– вычетов 363
– коммутативное 363
– с единицей 363
Коммутатор групповой 97
– матриц 11
Коммутирующие матрицы 11
Компланарности критерий 218
Компланарность геометрических векторов 118
– направленных отрезков 117
Комплексная плоскость 374
Комплексного числа алгебраическая форма 373
– – аргумент 377
– – действительная часть 373
– – мнимая часть 373
– – модуль 377
– – сопряжение 373
– – тригонометрическая форма 378
Комплексное число 373
– – чисто мнимое 373
Комплексной плоскости вещественная ось 374
– – мнимая ось 374
Конические сечения 329
Континуанта 81
Конус 329
– вращения (круговой) 329
Конуса вершина 329
– направляющая 329
– ось 329
Координатные оси 189
– плоскости 189
Координаты вектора 146
– точки 189
Корень из комплексного числа 383
– – – – первообразный 385
Коши определитель 82
Крамера правило 162
Кронекера символ 9
Кронекера-Капелли теорема 166
Кронекерово произведение матриц 29
Кэли теорема 348

Лагранжа метод 308, 336
– теорема 346
Лапласа теорема 50
Линейная комбинация матриц 10
– – нетривиальная 130
– – тривиальная 130
Линейного пространства базис 145
– – векторы 126
– – нулевой вектор 126
– – размерность 145
Линейное вещественное пространство 125
– пространство n-мерное 146
– – бесконечномерное 146
– – конечномерное 146
Линии второго порядка инварианты 311
– – – общее уравнение 307
– – – полуинвариант 311
– – – характеристическое уравнение 311
Линия второго порядка центральная 313

Матриц кронекерово произведение 29

– линейная комбинация 10
– произведение 10
– равенство 10
– разность 10
– сумма 10
Матрица 9
– вырожденная (невырожденная) 87
– дважды стохастическая 28
– диагональная 9
– единичная 9
– квадратная 9
– квазидиагональная 22
– квазитреугольная 22
– клеточная (блочная) 22
– кососимметрическая 21
– косоэрмитова 377
– ленточная 23
– нильпотентная 22
– нормальная 21
– нулевая 9
– обратная 87
– окаймленная 99
– ортогональная 21
– перестановки 36
– перехода от базиса к базису 146
– периодическая 21
– полного ранга по числу строк (столбцов) 136
– преобразования подобия 100
– присоединенная (взаимная) 87
– противоположная 10
– с диагональным преобладанием 140
– симметрическая 21
– скалярная 9
– сопряженная 374
– столбцовая 9
– стохастическая 28
– строчная 9
– ступенчатая верхняя (правая) 21
– – нижняя (левая) 21
– трапециевидная 21
– треугольная верхняя (правая) 20
– – нижняя (левая) 20
– – строго верхняя (строго нижняя) 27
– трехдиагональная 58
– унитарная 374
– целочисленная 97
– эрмитова 374
Матрицы диагональ главная 9
– – побочная 9
– коммутирующие 11
– перестановочные 11
– подобные 100
– произведение на число 10
– производная 30
– ранг 136
– след 9
– столбец 9
– столбцовая сумма 19
– строка 9
– строчная сумма 19
– транспонирование 12
– эквивалентные 137
– элемент 9
– – внедиагональный 9
– – диагональный 9
– элемента позиция 9
– элементарных преобразований 33
Матричная единица 15
Метод вращений 309
– выделения линейных множителей 61
– – полных квадратов 308
Метод Гаусса вычисления определителя 56
– – – ранга 136
– – исследования и решения систем 169
– Гаусса-Жордана 89
– Лагранжа 308, 336
– рекуррентных соотношений 57
Метрические коэффициенты 204
Минор 49
– базисный 136
– главный 52
– дополнительный 50
– угловой 92
Многообразие линейное аффинное 156
Многообразия вектор сдвига 156
– направляющее подпространство 157
– размерность 157
Многочлен 127
– нулевой 127
– от матрицы 11
Многочлена произведение на число 127
– степень 127
Многочленов равенство 127
– сумма 127
Множеств декартово произведение 103
– объединение 103
– пересечение 103
– разность 103
Множества дополнение 103
– равные 103
Муавра формула 378

Направленный отрезок 117
Направляющие косинусы вектора (луча) 204
Неравенство треугольника на комплексной плоскости 378
Нормальный делитель 346

Обратимости критерий 87
Общее решение неоднородной системы через фундаментальную систему решений 180
– – однородной системы через фундаментальную систему решений 180
– – системы линейных алгебраических уравнений 167
Однородная система линейных алгебраических уравнений 167
Окаймления миноров метод 140
Определитель (детерминант) 41
– квазитреугольной матрицы 51
– произведения матриц 51
Определителя разложение по строке (столбцу) 51
– член 41
Ориентация в пространстве 191
Ортогональная проекция вектора 190
Ортогональные векторы 204
Ортонормированный базис 190
Ось 117
Отношение эквивалентности 111
Отображение 106
Отображение биективное (взаимно однозначное) 106
– инъективное 106
– обратное 108
– обратное левое (правое) 110
– сюръективное 106
– тождественное 107
Отображений произведение (суперпозиция, композиция) 107
– равенство 107
Отображения образ 106

Парабола 294
Параболоид вращения 321
– гиперболический 321
– эллиптический 321
Параболоида вершина 322
– гиперболического прямолинейные образующие 322
– каноническая система координат 321
– канонические уравнения 321
Параболы вершина 295
– директриса 295
– каноническая система координат 295
– каноническое уравнение 295
– ось 295
– фокальный параметр 295
– фокальный радиус 295
– фокус 294
– эксцентриситет 295
Параллелограмма правило 119
Перестановка (подстановка) множеств 38, 107
– натуральная 38
Перестановки четность 38
Перестановочные матрицы 11
Период матрицы 21
Плоскости направляющие векторы 231
Плоскость k-мерная 157
Поверхности второго порядка общее уравнение 335
Подгруппа 345
– циклическая 346
Подкольцо 363
Подполе 364
Подпространство линейное 156
Поле 364
Полуплоскость отрицательная 249
– положительная 249
Полупространство отрицательное 250
– положительное 250
Поля расширение 364
Преобразования координат формулы 191
Проекция вектора 190
– – ортогональная 190
– направленного отрезка 190
Произведение Йордана 20
– матриц 10
– матрицы на число 10
Производная матрицы 30
Прообраз полный 106
Пространства геометрические 126
Пространство арифметическое (координатное) 126
Прямая в линейном пространстве 157
Прямой направляющий вектор 231
Прямолинейные образующие гиперболического параболоида 322
– – однополостного гиперболоида 320
Пучка плоскостей уравнение 241
– прямых уравнение 241
Пучок плоскостей 241

– прямых 241

Равенство направленных отрезков 118
Радиус-вектор (точки) 119, 189
Разбиение множеств 103
Разложение группы левостороннее (правостороннее) 345
– матрицы скелетное 143
– – треугольное (LR-разложение) 92
Размерность линейного пространства 145
Разность 344
– правосторонняя (левосторонняя) 344
Ранг матрицы 136
Расстояние между скрещивающимися прямыми 279
– от точки до плоскости 253
– – – до прямой 253, 279

Сильвестра неравенство 143
Симметрическая группа 348
– разность 116
Система векторов линейно зависимая 130
– – – независимая 131
– – удлиненная 134
– – укороченная 134
– координат аффинная (общая декартова) 189
– – прямоугольная (прямоугольная декартова) 190
– линейных алгебраических уравнений 161
– – – – неопределенная 161
– – – – несовместная 161
– – – – однородная 167
– – – – определенная 161
– – – – приведенная однородная 180
– – – – совместная 161
Системы векторов элементарное преобразование 132
– координат начало, полюс 189
– линейных алгебраических уравнений главные неизвестные 166
– – – – коэффициенты 161
– – – – общее решение 167
– – – – основная матрица 161
– – – – расширенная матрица 166
– – – – решение 161
– – – – свободные неизвестные 166
– – – – – члены 161
– – – – столбец неизвестных 161
– – – – – свободных членов, правая часть 161
– – – – тривиальное решение 167
– – – – частное решение 167
– – – – эквивалентные 161
Скалярное произведение векторов 203
Скалярный квадрат 203
След матрицы 9
Смежный класс левый (правый) 345
Смешанное произведение 218
Сочетание 52
Сравнение по модулю 114
Столбец единичный 9
– координатный 146
Столбцы базисные 136
Строка единичная 9
Строки базисные 136
Сумма матриц 10

Теорема о базисном миноре 136
Транспозиция 38
Транспонирование матрицы 12
Треугольника правило 118
Трехдиагональная матрица 59

Угол между плоскостями 254
– – прямой и плоскостью 279
– – прямыми в пространстве 279
– – – на плоскости 254
Уравнение плоскости в отрезках 233
– – каноническое 231
– – общее 233
– – – полное 233
– прямой на плоскости в отрезках 233
– – – – векторное 233
– – – – каноническое 231
– – – – общее 232
Уравнения плоскости векторные 233, 286
– – параметрические 232
– прямой в пространстве векторные 286
– – – – канонические 271
– – – – общие 271
– – – – параметрические 271
– – на плоскости параметрические 232

Фактор-группа 346
Фактор-множество 111
Фредгольма альтернатива 179
– теорема 179
Фробениуса неравенство 145
– формулы 100
Фундаментальная система решений 179

Характеристика поля 364
Характеристическая функция подмножества 104

Цилиндр гиперболический 332
– круговой 332
– параболический 332
– эллиптический 332
Цилиндра направляющая 332
– ось 332
– прямолинейные образующие 332
Циркулянт 386
– косой 387

Шаля лемма 118

Эйлера круги 104
– тождество 82
Эквивалентности класс 111
– матриц критерий 137
Эквивалентные матрицы 137
Экспонента матрицы 28
Элемент нейтральный 111
– симметричный 111
Элемента группы порядок 346
– – степень 346
Элементарное преобразование системы векторов 132
Элементарные преобразования блочной матрицы 37
– – матрицы 31
– – системы линейных алгебраических уравнений 170
Элементы группы сопряженные 346
Эллипс 291
Эллипса вершины 292
– диаметр 299
– директрисы 292
– каноническая система координат 291
– каноническое уравнение 291
– ось большая (малая) 292
– полуось большая (малая) 292
– фокальные радиусы 291
– фокусы 291
– центр 292
– эксцентриситет 292
Эллипсоид 316
– вращения 317
– трехосный 316
Эллипсоида вершины 317
– главные оси 317
– каноническая система координат 316
– каноническое уравнение 316
– полуоси 316
– центр 317

Якоби тождество 19

Указатель обозначений

$A = (a_{ij})$ – матрица A с элементами a_{ij}, 9
$\{A\}_{ij}$ – элемент матрицы A в позиции (i, j), 9
$A^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_k}$ – алгебраическое дополнение к минору $M^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_k}$, 50
A_n – знакопеременная группа, 348
A^T – транспонированная матрица, 12
A^H – сопряженная матрица, 374
$A * B$ – произведение Йордана, 20
A^{-1} – обратная матрица, 87
$A \approx B$ – подобие матриц, 100
$A \sim B$ – эквивалентность матриц, 137
$A \otimes B$ – кронекерово произведение матриц, 29
$A \Delta B$ – симметрическая разность множеств, 116
$[A, B]$ – коммутатор матриц, 11
$\{A, B\}$ – групповой коммутатор, 97
(ABM) – отношение, в котором точка M делит $[AB]$, 120
$|A|$, $\det A$ – определитель (детерминант) матрицы, 41
$\widehat{A}$ – присоединенная (взаимная) матрица, 87
$(\overrightarrow{AB})$, $|\overrightarrow{AB}|$ – величина, модуль направленного отрезка, 117
a_i – i-й столбец матрицы A, 9
a'_j – j-ая строка матрицы A, 9
$(\mathbf{a})$, $|\mathbf{a}|$ – величина, длина вектора, 118
$(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ – скалярное произведение, 203
$[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ – векторное произведение, 217
$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ – смешанное произведение, 218
$\{a\}$ – циклическая подгруппа, порожденная элементом a, 346
$\arg z$, $|z|$ – аргумент, модель комплексного числа, 377
$\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел, 373
$\mathbb{C}^{m \times n}$ – множество $(m \times n)$-матриц с комплексными элементами, 374
C_n^m, $\binom{n}{m}$ – число сочетаний из n элементов по m, 52
$\operatorname{card} G$ – порядок конечной группы G, 346
$\operatorname{cl}(a)$ – класс эквивалентности, порожденный элементом a, 111
$\mathcal{D}^{m \times n}$ – множество $(m \times n)$-матриц, элементы которых – дифференцируем функции, 30
$\operatorname{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$ – диагональная матрица, 9
δ_{ij} – символ Кронекера, 9
$e = (e_1, \dots, e_n)$ – базис e линейного пространства, 146
$\exp A$ – экспонента матрицы A, 28
$e(X)$ – характеристическая функция множества X, 104
$G_1 \cong G_2$ – изоморфизм групп, 345
G/H – фактор-группа группы G по нормальной подгруппе H, 346
$\langle G, * \rangle$ – группа с операцией $*$, 344
$G(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ – матрица Грама векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, 204
f^{-1} – обратное отображение, 108
I – единичная матрица, 9

K – кольцо, 362
l_+, l_- – положительная, отрицательная полуплоскости относительно прямой l, 249
M_n – множество всех многочленов степени не выше n, 127
$M^{i_1 i_2 \dots i_k}_{j_1 j_2 \dots j_k}$, M_k – минор k-го порядка, расположенный в строках с номерами $i_1, \dots, i_k$ и в столбцах с номерами $j_1, \dots, j_k$, 49
$\overline{M}$, M^δ – дополнительный минор, 49
$m \equiv n (\operatorname{mod} p)$ – числа m и n сравнимы по модулю p, 114, 349
$\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел
$\{O;\, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ – аффинная (общая декартова) система координат, 189
P – поле, 364
$\operatorname{pr}^L_l \mathbf{a}$, $\operatorname{pr}^\pi_l \mathbf{a}$, $\operatorname{pr}^l_\pi \mathbf{a}$, $\operatorname{pr}_\mathbf{a} \mathbf{b}$ – проекции вектора, 190, 203
π_+, π_- – положительное, отрицательное полупространства относительно плоскости π, 249
$\pi(M)$, $\pi(l)$ – пучки прямых с центром M, плоскостей с осью l, 241
$\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел
$\mathbb{R}$ – множество вещественных чисел
$\mathbb{R}^n$ – арифметическое пространство, 126
$\mathbb{R}^{m \times n}$ – множество $(m \times n)$-матриц с вещественными элементами, 9
$\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ – действительная, мнимая части комплексного числа, 373
$\mathbf{r}_A$ – радиус-вектор точки A, 119
$\operatorname{rg} A$ – ранг матрицы, 136
$\rho(l_1, l_2)$ – расстояние между скрещивающимися прямыми, 280
$\rho(M_0, l)$ – расстояние от точки до прямой, 253, 279
$\rho(M_0, \pi)$ – расстояние от точки до плоскости, 253
S_n – симметрическая группа степени n, 348
$\sigma(\alpha)$ – общее число инверсий в перестановке α, 38
$\operatorname{tr} A$ – след матрицы, 9
V_1, V_2, V_3 – геометрические пространства, 126
$V(x_1, \dots, x_n)$ – определитель Вандермонда, 60
$W(f_1, \dots, f_n)$ – определитель Вронского, вронскиан, 85
$X/\mathcal{R}$ – фактор-множество, 111
$X \times Y$, $X \cup Y$, $X \cap Y$, $X \setminus Y$, $\overline{Y}$ – декартово произведение, объединение, пересечение, разность, дополнение множеств, 103
$x\mathcal{R}y$ – бинарное отношение, 111
$x \sim y$ – отношение эквивалентности, 111
$\mathbb{Z}$ – множество целых чисел
$\mathbb{Z}_p$ – группа, кольцо вычетов по модулю p, 350, 364
$\sqrt[n]{z}$ – корни n-й степени из комплексного числа, 383

Ким Г.Д., Крицков Л.В.

АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ:

Теоремы и задачи.

Том I

Издательство ООО "Планета Знаний"
Подписано в печать 03.01.2007.
Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 29.
Тираж 2000 экз. Зак. 4271.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ООО ПФ «Полиграфист».
160001, г. Вологда, ул. Челюскинцев, 3.
Тел.: (8172) 72-55-31, 72-61-75.